Tässä on melko yksityiskohtainen todistus tehtävän alkupään tuloksista. Tämä voi olla hieman hankalaa, jos ei ole tottunut vääntämään ϵ, δ-todistuksia. Todistuksen idea on kuitenkin, että jos on olemassa piste x_0, jolle $f(x_0) > 0$, jatkuvuus takaa, että voidaan löytää väli $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ jolla f on positiivinen. Jos kerran on olemassa tällainen väli, on olemassa laajin väli, joka sisältää pisteen x_0, jonka oikea päätepiste on $x_0 + \delta$ ja jolla f on positiivinen. Kun kerran kyseessä on laajin tällainen väli, ei funktio voi olla positiivinen välin vasemmassa päätepisteessä, koska tässä tapauksessa voitaisiin konstruoida vielä laajempi väli. Jatkuvuus takaa, että funktio ei voi olla negatiivinenkaan vasemmassa päätepisteessä. Ainoa mahdollisuus on, että funktio häviää vasemmassa päätepisteessä.

Kerrataan aluksi jatkuvuuden määritelmä: funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$. Katsotaan nyt mitä seuraa siitä, että $f(x_0) > 0$.

Sijoitetaan jatkuvuuden määritelmään $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ kun $|x - x_0| < \delta$. Tuosta ensimmäisestä epäyhtälöstä seuraa, että $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$, kun $|x - x_0| < \delta$. Näin ollen, on löytynyt jokin väli $(x_0 - \delta, x - 0 + \delta)$ jolla f on positiivnen. Ei voi tietenkään olla $x_0 - \delta < a$, koska $f(a) = 0$ ja tällöin a olisi kyseisellä välillä. Voimme siis olettaa, että $x_0 - \delta \geq a$.

Lähdetään sitten tutkimaan joukkoa

$$D = \{r \geq \delta : f(x) > 0 \text{ kun } x_0 - r < x < x_0 + \delta \text{ ja } x_0 - r \geq a\}.$$

Tähänastisen päättelyn nojalla $\delta \in D$, joten D on epätyhjä joukko. D:n määritelmän viimeisestä ehdosta seuraa, että $r \leq x_0 - a$ kaikilla $r \in D$, joten D on myös ylhäältä rajoitettu. Reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla yljäältä rajoitetulla epätyhjällä joukolla on olemassa pienin yläraja (sup). Olkoon $\delta' = \sup D$.

Tavoitteena on nyt todistaa, että f on positiivinen välillä $(x_0 - \delta', x_0 + \delta)$ ja $f(x_0 - \delta') = 0$. Olkoon nyt $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta)$. Supremumin määritelmästä seuraa melkein välittömästi, että jos $\delta' = \sup D$, on olemassa jono pisteitä $r_n \in D$, joille $r_n \to \delta'$ kun $n \to \infty$. Nyt koska $x > x_0 - \delta'$, menemällä tarpeeksi pitkälle tuossa jonossa voidaan löytää luku r_n, jolle $x > x_0 - r_n$. Tämän voi johtaa melko helposti raja-arvon määritelmästä vastaoletuksella. Näin ollen $x \in (x_0 - r_n, x_0 + \delta)$ jollakin $r_n \in D$. Joukon D määritelmästä seuraa tällöin, että $f(x) > 0$.

Nyt on näytettävä, että $f(x_0 - \delta') = 0$. Jos $x_0 - \delta' = a$, on asia kunnossa. Voimme siis olettaa, että $x_0 - \delta' > a$. Nyt jos olisi $f(x_0 - \delta') > 0$ voisimme löytää jonkin välin $(x_0 - \delta' - r, x_0 - \delta' + r)$ jossa $r > 0$ ja f olisi positiivinen tällä välillä. Tämä on vain tehtävän alussa esiintyvän päättelyn toistamista. Mutta nythän $\delta' + r \in D$ ja $\delta' + r > \delta'$. Tämä on vastoin δ':n määritelmää - senhän piti olla joukon D pienin yläraja, joten ei voi olla D:n alkiota, joka on sitä aidosti suurempi. Ei siis voi olla, että $f(x_0 - \delta') > 0$. Entä sitten jos $f(x_0 - \delta') < 0$? Taas toistamalla sitä samaa päättelyä voitaisiin löytää $r > 0$, jolle f on negatiivinen välillä $(x_0 - \delta' - r, x_0 - \delta' + r)$. Mutta nyt riittävän pienillä r, $x_0 - \delta' + \frac{r}{2} \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta)$, joten täytyy olla $f(x_0 - \delta + \frac{r}{2}) > 0$. Näin ollen $f(x_0 - \delta') < 0$ on mahdotonta. Ainoa mahdollisuus on, että $f(x_0 - \delta') = 0$.

Tehtävän loppu lieneekin selvää.