Tehtävä Olkoon f derivoituva funktio välillä $[a,b]$, $f(a) = 0$ ja $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ jollain vakiolla $M \geq 0$ ja kaikilla $x \in \,]a,b[$. Todista, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Todistus: Oletetaan, että on olemassa piste $c \in \,]a,b]$, jolle $f(c) > 0$. Koska f on derivoituva, niin se on myös jatkuva. Näin ollen on olemassa luku $d_0 \in [0,c[$, jolle $f(x) > 0$, kun $d_0 < x \leq c$.

Olkoon nyt

$$A = \{d \mid 0 \leq d < c, f(x) > 0, \text{ kun } d < x \leq c\} \text{ ja } e = \inf A$$

eli yhtäpitävästi joukolle A ja pisteelle e pätee, että
1. e on A:n eräs alaraja ja
2. mikään e:tä suurempi luku ei voi olla joukon A alaraja.

Osoitetaan, että funktio f on positiivinen välillä $]e,c]$. Tämän osoittamiseksi olkoon $x_0 \in \,]e,c]$. Koska $x_0 > e$, niin x_0 ei voi olla joukon A alaraja. Jos kaikilla $x \in A$ pätee $x \geq x_0$, niin x_0 olisi joukon A alaraja. Koska näin ei ole, niin on olemassa $x \in A$, jolla $x < x_0$. Pisteen x avulla voimme päätellä sen, että x_0 kuuluu sellaiselle välille $]e,c]$, jolla funktion f arvot ovat positiivisia, joten $f(x_0) > 0$.

Koska funktio f on jatkuva, niin f on jatkuva myös pisteessä e. Koska funktio f on myös derivoituva, niin voimme päätellä, että $f(x) \to f(e)$, kun $x \to e$ oikealta. Tällöin funktion arvolla e on $f(e) \geq 0$.

Nyt on näytettävä, että $f(e) = 0$. Jos $e = a$, asia on kunnossa. Tehdään antiteesi $e > a$ *tai* $f(e) > 0$. Koska e on joukon A alaraja, niin kaikilla $x \in A$ pätee $x \geq e$. Osoitetaan, että on olemassa $x \in A$, jolla $x < e$. Olkoon $x = e-r$, missä $r > 0$. Koska $f(e) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, jolla $f(e-r) > 0$. Mutta nythän $e-r < e$. Tämä on ristiriita oletuksen $e = \inf A$ kanssa. Joten ei ole olemassa pistettä x, joka olisi pienempi kuin e joukossa A. Ei siis voi olla, että $f(e) > 0$. Tästä seuraa, että $e = a$. Siispä antiteesi on ristiriitainen ja $f(e) = 0$.

Määritellään sitten $g(x) = f(x)e^{-Mx}$, kun $x \in [a,b]$. Nyt

$$g'(x) = (f'(x) - Mf(x))e^{-Mx},$$

kun $x \in [a,b]$. Koska $f(x) > 0$ välillä $]e, c]$, on tällä välillä

$$f'(x) \leq |f'(x)| \leq M|f(x)| = Mf(x)$$

ja siis myös $g'(x) \leq 0$. Funktio g on täten vähenevä välillä $[e,c]$. Aiemmin huomattiin, että $f(e) = 0$, joten $g(e) = 0$. Koska g on vähenevä välillä $[e,c]$, on $g(x) \leq 0$, kun $e \leq x \leq c$. Tästä seuraa, että $f(x) \leq 0$, kun $e < x \leq c$. Tämä on ristiriita. Näin ollen ei voi olla pistettä $c \in \,]a,b]$, jolle $f(c) > 0$.

Vastaavasti voidaan päätellä, että ei voi olla olemassa pistettä $c \in [a,b]$, jolla $f(c) < 0$. Oletetaan nimittäin, että on olemassa piste $c \in \,]a,b]$, jolle $f(c) < 0$. Tällöin saadaan väli, jolla f on negatiivinen, jonka vasemmassa päätepisteessä on $f = 0$ ja jolla g on kasvava (nyt tarvitaan arviota $Mf(x) = -M|f(x)| \leq f'(x)$, joka seuraa oletuksista). Näin ollen $f(x) \geq 0$ koko tällä välillä, mikä on ristiriita oletuksen $f(c) < 0$ kanssa.

Ainoa mahdollisuus on, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.