Tehtävä Olkoon f derivoituva funktio välillä $[a,b]$, $f(a) = 0$ ja $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ jollain vakiolla $M \geq 0$ ja kaikilla $x \in\ ]a,b[$. Todista, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Todistus: Oletetaan, että on olemassa piste $c \in\ ]a,b]$, jolle $f(c) > 0$. Koska f on derivoituva, niin se on myös jatkuva. Näin ollen on olemassa luku $d_0 \in [0,c[$, jolle $f(x) > 0$, kun $d_0 < x \leq c$.

Olkoon nyt

$A = \{d \mid 0 \leq d < c, f(x) > 0,$ kun $d < x \leq c\}$, olkoon A epätyhjä joukko ja $e = \inf A$

eli yhtäpitävästi joukolle A ja pisteelle e pätee, että
1. e on A:n eräs alaraja ja
2. mikään e:tä suurempi luku ei voi olla joukon A alaraja.

Osoitetaan, että funktio f on positiivinen välillä $]e,c]$. Tämän osoittamiseksi olkoon $x_0 \in\ ]e,c]$. Koska $x_0 > e$, niin x_0 ei voi olla joukon A alaraja. Jos kaikilla $x \in A$ pätee $x \geq x_0$, niin x_0 olisi joukon A alaraja. Koska näin ei ole, niin on olemassa $x \in A$, jolla $x < x_0$. Koska x on A:n alkio, niin $f(y) > 0$ kaikilla y, jotka ovat välillä $x < y \leq c$. Mutta $x_0 > x$, joten välttämättä $f(x_0) > 0$.

Koska funktio f on jatkuva, niin f on jatkuva myös pisteessä e. Tehdään päättely $f(x) > 0$ kun $x > e$, joten $f(e) = \lim_{\{x \to e+\}} f(x) \geq 0$. Tällöin funktion arvolla e on $f(e) \geq 0$.

Nyt on näytettävä, että $f(e) = 0$. Jos $e = a$, asia on kunnossa. Oletetaan, että $e > a$ ja tehdään vastaoletus $f(e) > 0$. Jatkuvuuden nojalla (sama päättely kuin tehtävän alussa) siitä, että $f(e) > 0$ seuraa, että on olemassa luku $r > 0$, jolle $f(x) > 0$ kun $e\text{-}r < x \leq e$. Tämähän tarkoittaa, että $e\text{-}r$ on joukon A alkio, mutta $e\text{-}r < e$, mikä on ristiriita sen kanssa, että $e = \inf A$. Siispä $f(e) = 0$.

Määritellään sitten $g(x) = f(x)e^{-Mx}$, kun $x \in [a,b]$. Nyt

$$g'(x) = (f'(x) - Mf(x))e^{-Mx},$$

kun $x \in [a,b]$. Koska $f(x) > 0$ välillä $]e, c]$, on tällä välillä

$$f'(x) \leq |f'(x)| \leq M|f(x)| = Mf(x)$$

ja siis myös $g'(x) \leq 0$. Funktio g on täten vähenevä välillä $[e,c]$. Aiemmin huomattiin, että $f(e) = 0$, joten $g(e) = 0$. Koska g on vähenevä välillä $[e,c]$, on $g(x) \leq 0$, kun $e \leq x \leq c$. Tästä seuraa, että $f(x) \leq 0$, kun $e < x \leq c$. Tämä on ristiriita. Näin ollen ei voi olla pistettä $c \in\ ]a,b]$, jolle $f(c) > 0$.

Vastaavasti voidaan päätellä, että ei voi olla olemassa pistettä $c \in [a,b]$, jolla $f(c) < 0$. Oletetaan nimittäin, että on olemassa piste $c \in\ ]a,b]$, jolle $f(c) < 0$. Tällöin saadaan väli, jolla f on negatiivinen, jonka vasemmassa päätepisteessä on $f = 0$ ja jolla g on kasvava (nyt tarvitaan arviota $Mf(x) = -M|f(x)| \leq f'(x)$, joka seuraa oletuksista). Näin ollen $f(x) \geq 0$ koko tällä välillä, mikä on ristiriita oletuksen $f(c) < 0$ kanssa.

Ainoa mahdollisuus on, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.