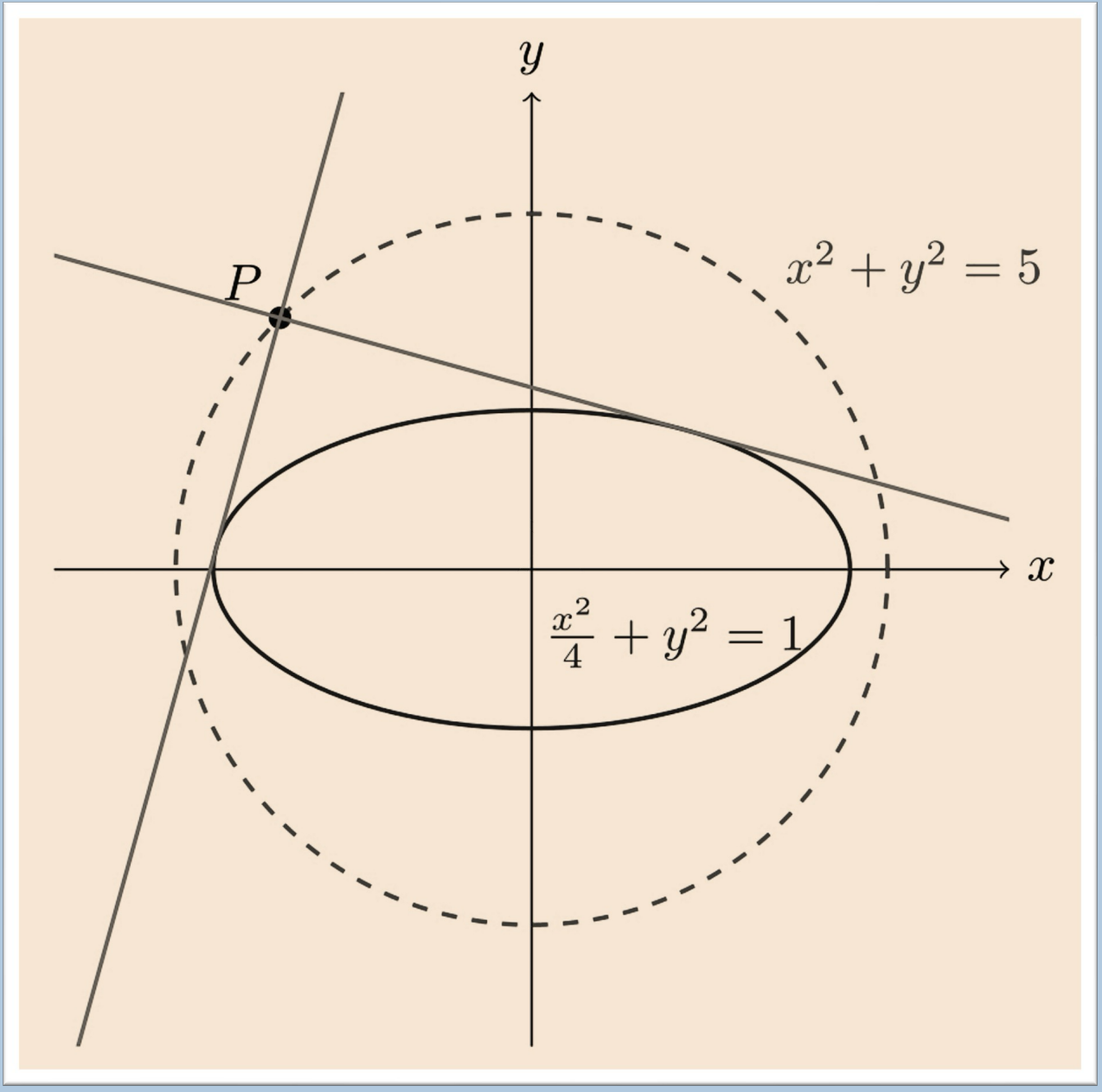
SOLMU

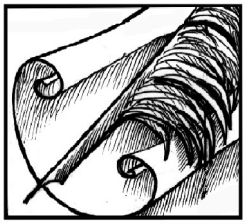
MATEMATIIKKALEHTI 1/2026

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Vauhtia enemmän kuin älyä (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) . . . 3
Laiskajaakon geometriaa (Tuomas Korppi) . . . 5
Lukuristikko (Petri Laarne) . . . 12
Satu suorakulmaisesta kolmiosta (Riku Räihä) . . . 14
Metsästä rationaalikertoimisiin asymptootteihin (Timo Salminen) . . . 15
Ellipsin näkyminen suorassa kulmassa (Pentti Haukkanen) . . . 22
Solmun tehtäviä . . . 24
Sivun 12 lukuristikon ratkaisu . . . 25



Vauhtia enemmän kuin älyä

Pääkirjoitus

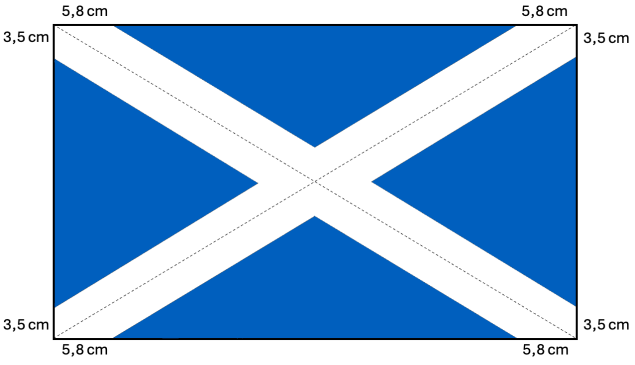
Kuulin taannoin jääkiekko-ottelun katsomossa jonkun vanhemmanpuoleisen katsojan luonnehtivan peliä sanoen siinä olevan vauhtia enemmän kuin älyä. Luonnehdinta oli tilanteesta varsin osuva, mutta luonnehdinta olisi monessa muussakin tilanteessa osuva. Olen itse syyllistynyt tähän matematiikkakilpailuissa vielä aktiivisesti kilpaillessani, itse asiassa viimeisissä olympialaisissani. Laskin ankarasti ja yritin todistaa kaikenlaisia asioita geometrian tehtävässä. Oliko tässä mitään järkeä, onkin ihan toinen juttu. Olisi ehkä kannattanut pysähtyä hetkeksi ja ajatella.

Tarpeettoman usein matematiikan tehtäviä lähdetään ratkaisemaan tavalla, joka on kömpelö. Valitaan ensimmäinen tapa, joka mieleen juolahtaa, eikä mietitä lainkaan, onko se hyvä tai näppärä tapa. Tämän jälkeen lasketaan pitkään ja ankarasti. Tämä ei tietenkään ole väärin – on aina hyvä osata ratkaista tehtävä. Tämä kuitenkin usein tarkoittaa sitä, että laskut menevät tarpeettoman hankaliksi tai välivaiheita tulee enemmän kuin olisi tarve.

Hyvä esimerkki on tästä erinäisissä joustavuustesteissäkin käytetty tehtävä $5\left(x+\frac{3}{7}\right)+3\left(x+\frac{3}{7}\right)=16$. Jos tämän ratkaisee yhdistämällä ensin vasemman puolen termit: $8\left(x+\frac{3}{7}\right)=16$, sitten jakaa puolittain kahdeksalla ja lopulta laskee $x=2-\frac{3}{7}$, ovat laskut varsin mukavia. Sen sijaan, jos tehtävän ratkaisemisen aloittaa avaamalla vasemman puolen sulut, jolloin käsiteltävänä on yhtälö $5x+\frac{15}{7}+3x+\frac{9}{7}=16$, ovat laskut paljon epämiellyttävämpiä ja laskuvirheiden riski kasvaa.

Klassinen virhe ylioppilaskokeissa on prosenttikorotuksen poiston laskeminen väärin. Tämä tulee vastaan esimerkiksi ALV-laskuissa. Jos tiedetään, että elintarvikkeiden ALV-kanta on 13,5 % ja maitolitra maksaa kaupassa 1,68 euroa, niin hinta ilman arvonlisäveroa ei ole $1{,}68\cdot(1-0{,}135)$ vaan $\frac{1{,}68}{1{,}135}$. Tämä on toki yleinen virhekäsitys prosenttilaskennassa, mutta mietin silti, että on tässäkin vain laskettu miettimättä, mitä oikeasti tapahtuu.

Keväällä 2026 ylioppilaskokeessa piti laskea Skotlannin lipun valkoisen alan osuus.



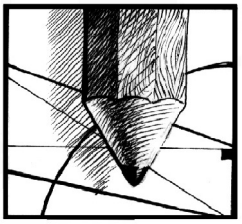
Tämä kuva oli ylioppilaskokeessa.

Lipussa on valkoinen kulmasta kulmaan menevä risti, jonka pinta-alan laskeminen ei ole ihan helppoa. Valkoisen osan voi täydentää osin päällekkäisiksi suunnikkaiksi, jolloin pitää vielä laskea päällekkäisen suunnikkaan ala. Lipun valkoiset osat voi myös hieman ove-

lammin hahmottaa kahdeksaksi suunnikkaaksi ja suorakulmioksi tai vaikka neljäksi suunnikkaaksi, joista on poistettu suorakulmaisia kolmioita ja keskustan suorakulmaisista kolmioista muodostuvaksi osaksi. Tapoja siis on, mutta valkoisen kautta laskemallakin kannattaa alussa vähentää vauhtia ja pysähtyä miettimään. Usein ensimmäiseksi mieleen tulevat tavat eivät ole ne näppärimmät. Merkittävästi helpompaa on itse asiassa laskea täysin muuta reittiä. Lipun muu osa nimittäin koostuu sinisistä kolmioista. Niiden pinta-alan laskeminen on helppoa. Tämän jälkeen valkoisen osan laskeminen onnistuu vähennyslaskulla.

Usein tehtävän aluksi olisi kiva lähteä laskemaan vauhdilla, jos tehtävästä saa mitään otetta siitä, mitä voisi laskea. Usein kuitenkin tehtävän alussa kannattaisi vähentää vauhtia ja hetki pohtia sitä, mitä kaikkea oikeasti on tehtävissä, millaisia reittejä ratkaisuun on käytettävissä ja mikä reitti on kokonaisuutena kätevin.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

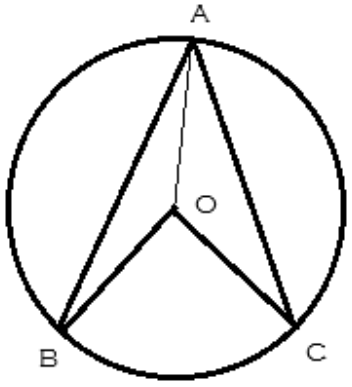


Laiskajaakon geometriaa

Tuomas Korppi

Johdanto

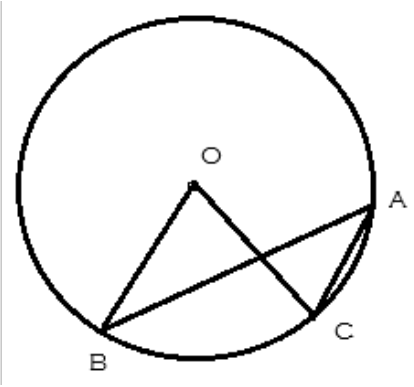
Kuten lukija varmaan tietää, ympyrässä kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Todistuskaan ei ole vaikea. Tutkitaan Kuvaa 1.



Kuva 1: Kehäkulmalause.

Kulma BAC on kehäkulma, ja BOC on keskuskulma. Kolmiot AOB ja AOC ovat tasakylkisiä, ja kulmien AOB ja AOC summa on $360° - \angle BOC$, mistä seuraa, että $\angle OAB + \angle OAC + \angle OBA + \angle OCA = \angle BOC$. Mutta $\angle OAC = \angle OCA$ ja $\angle OAB = \angle OBA$. Siis $\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \angle BOC/2$.

Mutta entä, jos kuvio on kuten Kuvassa 2?



Kuva 2: Vino kehäkulma.

Nyt sama todistus ei päde. Normaalisti klassisessa geometriassa laiska todistaja tyytyy yhteen tapaukseen eikä ala tekemään jokaista tapausta erikseen. Tässä artikkelissa todistamme teoreeman, joka monessa tapauksessa antaa formaalin oikeutuksen tälle laiskan geometrikon piintyneelle tavalle.

Harppi- ja viivoitinkonstruktiot

Klassisessa geometriassa kaikki konstruktiot tehdään harpilla ja viivoittimella. Tämä tarkoittaa sitä, että niissä toistetaan vain seuraavaa viittä askelta.

- Kun kaksi pistettä on annettu, suoran piirtäminen niiden kautta.

- Kun pisteet A ja B on annettu, sellaisen ympyrän piirtäminen, jonka keskipiste on A ja jonka kehä kulkee pisteen B kautta.
- Kun kaksi sellaista suoraa on annettu, jotka eivät ole yhdensuuntaisia, niiden leikkauspisteen ottaminen.
- Kun on annettu ympyrä ja suora, jotka leikkaavat, niiden leikkauspisteiden ottaminen.
- Kun on annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat, niiden leikkauspisteiden ottaminen.

Kaikki klassisen geometrian konstruktiot voidaan suorittaa toistamalla yllä olevia viittä askelta. Klassikkoteos, joka kertoo, mikä kaikki näillä askeleilla on mahdollista, on Eukleideen Alkeet (https://www.gutenberg.org/ebooks/21076). Esimerkinomaisesti luettelemme joitain onnistuvia operaatioita.

- Janan keskipisteen konstruointi.
- Jos on annettu suora ja piste sen ulkopuolella, pisteen kautta kulkevan normaalin piirtäminen suoralle.
- Jos on annettu ympyrä ja piste sen ulkopuolelta, tangentin piirtäminen ympyrälle pisteen kautta sekä tangeerauspisteen löytäminen (muutenkin kuin ympyrän ja suoran leikkauspisteenä; tämä on tärkeää meidän kannaltamme).
- Jos on annettu jana ja piste sen ulkopuolelta, sellaisen ympyrän piirtäminen, jonka keskipiste on annettu piste ja säde annetun janan pituus.
- Jos on annettu kolmio, ympyröiden piirtäminen kolmion sisään ja ympäri.
- Kulman puolittaminen.

Tunnettu esimerkki operaatiosta, joka ei välttämättä onnistu yllä mainituilla viidellä operaatiolla, on kulman jakaminen kolmeen yhtä suureen osaan, ja siksi tällaista kulman kolmijakoa ei esiinny klassisen geometrian tehtävissä.

Reaalianalyyttiset funktiot

Olkoon V avoin väli, eli joko $\mathbb{R}$, $]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ tai $]a,b[$. Tässä kappaleessa tutkimme reaalianalyyttisiä funktioita $f\colon V\to\mathbb{R}$. Annamme muodollisen määritelmän, mutta sitä ei tarvitse ymmärtää. Kaikki tarvittava reaalianalyyttisistä funktioista sisältyy Teoreemoihin 2, 3 ja 5 sekä Korollaariin 4.

Määritelmä 1. *Funktio $f\colon V\to\mathbb{R}$ on reaalianalyyttinen, jos jokaisella $x_0\in V$ on avoin väli $V'\subset V$, $x_0\in V'$ ja kertoimet a_i, $i\in\mathbb{N}$, joille kaikilla $x\in V'$ pätee*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x-x_0)^i.$$

Seuraavien teoreemojen todistukset sivuutamme, koska ne ovat yliopistokamaa.

Teoreema 2. *Seuraavat funktiot ovat reaalianalyyttisiä.*

- *Vakiofunktiot.*
- sin, cos *ovat reaalianalyyttisiä koko* $\mathbb{R}$*:ssa,* tan *on reaalianalyyttinen sellaisilla väleillä, joissa se on jatkuva.*
- $x\mapsto -x$.
- $x\mapsto\frac{1}{x}$, *kun lähtöjoukkona on joko* $]-\infty,0[$ *tai* $]0,\infty[$.
- *Identtinen funktio* $x\mapsto x$.
- $x\mapsto a^x$, *missä* $a>0$ *on vakio.*

Teoreema 3. *Jos f,g ovat reaalianalyyttisiä funktioita, niin seuraavat ovat myös reaalianalyyttisiä funktioita olettaen että kyseiset funktiot on määritelty.*

- $f|U$ *(f:n lähtöjoukon rajoittaminen pienempään avoimeen väliin).*
- $x\mapsto f(g(x))$.
- $x\mapsto f(x)+g(x)$.
- $x\mapsto f(x)g(x)$.
- $x\mapsto f^{-1}(x)$ *olettaen, että f on injektio ja sen derivaatta on kaikkialla nollasta eroava.*

Lisäksi seuraava pätee: Jos $f\colon V\to\mathbb{R}$ ja V_i:t ovat avoimia välejä, joille $\bigcup V_i=V$ ja $f|V_i$ on reaalianalyyttinen jokaisella i, niin tällöin f on reaalianalyyttinen.

Korollaari 4. *Seuraavat funktiot ovat reaalianalyyttisiä.*

- $x\mapsto x^n$.
- $x\mapsto\sqrt{x}$, *kun* $x>0$.
- *Trigonometristen funktioiden arkusfunktiot, kun lähtöjoukkoina ovat sopivat* avoimet *välit.*
- $x\mapsto f(x)-g(x)$, *kun f,g ovat reaalianalyyttisiä.*
- $x\mapsto f(x)/g(x)$, *kun f,g ovat reaalianalyyttisiä ja määrittelyvälillä* $g(x)\neq 0$.

Todistus: $x^n=x\times\cdots\times x$, joten ensimmäisen pykälän tulos seuraa siitä, että kahden reaalianalyyttisen funktion tulo on reaalianalyyttinen.

Neliöjuurta koskeva tulos seuraa edellisestä kappaleesta ja siitä, että reaalianalyyttisen funktion käänteisfunktio on reaalianalyyttinen.

Kolmas kohta seuraa samoin siitä, että reaalianalyyttisten funktioiden käänteisfunktiot ovat reaalianalyyttisiä.

Kaksi viimeistä kohtaa seuraavat siitä, että $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$ ja $f(x)/g(x)=f(x)(1/g(x))$. □

Koko homma tässä artikkelissa perustuu seuraavaan teoreemaan:

Teoreema 5. *Olkoot $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ reaalianalyyttisiä. Oletetaan, että on olemassa avoin väli $V' \subset V$, jolle $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V'$. Tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V$.*

Harppi- ja viivoitinkonstruktioiden reaalianalyyttisyys

Olkoon V väli ja $\mathbb{R}^2$ taso. Olkoon $p \in \mathbb{R}^2$. Merkitään p:n koordinaatteja p_x ja p_y. Sanomme, että $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ on reaalianalyyttinen, jos $t \mapsto f(t)_x$ ja $t \mapsto f(t)_y$ ovat reaalianalyyttisiä. Ajattelemme t:tä aikaparametrinä. Näin ollen, jos f on määritelty kuten edellä, sanomme, että piste f varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.

Harppi-ja viivoitinkonstruktioissa pisteiden avulla konstruoidaan suoria ja ympyröitä, joiden leikkauspisteitä käytetään jatkokonstruktioihin. Seuraavaksi todistamme, että jos suorien ja ympyröiden määrittelyssä käytetyt pisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen, myös saadut leikkauspisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.

Teoreema 6. *Olkoon p, q, r, s pisteitä tasossa, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että kaikissa vaiheissa $p \neq q$ ja $r \neq s$, ja lisäksi missään vaiheessa pisteiden p, q ja pisteiden r, s määrittelemät suorat eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin suorien leikkauspiste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Suorien leikkauspisteen x-koordinaatti on

$$\frac{(p_x q_y - p_y q_x)(r_x - s_x) - (p_x - q_x)(r_x s_y - r_y s_x)}{(p_x - q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x - s_x)}$$

ja y-koordinaatti

$$\frac{(p_x q_y - p_y q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x s_y - r_y s_x)}{(p_x - q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x - s_x)}.$$

Nähdään, että nämä funktiot saadaan koottua reaalianalyyttisistä alkeisfunktioista operaatioilla, jotka säilyttävät reaalianalyyttisyyden. □

Teoreema 7. *Olkoon p, q, r, s pisteitä tasossa, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että kaikissa vaiheissa $p \neq q$ ja $r \neq s$, ja lisäksi pisteiden p, q määrittelemällä suoralla ja pisteiden r (keskipiste) ja s (kehäpiste) määrittelemällä ympyrällä on kaksi leikkauspistettä. Tällöin kumpikin leikkauspiste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Määritellään

$$\begin{aligned}
d_x &= q_x - p_x,\\
d_y &= q_y - p_y,\\
d_r &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2},\\
D &= (p_x - r_x)(q_y - r_y) - (q_x - r_x)(p_y - r_y),\\
R &= \sqrt{(s_x - r_x)^2 + (s_y - r_y)^2},\\
\operatorname{sgn}(x) &= 1, \text{ jos } x \geq 1, \operatorname{sgn}(x) = -1, \text{ jos } x < 1.
\end{aligned}$$

Nyt leikkauspisteiden x-koordinaatit voidaan kirjoittaa

$$\frac{D d_y \pm \operatorname{sgn}(d_y) d_x \sqrt{R^2 d_r^2 - D^2}}{d_r^2} + r_x$$

ja y-koordinaatit

$$\frac{-D d_x \pm |d_y| \sqrt{R^2 d_r^2 - D^2}}{d_r^2} + r_y.$$

Huomaa, että itseisarvofunktio ja sgn-funktio eivät ole reaalianalyyttisiä. Purkamalla kaavat auki kuitenkin nähdään, että silloin kun d_y ei vaihda merkkiään, saadaan reaalianalyyttinen funktio. Tehtävänannossa y- ja x-koordinaattien roolit ovat symmetriset, joten kaavoista voidaan johtaa myös sellaiset versiot, joissa sgn- ja itseisarvofunktioiden sisällä on d_x. Koska d_x ja d_y eivät voi olla yhtaikaa nollia (tällöin ne eivät määräisi yksikäsitteistä suoraa), jompaa kumpaa kaavaparia voidaan aina käyttää. Niinpä lauseen väite seuraa Teoreeman 3 ”Lisäksi”-pykälästä.

Kahdessa viimeisessä kaavassa juurilausekkeiden sisukset ovat positiivisia, jos ja vain jos ympyrällä ja suoralla on täsmälleen kaksi leikkauspistettä. □

Teoreema 8. *Olkoon p, q, r, s neljä pistettä, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että koko ajan $p \neq q$ ja $r \neq s$. Olkoon S pisteiden p (keskipiste) ja q (kehäpiste) määräämä ympyrä ja S' vastaavasti pisteiden r, s määräämä ympyrä. Oletamme, että ympyröillä on koko ajan kaksi leikkauspistettä. Tällöin ympyröiden S, S' leikkauspisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Olkoon

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{[q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2},\\
R_2 &= \sqrt{(s_x - r_x)^2 + (x_y - r_y)^2},\\
d &= \sqrt{(p_x - r_x)^2 + (p_y - r_y)^2},\\
\ell &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d},\\
h &= \sqrt{R_1^2 - \ell^2}.
\end{aligned}$$

Nyt leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat

$$\frac{\ell}{d}(r_x - p_x) \pm \frac{h}{d}(r_y - p_y) + p_x$$

ja y-koordinaatit

$$\frac{\ell}{d}(r_y - p_y) \mp \frac{h}{d}(r_x - p_x) + p_y.$$

Kaavat auki purkamalla nähdään, että ne määrittelevät reaalianalyyttiset funktiot. Juurilausekkeiden sisukset ovat positiivisia, jos ja vain jos ympyröillä on kaksi leikkauspistettä. □

Päätulos

Todistamme tässä luvussa artikkelin päätuloksen. Idea on siis se, että meillä on ajassa liikkuvia pisteitä, joihin teemme harppi- ja viivoitinkonstruktion. Koska pisteet, joihin konstruktio tehdään, liikkuvat ajassa, myös konstruktio liikkuu ajassa. Kuitenkin kaikkina hetkinä konstruktio on tehty samalla tavalla. Sen jälkeen todistamme, että kaikki konstruoidut pisteet ja niistä reaalianalyyttisillä kaavoilla johdetut numeeriset arvot varioivat reaalianalyyttisesti aikaparametrin suhteen. Erityisesti, jos joku numeerinen arvo pysyy vakiona lyhyenkin aikavälin, se säilyy vakiona koko tarkastelujakson.

Lemma 9. *Olkoon S suora, p piste suoralla ja q suoran suuntainen vektori. Nyt $S = \{p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$, ja piste $p+tq$ varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen käyden läpi koko suoran.*

Todistus: $p + tq$:n x-koordinaatti on $p_x + tq_x$, eli reaalianalyyttinen, ja $p + tq$:n y-koordinaatti on $p_y + tq_y$, eli reaalianalyyttinen. □

Lemma 10. *Olkoon S ympyrä, jonka keskipiste on p ja säde r. Tällöin voidaan määritellä piste q ympyrän kehältä, joka varioi parametrin t suhteen reaalianalyyttisesti ja käy läpi koko ympyrän*

Todistus: Selvästi $q_x = p_x + r\cos(t)$ ja $q_y = p_y + r\sin(t)$ toimii. □

Määritelmä 11. *Olkoot p_i pisteitä tasossa ja S suora tai ympyrä tasossa. Olkoon p piste suoralla tai ympyrällä S, p varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. (Tällainen on olemassa kahden edellisen lemman perusteella.) Olkoon K harppi- ja viivoitinkonstruktio pisteistä $p, (p_i)_i$. Huomaa, että väliä, jolla t on määritelty, saatetaan joutua rajoittamaan, että suorille saataisiin varmasti leikkauspisteet, suorille ja ympyröille kaksi leikkauspistettä ja ympyröille kaksi leikkauspistettä, silloin kun ko. leikkauspisteiden halutaan kuuluvan konstruktioon. Rajoituksia t:hen voidaan joutua tekemään myös siksi, että halutut suorat ja ympyrät olisivat varmasti määriteltyjä.*

Tällöin sanomme, että K on varioiva systeemi.

Olkoon K varioiva systeemi, ja $p, (p_i)_i, t$ kuten varioivan systeemin määritelmässä.

Teoreema 12. *Jokainen K:n konstruktioon otettu piste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Piste p varioi oletuksena reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen, ja jokainen p_i on vakiofunktio parametrin t suhteen, ja vakiofunktiona reaalianalyyttinen. Väite seuraa edellisen luvun lauseista induktiivisesti, kun induktio tehdään samassa järjestyksessä kuin K:n konstruktio. □

Huomautus 13. *K:n määritelmässä on vain yksi suoraan t:n mukaan varioiva piste p. Loppujen varioivien pisteiden variointi seuraa siitä, että ne on saatu harppi- ja viivoitinkonstruktiolla p:stä.*

Useimmissa tapauksissa tämä riittää, mutta rajoitus on epäolennainen: Näitä suoraan varioivia pisteitä voi olla useampikin, kunhan ne varioivat reaalianalyyttisesti saman parametrin t suhteen, ja todistus on tässä tapauksessa ihan sama.

Korollaari 14. *Olkoon q, r kaksi pistettä K:ssa. Tällöin niiden etäisyyden neliö varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Etäisyyden neliö saadaan reaalianalyyttisellä kaavalla $(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2$. □

Korollaari 15. *Olkoon q, r kaksi pistettä K:ssa. Tällöin niiden etäisyys varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen sillä oletuksella, että variointivälillä $p \neq q$.*

Todistus: Etäisyys saadaan kaavalla

$$\sqrt{(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2},$$

joka on reaalianalyyttinen, jos $p \neq q$ variointivälillä. □

Korollaari 16. *Olkoon q, r, s kolme pistettä K:ssa, $q \neq r, s$ koko ajan. Tällöin pisteiden r, q määräämän suoran ja pisteiden s, q määräämän suoran välinen kulma varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen olettaen, että suorat eivät ole yhdensuuntaisia.*

Todistus: Olkoon v vektori, jonka alkupiste on q ja loppupiste r, ja v':n alkupiste vastaavasti q ja loppupiste s. Nyt $v \cdot v' = |v||v'|\cos\alpha$, missä α on kyseinen suorien välinen kulma.

Muokkaamalla

$$\alpha = \arccos\Big(\frac{v \cdot v'}{|v||v'|}\Big)$$

ja purkamalla pistetulojen ja vektorien pituuksien kaavat auki nähdään, että α:lle tulee reaalianalyyttinen kaava. Toinen suorien välinen kulma on $180° - \alpha$, eli sekin on reaalianalyyttinen. □

Korollaari 17. *Olkoon p, q, r pisteitä K:ssa, $p \neq q, r$. Olkoon v vektori, jonka alkupiste on p ja loppupiste q, ja v' vastaavasti p:lle ja r:lle. Olkoon α vektorien v, v' välinen etumerkillinen kulma välillä $]-180°, 180°[$. Tällöin α varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Kun $\alpha \in]0°, 180°[$, se varioi reaalianalyyttisesti edellisen korollaarin perusteella.

Oletetaan, että $\alpha \in]-180°, 0°[$. Jos nyt β on v:n ja v':n määräämien suorien välinen kulma, se edellisen lemman perusteella varioi reaalianalyyttisesti. Nyt $\alpha = -\beta$, eli α varioi reaalianalyyttisesti.

Olkoon nyt $\alpha \in]-90°, 90°[$, ja $\bar{k}$ tasoa vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Nyt

$$\bar{k} \sin \alpha = \frac{v \times v'}{|v||v'|}.$$

Purkamalla oikean puolen kaavat auki nähdään, että $\sin\alpha$:lle saadaan reaalianalyyttinen kaava ϕ, ja siis $\alpha = \arcsin \phi$ varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. Nyt korollaari seuraa Teoreeman 3 ”Lisäksi”-kohdasta. □

Huomautus 18. *Samaan tapaan voidaan todistaa, että vektorien v ja v' välinen kulma varioi reaalianalyyttisesti silloin, kun sen ajatellaan olevan välillä $]0°, 360°[$.*

Korollaari 19. *Seuraavat pätevät:*

- *Olkoon ϕ, ψ reaalianalyyttisiä kaavoja, joissa esiintyy muuttujina K:n pisteiden x- ja y-koordinaatteja. Jos on olemassa avoin väli V siten, että $\phi = \psi$, kun t on välillä V, yhtälö $\phi = \psi$ pätee koko t:n määrittelyvälillä.*
- *Olkoon ϕ, ψ kaksi realianalyyttistä kaavaa, joissa esiintyy muuttujina K:n etäisyyksien neliöitä, etäisyyksiä ja kulmia. Jos on olemassa avoin väli V, jolle $\phi = \psi$, kun t on välillä V, yhtälö $\phi = \psi$ pätee koko t:n määrittelyvälillä.*
- *Olkoon ϕ reaalianalyyttinen kaava, jossa esiintyy muuttujina K:n etäisyyksien neliöitä, etäisyyksiä ja kulmia. Jos on olemassa avoin väli V siten, että ϕ on vakio, kun t on välillä V, kaava ϕ on vakio koko t:n määrittelyvälillä.*

Todistus: Todistetaan ensimmäinen väite. Selvästi ϕ ja ψ varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. Nyt väite seuraa Teoreemasta 5.

Keskimmäinen väite on ensimmäisen erikoistapaus, joten se pätee myös.

Viimeinen väite seuraa keskimmäisestä, koska vakiofunktio on reaalianalyyttinen. □

Korollaari 20. *Olkoon q, r kaksi (eri tavalla konstruoitua) pistettä K:ssa. Jos on olemassa avoin väli V siten, että $q = r$, kun $t \in V$, pätee $q = r$ koko t:n määrittelyvälillä.*

Todistus: $q = r$, jos ja vain jos q:n ja r:n etäisyyden neliö on nolla. Niinpä väite seuraa edellisestä korollaarista. □

Korollaari 21. *Olkoon S', S'' kaksi suoraa K:ssa. Jos S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia, kun parametri t on jollain välillä V, niin S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia kaikilla parametrin t arvoilla.*

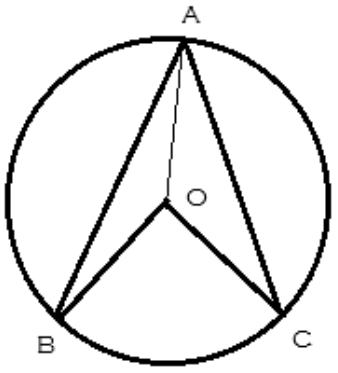
Todistus: Lisätään K:hon suora L, joka on kohtisuorassa S':ää vastaan. Nyt S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia, jos ja vain jos L on kohtisuorassa S'':ää vastaan. Siis väite seuraa Korollaarista 19. □

Huomautus 22. *Korollaarien 14-21 tapaisia korollaareja saa todistettua lisääkin. Kattavan listan tekeminen niistä on mahdotonta, joten jatko jätetään lukijan mielikuvituksen varaan.*

Esimerkkejä

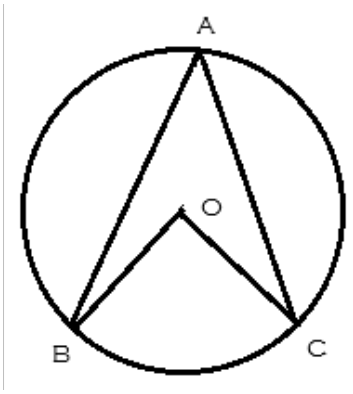
Seuraavaksi tutkimme, kuinka teoriaamme voi soveltaa. Käymme siis läpi geometrian tuloksia, joiden todistuksissa on tapaustarkasteluja. Teemme yhden tapauksen perinteisellä tavalla ja selitämme, kuinka teoriamme hoitaa muut tapaukset. Vaikka selitykset ovat sanamääräisesti pitkiä, ideat, jotka niissä selitetään, ovat yksinkertaisia.

Esimerkki 1. *Palataan johdannon tapaukseen. Oletetaan, että Kuvassa 3 $\angle BOC < 180°$.*



Kuva 3: Kehäkulmalause.

Kun B:ta, C:tä ja ympyrää pidetään paikallaan, ja A:ta liikutetaan hiukan ympyrän kehää pitkin, johdannon konstruktio on mahdollinen, ja $\angle BAC = \angle BOC/2$. Olkoon nyt K kuten alemmassa Kuvassa 4.



Kuva 4: Kehäkulmalauseen todistus.

Edelleen B, C ja ympyrä ovat kiinteitä, ja A liikkuu kehää pitkin. Koska $\angle BAC$ saa vakioarvon $\angle BOC/2$ pienellä avoimella välillä, Korollaarin 19 perusteella $\angle BAC$ saa vakioarvon $\angle BOC/2$ koko ylemmällä ympyränkehällä B:stä C:hen. (Huomaa, että A ei kuitenkaan voi hypätä pisteiden B tai C yli, koska näiden pisteiden kohdalla kulma BAC ei ole määritelty.)

Esimerkki 2. *Olkoon ABC kolmio ja S sen ympäri piirretty ympyrä. Olkoon $a = BC$ sivu. Halutaan todistaa $a/\sin(A) = 2R$, missä R on ympyrän S säde, ja O keskipiste.*

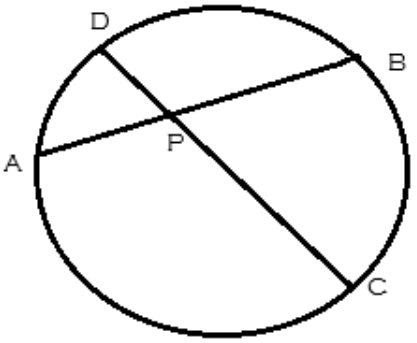
Oletetaan ensin, että a ei ole lävistäjä, ja A sijaitsee pisteiden B, C erottamalla suuremmalla kaarella. Nyt kehäkulmalauseen nojalla $\angle A = (1/2)\angle BOC$, joten $a/2 = R\sin A$, joten $a/\sin(A) = 2R$ pätee aina, kun A sijaitsee suuremmalla kaarella.

Olkoon sitten ABC annettu kolmio, ja S, R kuten edellä. Olkoon nyt C' lähellä B:tä, niin, että A sijaitsee BC':n erottamalla suuremmalla kaarella, ja C', C sijaitsevat samalla AB:n erottamalla kaarella. Olkoon $a' = BC'$ jana. Nyt C':a voidaan liikuttaa edellisen kappaleen nojalla hiukan niin, että $a'/\sin(\angle(C'AB)) = 2R$ pätee koko ajan. Liikutetaan C' ympyrän kaarta pitkin pisteeksi C niin, että C' ei mene A:n tai B:n yli. Koska $a'/\sin(\angle C'AB)$ varioi reaalianalyyttisesti, se säilyy vakiona $2R$. Kun $C' = C$, saadaan väite.

Esimerkki 3. *Jatketaan vielä kehäkulmalausetta. Jos A on B:n ja C:n rajoittamalla lyhyellä kaarella, kehäkulmalause pätee edelleen, kun kulman BOC ajatellaan olevan yli 180 astetta. Tämän tapauksen käsittelemiseksi ajatellaan kulma BOC Huomautuksen 18 mukaisesti välille $]0°, 360°[$.*

Olkoon A, B, C mielivaltaiset kolme pistettä ympyrän S kehällä. Valitaan C' läheltä B:tä niin, että A on B:n ja C':n rajoittamalla pidemmällä kaarella, ja C, C' ovat samalla A:n ja B:n rajoittamalla kaarella. Edellä todistetun perusteella $2\angle BAC' = \angle BOC'$, kun C':a liikutetaan hiukan, joten $2\angle BAC' = \angle BOC'$ pätee myös, kun C' liikutetaan C:ksi, mikä todistaa kehäkulmalauseen täyden tapauksen.

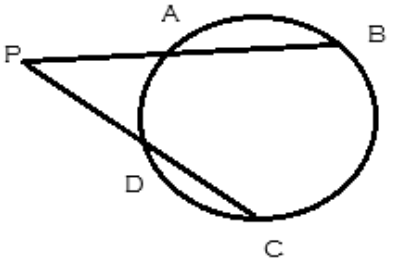
Esimerkki 4. *Meillä on Kuvan 5 tapaus, ja halutaan todistaa $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.*



Kuva 5: Pisteen potenssi ympyrän suhteen.

Kulmat ADC ja ABC ovat janan AC kehäkulmina yhtä suuria. Siis kolmiot ADP ja CBP ovat yhdenmuotoisia, mistä saadaan $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{PB}$, mistä väite seuraa.

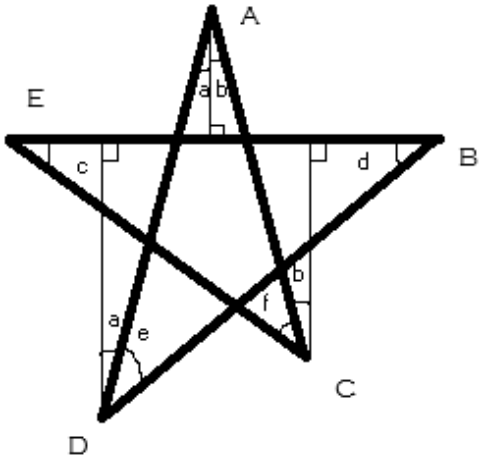
Oletetaan sitten, että ollaan Kuvan 6 tapauksessa.



Kuva 6: Pisteen potenssi, kun piste on ympyrän ulkopuolella.

Piirretään pisteestä P jana j ympyrän sisälle niin, että se kulkee janojen PB ja PC välissä. Olkoon alussa $P' = P$ ja liikutetaan piste P' janaa j pitkin ympyrän sisään. Olkoon A' ja D' suorien $P'B$ ja $P'C$ ja ympyrän leikkauspisteet. Kun P' on ympyrän sisässä, pätee edellä todistetun perusteella $(A'P')^2 \cdot (BP')^2 = (CP')^2 \cdot (D'P')^2$. Siis Korollaarin 19 nojalla $AP^2 \cdot BP^2 = CP^2 \cdot DP^2$, mistä seuraa $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. (Huomaa, että konstruktiossa pisteiden etäisyydet käyvät nollan kautta, joten pitää käyttää etäisyyksien neliöitä.)

Esimerkki 5. *Meillä on vino pentagrammi eli viisisakarainen tähti. Se koostuu viidestä janasta, mutta kaikki janat eivät ole yhtä pitkiä, eivätkä kaikki sakaroiden kärjissä olevat kulmat yhtä suuria. Todistettava, että sakaroiden kärjissä olevien kulmien summa on kuitenkin täsmälleen 180 astetta.*



Kuva 7: Vino pentagrammi.

Jos olemme Kuvan 7 tapauksessa, todistus on selvä. Suorakulmaisista kolmioista saadaan $f + b + c = 90°$ *ja* $a + e + d = 90°$*. Laskemalla nämä yhteen saadaan haluttu tulos* $a + b + c + d + e + f = 180°$*.*

Kuitenkin, jos pentagrammi on riittävän vino, a *voi olla kärjessä* A *kulman* b *sisällä tai kulma* b *kärjessä* C *kulman* f *sisällä, joten konstruktio ei toimi yleisesti.*

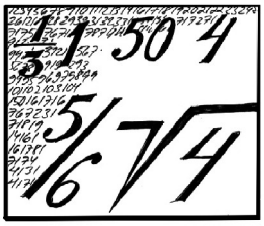
Olkoon nyt $ABCDE$ *mielivaltainen vino pentagrammi. Oletetaan, että sivu* BE *on vaakasuorassa ja kärki* A *sen yläpuolella. Asetetaan kuvan päälle säännöllinen pentagrammi* $A'B'C'D'E'$*, jolle* $A' = A$ *ja suorat* BE *ja* $B'E'$ *yhtyvät. Olkoon kaikilla* $X = A, B, C, D, E$ *symboli* j_X *jana* $X'X$*, ja olkoon sillä piste* p_X*, joka liikkuu tasaisella nopeudella pisteestä* X' *pisteeseen* X*, kun* t *liikkuu* 0*:sta* 1*:een. (Katso Huomautus 13.)*

Ajatellaan kaikissa kärjissä olevia kulmia etumerkillisinä (Korollaari 17), ja alussa ja lopussa ne ovat positiivisia. Nyt kulmien summa säilyy $180°$*:ssa, kun* t *liikkuu nollan lähellä hiukan. Siis Korollaarin 19 mukaan kulmien summa on* $180°$ *myös silloin, kun* $t = 1$*, mikä antaa todella vinon pentagrammin tapauksen.*

Lopuksi

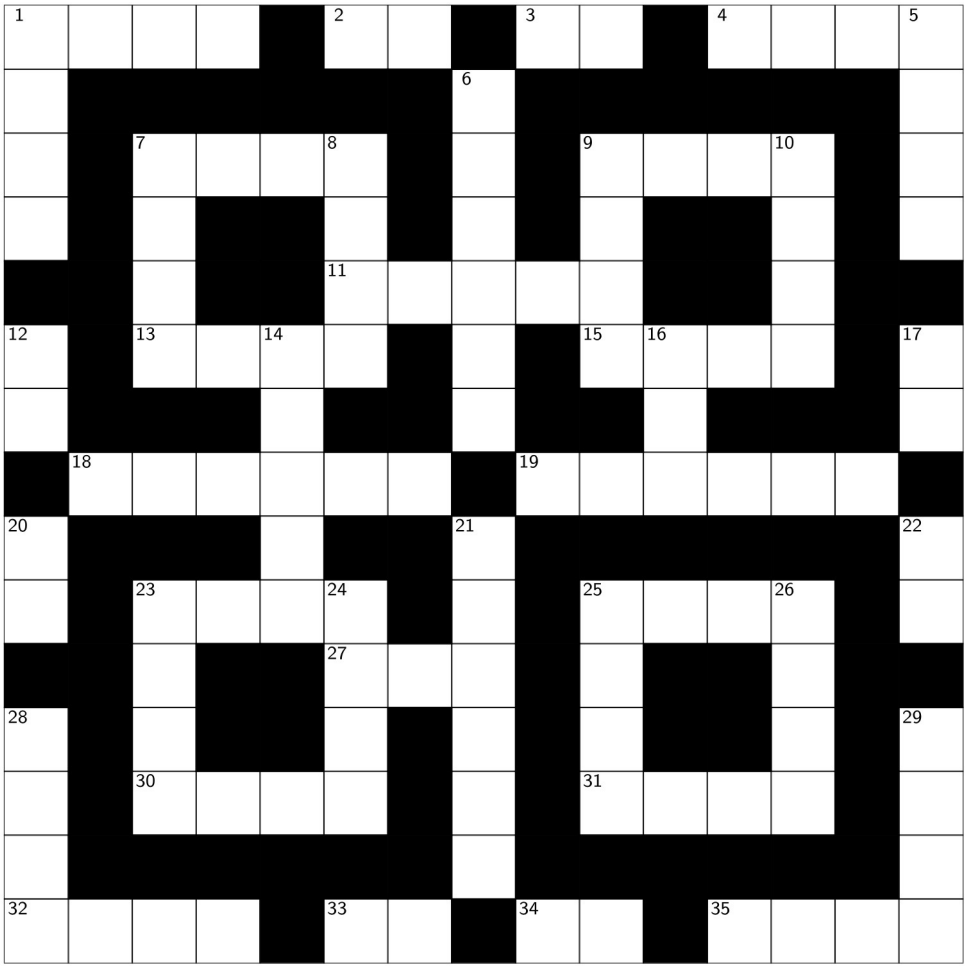
Olen joskus määritellyt matemaatikon henkilöksi, joka on valmis todistamaan kaksi tuntia teoreemaa välttääkseen tunnin laskemisen. Nyt minusta tuntuu siltä, että olen mennyt tästä vielä askeleen pidemmälle: Olen kehittänyt päivän yleistä teoriaa välttääkseni simppeleiden geometristen rutiinitodistusten kirjoittamisen.

Kun matemaatikkoa laiskottaa, se johtaa vaan entistä suurempaan työmäärään.



Lukuristikko

Petri Laarne
Tutkijatohtori, Helsingin yliopisto
www.nollakohta.fi



Sanaristikoista on tullut somehitti, vaan oletko kuullut lukuristikosta? Nyt kyseessä ei ole sudoku tai kakuro, vaan ihan tuttu vihjeristikko, jossa 0–9 vain korvaavat A–Ö:n. Brittiläisen *Chalkdust Magazinen* ristikot lienevät luokkansa tunnetuimpia ja vaikeimpia. Tämän tapauksen ratkaisemiseen ei sentään tarvita ohjelmointia, mutta laskimesta voi olla apua ja itselle uusiin termeihin kannattaa tutustua netistä.

- Täytä ristikko numeroilla 0–9 vihjeiden mukaisesti.
- Luvut luetaan vasemmalta oikealle tai ylhäältä alas.
- Mikään luku ei ala nollalla.
- Luvut ovat kokonaislukuja ja kymmenjärjestelmässä ellei toisin mainita.
- Osa vihjeistä viittaa toisiin vihjeisiin; esim. **25V** tarkoittaa ratkaisua, joka alkaa ruudusta ^{25} vaakaan.
- Koko ristikkoon on täsmälleen yksi ratkaisu.
- Ratkaisun löydät tämän lehden sivulta **TOIMITUS HUOMIO**.

Vaakaan

1 Kakkosen potenssi.

2 Kolmosen potenssi.

3 $3 \cdot$ **2V**.

4 Kakkosen potenssi.

7 Ensimmäinen neljän numeron toisto Neperin luvun e desimaaleissa.

9 Desimaaliluku 11 esitettynä binäärinä.

11 Kokonaisluvun kertoma.

13 Peräkkäiset numerot muodostavat geometrisen jonon.

15 $11 \cdot$ **16P**.

18 Sekuntien lukumäärä tavallisessa viikossa.

19 Luvun $1\,000\,000 \cdot (\pi - 3)$ kokonaisosa.

23 Numeroiden summa on 16 ja tulo 144.

25 Peräkkäisten numeroiden erotus on ± 1.

27 Kokonaisluvun kertoma.

30 Lukuarvoltaan pienin **23P**:n ehdot täyttävä PIN-koodi.

31 ($2 \cdot$ **25V**) takaperin.

32 $3 \cdot$ **28P**.

33 Fibonaccin luku, joka on pienempi kuin **34V**.

34 Fibonaccin luku, joka on suurempi kuin **33V**.

35 $1 + 2 + \cdots + 60$.

Pystyyn

1 Kolmosen potenssi, joka ei ole **5P**.

5 Kolmosen potenssi, joka ei ole **1P**.

6 Peräkkäiset numerot muodostavat aritmeettisen jonon.

7 Luvun $1000 \cdot \varphi$ kokonaisosa, missä φ on kultaisen leikkauksen suhdeluku.

8 **13V** numerot aidosti eri järjestyksessä.

9 Alkuluku esitettynä binäärinä.

10 Peräkkäiset numerot muodostavat aritmeettisen ja geometrisen jonon.

12 **34V** − **33V**.

14 Kukin numero ensimmäisen jälkeen saadaan seuraavalla säännöllä: Kerro edellinen numero kahdella. Jos tulos on yli 10, vähennä 10.

16 Pienin kolminumeroinen alkuluku.

17 **33V** + **34V**.

20 **34V**:n numeroiden summa.

21 **6P** − (**6P** takaperin).

22 (**33V** takaperin) − **33V**.

23 Nelinumeroiden PIN-koodien, jotka eivät sisällä nollaa, lukumäärä.

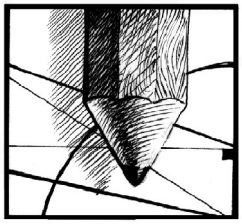
24 (kaksi viimeistä numeroa) = 3·(kaksi ensimmäistä numeroa).

25 Kukin numero on **25V**:n vastaavan numeron neliö.

26 1111 · (**25V**:n toiseksi suurin numero).

28 Numeroiden tulo on 630.

29 $1 + 2 + \cdots + 100$.



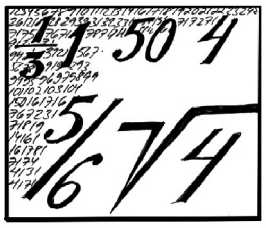
Satu suorakulmaisesta kolmiosta

Riku Räihä

Olipa kerran suorakulmainen kolmio, jossa oli hypotenuusa ja kaksi kateettia, kuten kaikissa suorakulmaisissa kolmioissa on. Hypotenuusa oli pitkä ja komea kaveri, jolla lisäksi oli ikäänkuin aatelisnimi. Kateettien aika kului paljolti hypotenuusaa kadehtiessa ja häntä selän takana haukkuessa.

Mutta kun heidän asennoitumisensa oli noin negatiivinen, jäi heiltä huomaamatta kaikkein tärkein asia: Se, mikä tekee suorakulmaisista kolmioista merkittäviä, ei ole hypotenuusa! Juuri pienten, pönäköiden kateettien yhteistyö on saanut aikaan kaiken merkittävän, mitä suorakulmaiset kolmiot ovat saavuttaneet. Kun kateetit ovat suorassa 90 asteen kulmassa keskenään, niin niiden avulla on laskettu Auringon etäisyys maasta jo 2300 vuotta sitten! Ne ovat olleet merkittäviä maanmittauksessa, merenkulussa, arkkitehtuurissa, avaruustutkimuksessa ja viimeksi jopa Osama bin Ladenin kiinniottamisessa!

Hypotenuusa on vain eräänlainen koriste. Kuin merenneidon kuva entisajan laivojen keuloissa.



Metsästä rationaalikertoimisiin asymptootteihin

Timo Salminen
lehtori, Oulunkylän yhteiskoulu, eläkkeellä
trisalminen@hotmail.com

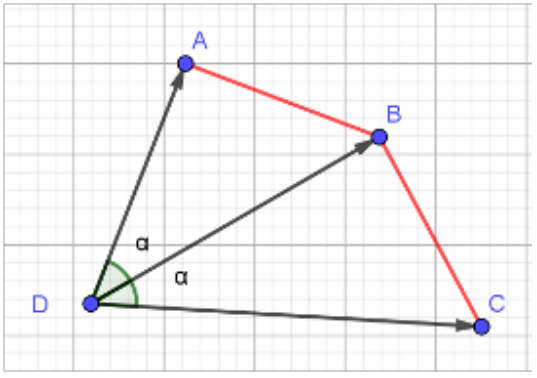
Metsässä

Kävin jokin aika sitten metsässä patikoimassa. Seepra ei pääse raidoistaan, mutta miten käy eläköityneelle matematiikan opettajalle? Malttaako hän luopua matematiikasta ja keskittyä johonkin elämänläheisempään? – Edes metsässä? Vaikeaa tuntuu välillä olevan.

Kävellessäni katseeni kiinnittyi kolmeen puuhun, jotka olivat muutamien metrien päässä toisistaan. Jostain syystä päähäni pälkähti kysymys siitä, minkälainen reitti pitäisi kulkea, jotta puiden runkojen välimatkat toisistaan tältä reitiltä katsottuna näkyisivät aina samassa kulmassa. Melko pähkähullua pohdintaa, mutta minkäs seeprakaan raidoilleen mahtaa.

Palatessani metsästä ajattelin tutkailla, mitä jokin sopiva ohjelmisto tilanteesta piirtäisi. Koska olin tutustunut työssäni GeoGebraan, päätin kokeilla sitä ja typistin ongelman kaksiulotteiseen tasoon.

Tasossa on kolme pistettä A, B ja C. Etsittävä kaikki tason pisteet, joista annettujen pisteiden väliset janat AB ja BC näkyvät samassa kulmassa. (Tilanne ei tietenkään muutu, vaikka tarkastelisi janoja AB ja AC tai BC ja AC.)



Ongelma ja ratkaisu.

Ratkaisu:

Olkoon pisteiden koordinaatit $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ ja $C = (e, f)$ sekä mielivaltainen tason piste $D = (x, y)$. Vaaditaan, että $\angle ADB = \angle CDB$.

Vektorien $\overrightarrow{DA}$ ja $\overrightarrow{DB}$ sekä vektorien $\overrightarrow{DB}$ ja $\overrightarrow{DC}$ välinen kulma on sama, joten myös niiden kosinit ovat samoja. Koska

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|},$$

on

$$\frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{DB}\right|} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|},$$

ja jana näkyy tason pisteestä aina alle 180° kulmassa. Jätän tarkastelusta muutamia erikoistapauksia pois.

Esim. jos janoja katsotaan niiden päätepisteistä, on tarkasteltava erikseen tapausta, että pisteet ovat samalla suoralla tai eivät ole. Lisäksi mukaan tulee määrittelyongelmia, jos janaa katsotaan jostakin janan pisteestä jne.

Yhtälö voidaan kertoa $\left|\overrightarrow{DB}\right|$:llä, ja saadaan

$$\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|}=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DC}\right|}.$$

Tässä

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left[(a-x)\vec{i}+(b-y)\vec{j}\right]\cdot\left[(c-x)\vec{i}+(d-y)\vec{j}\right]$$

ja

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left[(c-x)\vec{i}+(d-y)\vec{j}\right]\cdot\left[(e-x)\vec{i}+(f-y)\vec{j}\right]$$

sekä

$$\left|\overrightarrow{DA}\right|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

ja

$$\left|\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{(e-x)^2+(f-y)^2}.$$

Yhtälö muuttuu muotoon

$$\frac{(a-x)(c-x)+(b-y)(d-y)}{(c-x)(e-x)+(d-y)(f-y)}=\frac{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}{\sqrt{(e-x)^2+(f-y)^2}}.$$

Neliöjuurista päästään eroon korottamalla yhtälö puolittain potenssiin kaksi, kunhan huomioidaan, että myös vasen puoli on ei-negatiivinen. Tämä edellyttää, että vasemman puolen osamäärässä osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkiset ts. vaaditaan, että osoittajan ja nimittäjän tulo on ≥ 0.

Yllätykseksi tämän ehdon näytti voivan asettaa GeoGebran implisiittisen käyrän piirtoehdoksi. Ilman neliöönkorotusehtoa mukaan tulevat myös suplementtikulmat. Lisäksi mukaan tulee aina suora AC, jonka pisteistä janat näkyvät joko samassa kulmassa tai toistensa suplementtikulmassa. Jos piirtämiseen käyttää GeoGebraa, niin kulmat on asetuksissa syytä rajata välille 0°–180°.

Jos haluaa olla erityisen täsmällinen, täytyy ottaa huomioon muitakin määrittelyehtoja (nimittäjien nollakohdat), mutta nämä ovat erikoistapauksia, jotka voi tarkastella erikseen. Esim. jos $D=(x,y)$ on sama kuin $C=(e,f)$, on yo. yhtälö määrittelemätön, ja ollaan tilanteessa, josta oli maininta aiemmin. Muitakin rajoitteita varmaan on, mutta antaa niiden nyt olla.

Korotuksen jälkeen yhtälö on

$$\left[\frac{(a-x)(c-x)+(b-y)(d-y)}{(c-x)(e-x)+(d-y)(f-y)}\right]^2=\frac{(a-x)^2+(b-y)^2}{(e-x)^2+(f-y)^2}.$$

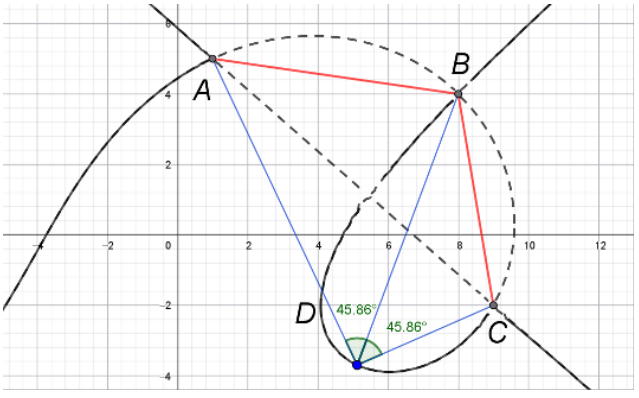
GeoGebrassa käyriä voi tarkastella parametrisoimalla pisteiden koordinaatit, jolloin pisteiden sijaintia voi säätää liukusäätimillä tai liikuttamalla pisteitä piirtoalueella.

Etukäteen en olisi arvannut, minkälaisia reittejä pitäisi (tasaisessa) metsikössä kulkea, jotta kolme puun runkoa näkyisi aina samassa kulmassa. – No, ehkä metsässä kannattaakin keskittyä ihan muihin seikkoihin.

Loppupäätelmänä voi sanoa, että ihan kelvollisesti GeoGebra käyriä piirtää. Ongelmakohdat osoittavat sen, mikä laskentaohjelmissa taitaa yleensäkin olla ongelmana, ts. rajallinen laskentatarkkuus, mikä johtaa erilaisten ”singulariteettien” lähellä oleviin ongelmiin. Käyristä jää tällöin osa näkymättömiin.

Oikeastaan tässä olikin kaikki, ja sain metsäkävelyllä syntyneelle kysymykselleni vastauksen: Jaaha, että tuollaisia reittejä pitkin siis pitäisi kulkea. Mitään sen kummempaa jotain yleistä ominaisuutta käyristä ei tunnu voitavan sanoa, ellei sitten rajoita jollain tavalla pisteiden sijaintia toisiinsa nähden.

Kuvassa on esimerkki käyrästä. Siinä suplementtikulmassa näkyvä käyrän osa on merkitty katkoviivalla.



Lisää havaintoja

Joskus matemaattinen ongelma poikii lisää kysymyksiä ja niin kävi tässäkin. Jonkin aikaa GeoGebralla leikittyäni tein pari havaintoa.

1) Käyrillä näytti aina olevan jonkinlainen asymptootti (elleivät pisteet A, B ja C ole samalla suoralla (mutta eivät niin, että B on janan AC keskipiste), jolloin käyrä on ympyrä).

2) Jos otetaan suplementtikulmat mukaan, käyrät näyttivät aina muodostavan jonkinlaisen suljetun silmukan.

Kahden muuttujan algebrallisten tasokäyrien teoria ei ollut minulle entuudestaan tuttu, joten asymptoottien tutkimiseen piti saada jostain tietoa. Selasin netin sivustoja, joista selvisi, että jos näitä haluaa tutkia, ne on käytännössä hyvä saattaa polynomimuotoon, ainakin korkeimpien asteiden osalta. Geometrisen havainnon perusteella voisi yrittää perustella asymptootin olemassaoloa ehkä helpommin, mutta minua viehätti nimenomaan mahdollinen algebrallinen ratkaisu ja olihan siinä kiinnostava, ennestään tuntematon aihe koluttavana.

Ryhdyin toimeen ja kun sitten päädyin tulokseen, että polynomista katoavat 6. ja 5. asteen termit, niin se houkutti jatkamaan. Kun jäljellä on kuitenkin vain neljännen asteen käyrä, siitä voisi ehkä sanoa jotain yleisempääkin.

Työ ei kuitenkaan juuri helpottunut, koska jäljelle jääneidenkin termien kertoimien laskeminen näytti olevan melko työlästä. Päätin aluksi kokeilla joillakin luvuilla, miten asymptootin yhtälön voisi määrittää ja kun menetelmä tuli tätä kautta tutuksi, en voinut välttää etenemästä jonkinlaiseen yleistämiseen suunnattoman työmäärän uhallakin.

Käytännön menetelmä on, että sijoitetaan korkeimman asteen termeihin $x = 1$ ja $y = k$, jolloin korkeimman asteen termien muodostaman (homogeenisen) polynomin nollakohdat antavat asymptootin kulmakertoimen k. Vakiotermi saadaan sitten suoraan eräästä kaavasta, josta lisää myöhemmin. Tämän kaavan käyttöön tarvitaan lisäksi toiseksi korkeimman asteen termit.

Yleistysyritys

Siispä aakkoset a, b, c, d, e ja f kehiin ja töihin. Menetelmää varten tarvitaan käyrän 4. ja 3. asteen termit.

Tarkoitukseni oli siis tehdä aivan järjettömän aikasyöppöä työtä eli ratkaista asymptoottien yhtälöt yleisesti selvittämällä tasokäyräpolynomin 4. ja 3. asteen termit (erityisesti niiden kertoimet, kun lähtökohtana on pisteiden A, B ja C koordinaatit) ja sitten katsoa, voiko ylipäätään ratkaista saatu 4. asteen polynomiyhtälö, jonka ratkaisuna saisi asymptootin kulmakertoimen.

Avasin siis todellakin koko karmeuden ja laskin kertoimet eriasteisille termeille (käyttäisin sanaa 'sievensin', mutta koska tulos on kaikkea muuta kuin sievä, totean vain, että 'laskin'). Kertoimet voidaan järjestää monella tavalla ja varmaan saadaan lyhyempiäkin esityksiä esim. yhteisten tekijöiden erottamisilla jne.

Neljännen asteen termien kertoimet:

x^4: $f^2 - b^2 + 2bd - 2df$

x^3y: $2(cf + de + ab - ad - bc - ef)$

x^2y^2: $e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac$

xy^3: $2(cf + de + ab - ad - bc - ef)$

y^4: $e^2 - a^2 + 2ac - 2ce$

Kolmannen asteen termien kertoimet:

x^3: $2b^2(c+e) - 2f^2(a+c) + 4adf - 4bde + 2cdf - 2abd + 2def - 2bcd$

x^2y: $-4acf - 2bf^2 - 2de^2 + 2cda - 2cde + 4cbe - 4abe - 2bd^2 - 2abc - 2c^2f + 2da^2 + 2fb^2 + 4efa + 2d^2f + 2cef + 2c^2b$

xy^2: $-2ae^2 - 2cf^2 - 4bde - 4abf + 4adf - 2cdf - 2abd + 2cdb - 2ac^2 - 2d^2e + 2cb^2 + 2ea^2 + 4efb + 2def + 2c^2e + 2d^2a$

y^3: $-2be^2 - 2de^2 - 4acf - 2abc - 2acd + 2da^2 + 2db^2 + 2fa^2 + 4ceb + 2cde + 2cef - 2b^2d$

Lisään tähän vielä muidenkin termien kertoimet, vaikka niitä ei asymptootin määrittämisessä tarvita. Ne ovat melko epäyhtenäisellä tavalla esitettynä, koska laskin niitä hiukan eri järjestyksessä, enkä sieventänyt kaikkia samalla tavalla.

Toisen asteen termien kertoimet:

x^2: $4ace^2 + 4acf^2 + 2bde^2 + 2bdf^2 + a^2f^2 + c^2f^2 + b^2d^2 + 2abcd - 4cea^2 - 4ceb^2 - 2dfa^2 - 2dfb^2 - c^2b^2 - e^2b^2 - d^2f^2 - 2cdef + 4abde + 4cbde + 4a^2ce - 4cdfa - 4edfa - 4ce^2a$

xy: $2abe^2 - 2bce^2 + 2dae^2 + 2dce^2 + 2abf^2 + 2bcf^2 - 2daf^2 + 2dcf^2 + 4abdf + 2a^2cf + 4ac^2f + 2b^2de + 4bd^2e + 4abce - 2cda^2 - 2dea^2 - 2fea^2 - 2cdb^2 - 2fcb^2 - 2feb^2 - 4defb - 4c^2eb - 4d^2fa - 4cefa$

y^2: $(e^2 + f^2)(2(ac + bd) + (b + d)^2) + (ac + bd)(4(b + d)f + ac + bd) - (a^2 + b^2)(2(ce + df) + (d + f)^2) - (ce + df)(4(d + f)b + ce + df)$

Ensimmäisen asteen termien kertoimet:

x: $-2(a + c)(ac + bd)\left(e^2 + f^2\right) - 2e(ac + bd)^2 + 2(c + e)(ce + df)\left(a^2 + b^2\right) + 2a(ce + df)^2$

y: $-2(b + d)(ac + bd)\left(e^2 + f^2\right) - 2f(ac + bd)^2 + 2(d + f)(ce + df)\left(a^2 + b^2\right) + 2b(ce + df)^2$

Vakiotermi:

$(ac + bd)^2(e^2 + f^2) - (ce + df)^2(a^2 + b^2$

Tarkistuksen vuoksi kirjoitin GeoGebraan polynomimuotoisena tasokäyrän kuvaajan näillä kertoimilla ja

vertasin sitä alkuperäiseen sieventämättömään muotoon, ja kun kuvat näyttivät vastaavan toisiaan, uskon, että laskin kertoimet oikein.

Minulla oli nyt tarvittavat 4. ja 3. asteen kertoimet ja saatoin ryhtyä laskemaan 4. asteen termeistä muodostetun polynomin nollakohtia ja siten saada asymptoottien kulmakertoimet. Neljännen asteen yhtälön ratkaiseminen, kun kertoimina on tuollaista aakkossotkua vaikuttaa toivottomalta hommalta. Jätinkin asian sitten tähän ja ajattelin, että antaa koko homman olla.

Asymptootit rationaalikertoimisia?

Kun kuitenkin olin päässyt niin pitkälle, että GeoGebrassa oli käyrä, sen polynomimuotoinen esitys, ja yleisen menetelmän avulla pystyi GeoGebran CAS-ikkunassa laskemaan asymptoottien kulmakertoimet ja vakiotermit sekä piirtämään asymptootit, päätin kuitenkin jatkaa.

Liikuttamalla pisteiden paikkoja, havaitsin, että asymptoottien kulmakertoimet ja vakiotermit näyttivät aina olevan rationaalilukuja, kun pisteiden koordinaatit olivat rationaalisia. Pohdin, voisiko näin olla aina. Yleisestihän ei voi sanoa, että neljännen asteen rationaalikertoimisen polynomin asymptootit ovat rationaalikertoimisia. Esim. tasokäyrän

$$P(x,y) = -2x^4 - x^2y^2 + y^4 + x = 0$$

asymptootit ovat $y = \pm\sqrt{2}x$.

Mutta jos ne nyt todellakin ovat rationaalisia eli aiemmin mainitun 4. asteen yhtälön ratkaisut ovat rationaalisia, niin onhan siinä ehkä pienen pieni mahdollisuus, että ne voisi saada selville. Pitäisi oikeastaan ”vain” siis osoittaa, että ratkaisu on olemassa, ja se on rationaalinen.

Esitietoni kahden muuttujan polynomeista eivät riitä siihen, että voisin jollain yksinkertaisella menetelmällä osoittaa tätä. Turvauduin siis rumaan ”brute force” -menetelmään eli asymptoottien määrittämiseen pisteiden koordinaattien toimiessa lähtötietona ja katsoa, saisiko tätä kautta kertoimien rationaalisuuden osoitettua. Jatkoin siis kuitenkin siitä, mihin edellä kerroin jääneeni.

Tarkastellaan 4. asteen termejä käyrää esittävässä polynomissa:

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4.$$

Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = k$ ja merkitään polynomi nollaksi (yleinen menetelmä), jolloin saadaan yhtälö

$$Ek^4 + Dk^3 + Ck^2 + Bk + A = 0.$$

Rationaalilukulause sanoo, että jos rationaalilukukertoimisella yhtälöllä on rationaalijuuri, se saadaan vakiotermin ja korkeimman asteen termin tekijöistä. Tässä on kuitenkin ongelmana sana ’jos’. Mitään takeita sille, että yhtälöllä olisi rationaalijuuri, en huomaa, joten tästä lauseesta en keksi olevan hyötyä.

Jatketaan sijoittamalla aiemmin lasketut kertoimet tähän ja saadaan

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)k^4\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)k^3\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)k^2\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)k\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0.\end{aligned}$$

Tilanteen geometriasta ja muutaman käyrän piirtämisen jälkeen tuli mieleen, että asymptootteja ei voi olla useampia kuin kaksi (tai oikeastaan vain yksi ”aito”). Siten tällä neljännen asteen yhtälöllä ei voine olla kuin korkeintaan kaksi reaalista ratkaisua, muiden ollessa imaginaarisia. Kun olin aiemmin laskenut pari numeerista esimerkkiä ja havainnut, että niissä oli yhtenä tekijänä $x^2 + 1$, ajattelin, että olisiko näin aina. Ja kappas, kylläpä vaan, yhtälöllä on aina ratkaisuina $k = \pm i$:

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)(\pm i)^4\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)^3\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)(\pm i)^2\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)\cdot 1\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\mp i)\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)(-1)\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&e^2 - a^2 + 2ac - 2ce - e^2 - f^2 + a^2 + b^2 + 2ce + 2df\\ &\quad - 2db - 2ac + f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$0 = 0$$

Tämä havainto ratkaisi sen, että pääsin ongelman ratkaisussa eteenpäin.

Polynomi

$$Ek^4 + Dk^3 + Ck^2 + Bk + A$$

on siis jaollinen tekijällä

$$(k - i)(k + i) = k^2 + 1.$$

Kertoimista huomataan, että $D = B$. Jaetaan polynomi lausekkeella $k^2 + 1$.

Saadaan hajotelma

$$\begin{aligned}&Ek^4+Bk^3+Ck^2+Bk+A\\&=\left(k^2+1\right)\left(Ek^2+By+(C-E)\right)+A-C+E.\end{aligned}$$

Jaon on mentävä tasan, joten on tietysti oltava $A-C+E=0$.

Tarkistetaan kuitenkin (tarpeettomasti) vielä, että näin todella on:

$$\begin{aligned}&A-C+E\\&\quad=f^2-b^2+2bd-2df\\&\qquad-\left(e^2+f^2-a^2-b^2-2ce-2df+2db+2ac\right)\\&\qquad+\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\\&\quad=f^2-b^2+2bd-2df-e^2-f^2\\&\qquad+a^2+b^2+2ce+2df-2db-2ac+e^2-a^2\\&\qquad+2ac-2ce=0.\end{aligned}$$

Pätee.

Jakojäännös $A-C+E$ on siis nolla, ja voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}&Ek^4+Bk^3+Ck^2+Bk+A\\&\qquad\qquad=\left(k^2+1\right)\left(Ek^2+Bk+(C-E)\right).\end{aligned}$$

Tämän polynomin loput nollakohdat saadaan tekijän $Ek^2+Bk+(C-E)$ nollakohdista. Nämä ovat myös asymptoottien kulmakertoimia

$$k_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4E(C-E)}}{2E}.$$

No niin. Siinä se nyt sitten on: diskriminantti, jonka soisi olevan jonkin rationaaliluvun neliö, jotta siitä ulos tullessaan kehkeytyisi rationaaliluku ja sen myötä kulmakerroinkin olisi rationaalinen.

Tavoite on siis osoittaa diskriminantti rationaaliluvun neliöksi, jolloin yhtälöllä on kaksi (yksi, jos se on $=0$) reaalista ratkaisua. Edellyttäen tietysti, että $E\neq 0$.

$$\begin{aligned}&B^2-4E(C-E)\\&\quad=(2(cf+de+ab-ad-bc-ef))^2\\&\qquad-4\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\\&\quad=4(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\\&\qquad-4\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\\&\quad=4\left[(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\right.\\&\qquad\left.-\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\right].\end{aligned}$$

Tuosta en keksinyt mitään. Päätin avata lausekkeen ja katsoa mitä siitä seuraa. Tiedä vaikka joitain termejä katoaisi ja jotain kiinnostavaa paljastuisi. Vahva oletukseni oli, että lauseke voidaan kirjoittaa neliöksi, joten oli syytä ainakin yrittää.

Lauseke $(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2$ avautuu seuraavan kaavan avulla:

$$\begin{aligned}&(x+y+z+u+v+w)^2\\&\quad=x^2+y^2+z^2+u^2+v^2+w^2\\&\qquad+2xy+2xz+2xu+2xv+2xw\\&\qquad+2yz+2yu+2yv+2yw\\&\qquad+2zu+2zv+2zw+2uv+2uw+2vw.\quad(*)\end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}&(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\\&\quad=(cf)^2+(de)^2+(ab)^2+(ad)^2+(bc)^2+(ef)^2\\&\qquad+2cfde+2cfab-2cfad-2cfbc-2cfef\\&\qquad+2deab-2dead-2debc-2deef\\&\qquad-2abad-2abbc-2abef+2adbc+2adef+2bcef.\end{aligned}$$

Jälkimmäisestä tulosta

$$\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)$$

saadaan lauseke:

$$\begin{aligned}&e^2f^2-e^2b^2-2e^2df+2e^2db\\&\qquad-a^2f^2+a^2b^2+2a^2df-2a^2db\\&\qquad+2acf^2-2acb^2-4acdf+4acdb\\&\qquad-2cef^2+2ceb^2+4cedf-4cedb.\end{aligned}$$

Koko lauseke on sieventämättömänä siten

$$\begin{aligned}&4\left[(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\right.\\&\qquad\left.-\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\right]\\&\quad=4\left[(cf)^2+(de)^2+(ab)^2+(ad)^2+(bc)^2+(ef)^2\right.\\&\qquad+2cfde+2cfab-2cfad-2cfbc-2cfef\\&\qquad+2deab-2dead-2debc-2deef\\&\qquad-2abad-2abbc-2abef+2adbc+2adef+2bcef\\&\qquad-\left(e^2f^2-e^2b^2-2e^2df+2e^2db\right.\\&\qquad\qquad-a^2f^2+a^2b^2+2a^2df-2a^2db\\&\qquad\qquad+2acf^2-2acb^2-4acdf+4acdb\\&\qquad\qquad\left.\left.-2cef^2+2ceb^2+4cedf-4cedb\right)\right].\end{aligned}$$

(Tuolla on seassa 'dead', ja sopi miettiä, uskaltaako jatkaa. Ties vielä mihin tämä johtaa…)

Sievennetään, ja lauseke hiukan lyhenee:

$$\begin{aligned}&4\left[(cf)^2+(de)^2+(ad)^2+(bc)^2+(eb)^2+(af)^2\right.\\&\qquad-2cfde+2cfab+2cfad-2cfbc\\&\qquad+2deab-2dead+2debc\\&\qquad-2abef-2adbc+2adef+2bcef\\&\qquad\left.-2e^2db-2a^2df-2acf^2-2ceb^2\right].\end{aligned}$$

Lupaava havainto on, että jokaisessa yhteenlaskettavassa on neljän tekijän tulo, osassa ne ovat kaksinkertaisina, ja kun lisäksi mukana on puhtaita neliötermejä, ja vieläpä termien lukumäärä täsmää kuuden yhteenlaskettavan binomin kanssa, se houkuttaa käyttämään aiempaa kaavaa (*) toiseen suuntaan, jos oikein hyvin kävisi.

Järjestetään termit niin, että ”puhtaissa” neliötermeissä olevat tulot ovat tekijöinä kaksinkertaisissa tuloissa, ja kun kaikki vielä järjestetään sopivaan järjestykseen, niin huomataan, että koko litania uppoaa sujuvasti kaavaan (*), kunhan vielä huomioidaan merkit:

$$\begin{aligned}4\,\big[&(cf)^2+(de)^2+(ad)^2+(bc)^2+(eb)^2+(af)^2\\&-2(cf)(de)+2(cf)(ad)-2(cf)(bc)+2(cf)(eb)\\&-2(cf)(af)-2(de)(ad)+2(de)(bc)-2(de)(eb)\\&+2(de)(af)-2(ad)(bc)+2(ad)(eb)-2(ad)(af)\\&-2(bc)(eb)+2(bc)(af)-2(eb)(af)\big]\,.\end{aligned}$$

Merkit saadaan vertaamalla tuloja pareittain, esim. tulon $(cf)(de)$ etumerkkinä on miinus, joten tulontekijät cf ja de ovat erimerkkiset. Vastaavasti tulon $(cf)(ad)$ etumerkki on plus, joten ne ovat samanmerkkiset. Samalla tavalla määrittyvät muutkin merkit.

Lisäksi voidaan valita kuinka päin tahansa, joko cf:n merkiksi valitaan miinus, jolloin de:n merkki on plus, tai toisin päin. Tällä ei ole merkitystä, koska lauseke korotetaan jatkossa neliöön. (Onhan esimerkiksi

$$(x-y-z+u)^2=(-(-x+y+z-u))^2\,.)$$

Valitaan $cf>0$, jolloin saadaan lauseke kirjoitettua neliönä:

$$[2(cf-de+ad-bc+eb-af)]^2\,(\geq 0).$$

Asymptoottien kulmakertoimet voidaan siis laskea alla olevilla kaavoilla, ja samalla voidaan todeta, että jos pisteiden koordinaatit ovat rationaalilukuja, myös asymptoottien kulmakertoimet ovat rationaalisia.

$$\begin{aligned}k_{1,2}=&\frac{-2(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\\&\pm\frac{\sqrt{[2(cf-de+ad-bc+eb-af)]^2}}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{1,2}=&\frac{-2(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\\&\pm\frac{(2(cf-de+ad-bc+eb-af))}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}.\end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned}k_1=&\frac{-(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\&+\frac{cf-de+ad-bc+eb-af}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\=&\frac{-2de-ab+2ad+ef+eb-af}{e^2-a^2+2ac-2ce}\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}k_2=&\frac{-(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\&+\frac{-(cf-de+ad-bc+eb-af)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\=&\frac{-2cf-ab+2bc+ef-eb+af}{e^2-a^2+2ac-2ce}.\end{aligned}$$

Edellytys on mm., että $e\neq a$ ja $e\neq 2c-a$.

Ja siis todellakin kulmakertoimet ovat rationaalilukuja, jos koordinaatit ovat.

Kaavasta saadaan kaksi kulmakerrointa. Toinen näistä kuuluu aidolle asymptoottille, ja toinen suoralle, joka kulkee pisteiden A ja C kautta. Tämä ei siis oikeastaan ole asymptootti sanan varsinaisessa merkityksessä, mutta sekin siis tulee tuosta ”automaattisesti”.

Asymptoottien vakiotermeillekin voidaan johtaa kaava, johon voi suoraan sijoittaa pisteiden koordinaatit. Tämä olisi todella raskas työ, eikä sitä ole tarpeellista tehdä, koska niiden rationaalisuudesta ei ole epäilystä, sillä se seuraa yleisestä menetelmästä, jonka mukaan vakiotermi voidaan laskea lausekkeesta

$$-\frac{\phi_{n-1}(k)}{\phi_n'(k)}.$$

Tässä $\phi_{n-1}(k)$ on toiseksi korkeimman asteen termien muodostaman polynomin arvo laskettuna kulmakertoimen arvolla k, ja $\phi_n^{'}(k)$ on korkeimman asteen termien muodostaman polynomin derivaatta laskettuna arvolla k.

Lopuksi

Se, miksi halusin selvittää asymptoottien kulmakertoimet yo. hankalalla tavalla, ei ollut varsinainen tavoitteeni. Halusin vain selvittää, tuottavatko rationaalipisteet asymptooteille aina rationaaliset kulmakertoimet. Enkä siis keksinyt mitään helpompaa tapaa.

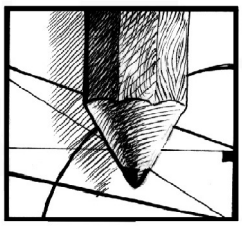
Toive siitä, että löytäisin 4. asteen käyrille joitain yleisiä ominaisuuksia jäi toteutumatta. Sitä varten pitäisi tutkia asiaa enemmän. Yhden ominaisuuden osalta asia jäi auki. Edellä kirjoitin, että käyrä näyttäisi muodostavan suljetun silmukan, jos mukaan otetaan suplementtikulmat. Tätä en lähtenyt selvittämään, koska jos

haluaisi selvittää tätä algebrallisesti, pitäisi ensin ainakin määritellä käsite silmukka. Jo se vaikuttaa hankalalta ja geometrinen lähestyminen voisi ratkaista tämän hyvinkin yksinkertaisesti.

Lause ja sen merkitys matematiikassa:

Jos tasossa olevien kolmen pisteen A, B ja C, joiden koordinaatit ovat rationaalilukuja, väliset janat AB ja BC näkyvät samassa kulmassa (tai sen suplementtikulmassa) käyrältä $P(x, y) = 0$, niin käyrän asymptoottien kertoimet ovat rationaalilukuja.

Lauseella ei ole mitään merkitystä sen enempää matematiikassa kuin missään muuallakaan – ei edes metsässä – ja sen asema matematiikassa on absoluuttisen tyhjänpäiväinen.



Ellipsin näkyminen suorassa kulmassa

Pentti Haukkanen
Tampereen yliopisto

Tämä artikkeli sai alkunsa Markku Halmetojan eräällä keskustelufoorumilla esittämästä kysymyksestä, mistä pisteistä ellipsi

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

näkyy suorassa kulmassa, eli mistä pisteistä ellipsiin piirretyt kaksi tangenttia ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Halmetoja on toki ratkaissut tehtävän itsekin yleisen ellipsin tapauksessa [1].

Tarkasteltava ongelma kuuluu ortoptiseen geometriaan (engl. orthoptic geometry), jossa tutkitaan niiden pisteiden geometrisia paikkoja, joista annettu käyrä tai pinta näkyy suorassa kulmassa. Aiheesta löytyy yleiskatsaus esimerkiksi englanninkielisestä Wikipediasta [2]. Ortoptista geometriaa sovelletaan mm. optiikassa.

Tässä artikkelissa on hyödynnetty tekoälyä ChatGPT 5.2.

Ellipsin perusmuoto

Kirjoitetaan ellipsi standardimuodossa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

josta puolipääakselien pituudet ovat

$$a = 2, \qquad b = 1.$$

Tangentin analyyttinen ehto

Tarkastellaan yleistä ellipsiä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja suoraa

$$y = mx + c.$$

Lemma 1 (Diskriminantin nollaehto tangentille)**.** *Suora $y = mx + c$ on ellipsin tangentti täsmälleen silloin, kun*

$$c^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Todistus. Sijoitetaan $y = mx + c$ ellipsin yhtälöön:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1.$$

Kertomalla puolittain luvulla a^2b^2 saadaan toisen asteen yhtälö muuttujalle x:

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mcx + (a^2c^2 - a^2b^2) = 0.$$

Suora on tangentti, jos ja vain jos tällä yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, eli diskriminantti on nolla:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0.$$

Tämä ehto tulee muotoon

$$4a^4m^2c^2 - 4a^2(b^2 + a^2m^2)(c^2 - b^2) = 0,$$

josta seuraa väite. □

Huomautus (geometrinen tulkinta). Diskriminantin nollaehto tarkoittaa, että suora ja ellipsi leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä. Kahden leikkauspisteen tapauksessa suora olisi sekantti, ja ilman leikkauspisteitä se ei kohtaisi ellipsiä lainkaan. Tangentti on näiden rajatapaus.

Näkyminen suorassa kulmassa

Olkoon $P = (x_0, y_0)$ piste ellipsin ulkopuolella. Tangentti pisteestä P on muotoa $y = mx + c$, missä

$$c = y_0 - mx_0.$$

Kun tämä sijoitetaan Lemman 1 ehtoon, saadaan toisen asteen yhtälö kulmakertoimen m suhteen:

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Sen kaksi ratkaisua m_1, m_2 vastaavat kahta tangenttia pisteestä P.

Kahden suoran välinen kulma on suora täsmälleen silloin, kun

$$m_1m_2 = -1.$$

Lause 1. *Ellipsi*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

näkyy pisteestä $P = (x_0, y_0)$ suorassa kulmassa täsmälleen silloin, kun

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $x_0^2 \neq a^2$. Sijoittamalla $c = y_0 - mx_0$ tangenttiehtoon $c^2 = a^2m^2 + b^2$ saadaan

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Kirjoittamalla auki ja siirtämällä kaikki vasemmalle saadaan

$$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0\, m + (y_0^2 - b^2) = 0.$$

Tämän yhtälön kaksi juurta m_1, m_2 ovat kahden tangentin kulmakertoimet. Vietan kaavojen (ks. huomautus alla) mukaan

$$m_1m_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}.$$

Ehto suoralle kulmalle on $m_1m_2 = -1$, joten

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Tapauksessa $x_0^2 = a^2$ toinen tangentti on pystysuora, ja suoran kulman ehto johtaa samaan tulokseen suoraan. □

Huomautus (Vietan kaavat). Olkoon

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (A \neq 0)$$

ja sen juuret x_1, x_2. Tällöin

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \qquad x_1x_2 = \frac{C}{A}.$$

Kaavat seuraavat tekijöityksestä

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2).$$

Geometrinen tulkinta (johtajaympyrä)

Yhtälö

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

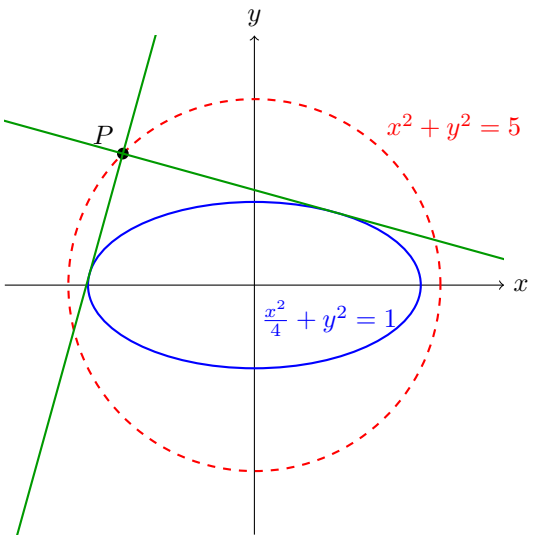
määrittelee ympyrän, jota kutsutaan ellipsin *johtajaympyräksi*. Se on niiden pisteiden geometrinen paikka, joista ellipsiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa.

Sovellus

Tarkastellussa tapauksessa $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$. Siis ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ näkyy suorassa kulmassa täsmälleen niistä pisteistä, jotka sijaitsevat ympyrällä

$$\boxed{x^2 + y^2 = 5}.$$

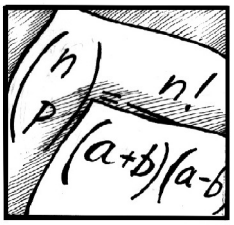
Havainnollistava kuva



Viitteet

[1] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2025/2/nostalgiaa.pdf

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Orthoptic_(geometry)



Solmun tehtäviä

Tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

1. Suorakulmion lävistäjä on kolme kertaa yhden sivun pituinen ja yhden pituusyksikön pidempi kuin toinen sivu. Kuinka pitkiä suorakulmion sivut ovat?

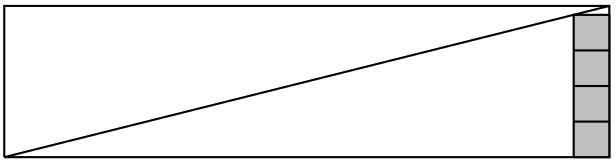
2. Kirjoitetaan kasvavaan järjestykseen väliltä nollasta yhteen kaikki murtoluvut, joiden nimittäjä on korkeintaan 99. Mikä on murtolukua 11/21 seuraava murtoluku? (Supistamattomat murtoluvut tulkitaan samoiksi kuin niiden supistetut muodot, siis esim. $44/84 = 22/42 = 11/21$.)

3. Kylässä on kolme katua: kadut T, V ja P. T-kadun asukkaat puhuvat aina totta, V-kadun asukkaat valehtelevat aina ja P-kadun asukkaat puhuvat totta ja valehtelevat vuorotellen. Eräänä päivänä palovartiotornin vartija huomaa yhdeltä kylän kadulta nousevan savua. Hetkeä myöhemmin puhelin soi ja soittaja sanoo: ”Kadullani on tulipalo.” Vartija kysyy: ”Millä kadulla?” Tähän soittaja vastaa: ”P-kadulla.” Mille kadulle pelastajien pitää mennä?

4. Millä reaaliluvuilla x ja y epäyhtälö $x^2 + y^2 \geq (x+1)(y-1)$ pätee? Millä reaaliluvuilla epäyhtälö on voimassa yhtälönä?

5. Jalkapalloturnauksessa on viisi joukkuetta. Jokainen joukkue pelaa kerran kaikkia muita joukkueita vastaan. Voitosta saa 3 pistettä, tasapelistä 1 pisteen ja tappiosta 0 pistettä. Turnauksen päättyessä neljällä joukkueella on 1, 2, 5 ja 7 pistettä. Kuinka monta pistettä on viidennellä joukkueella?

6. Piirretään kooltaan 4×1 olevan suorakulmion sisään neljä pientä harmaata neliötä alla olevan kuvan mukaisesti. Ylimmän pienen harmaan neliön ylhäällä vasemmalla oleva kärki on suorakulmion halkaisijalla. Määritä yhden harmaan neliön ja suorakulmion pinta-alojen suhde.



7. Reaaliluvut x, y ja z toteuttavat yhtälöt $x+y+z = 8$ ja $xy+yz+zx = 5$. Määritä luvun z suurin mahdollinen arvo.

8. Kumpi luku on suurempi, $\left(2^{1000}\right)!$ vai $2^{1000!}$? Merkintä $n!$ tarkoittaa positiivisen kokonaisluvun n kertomaa $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

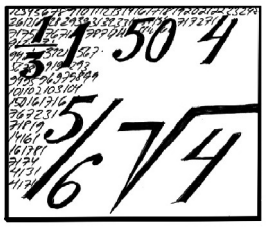
9. Määritä funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^2 - 2x + 2$ kuvaajien yhteisen tangentin yhtälö.

10. Puolisuunnikkaalla $ABCD$ on seuraavat ominaisuudet: $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$ ja $CD = DA$. Määritä puolisuunnikkaan kulmien suuruudet, kun tiedetään, että $\angle CDA = 120^\circ$.

Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja



Sivun 12 lukuristikon ratkaisu

2	0	4	8	■	2	7	■	8	1	■	4	0	9	6
1	■	■	■	■	■	■	6	■	■	■	■	■	■	5
8	■	1	8	2	8	■	5	■	1	0	1	1	■	6
7	■	6	■	■	2	■	4	■	1	■	■	1	■	1
■	■	1	■	■	4	0	3	2	0	■	■	1	■	■
4	■	8	4	2	1	■	2	■	1	1	1	1	■	6
2	■	■	■	4	■	■	1	■	■	0	■	■	■	8
■	6	0	4	8	0	0	■	1	4	1	5	9	2	■
1	■	■	■	6	■	■	5	■	■	■	■	■	■	1
0	■	6	6	2	2	■	3	■	1	2	3	2	■	8
■	■	5	■	■	7	2	0	■	4	■	■	2	■	■
2	■	6	■	■	8	■	8	■	9	■	■	2	■	5
5	■	1	1	1	1	■	6	■	4	6	4	2	■	0
9	■	■	■	■	■	■	5	■	■	■	■	■	■	5
7	7	9	1	■	1	3	■	5	5	■	1	8	3	0

Solmu 1/2026

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Julkaisija:
Suomen matemaattinen yhdistys ry
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

Päätoimittaja:
Anne-Maria Ernvall-Hytönen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:
Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:
toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Verkkosivu:
matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:
Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto
Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Olli Järviniemi, jatko-opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto
Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto
Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio
Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology
Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto
Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntadatatieteen keskus, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:
Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto
Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:
Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com
Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:
Ari Koistinen, lehtori, Metropolia Ammattikorkeakoulu
Juha Lehrbäck, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto
Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Tietotekniikan yksikkö, Tampereen yliopisto
Antti Viholainen, yliopistonlehtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kannen kuva:
Pentti Haukkanen

Painopaikka:
Painosalama Oy

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Matematiikkalehti Solmun Matematiikkadiplomit

"Huippua, kun löysin matikkaankin diplomitehtävät."

Lukudiplomitehtävillä on jo vuosia kannustettu kirjastojenkin kautta oppilaiden lukuharrastusta, mutta opettajan palautteen mukaan "matikka on jossakin pimennossa ollut luonnonvara😉". Media ei todellakaan paljoa matematiikka-aihetta suosi, joten tietoa Solmusta levittävät opettajat toisilleen.

Osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

on ohjeet ja kymmenen tulostettavaa diplomia tehtävineen. Vastaukset koulun sähköpostiin voi opettaja pyytää osoitteesta juha.ruokolainen (at) yahoo.com. Julkiseen jakeluun vastauksia ei sijoiteta, eikä niitä ole tarkoitus jakaa koulun ulkopuolelle.

Tehtävien monipuolisuudesta ja siitä, että mukana on myös haastavia tehtäviä, on tullut paljon kiitosta; samalla luokallahan saattaa olla hyvinkin eri tasoisia oppilaita. "Ope nauttii helposta ylöspäin eriyttämisen mahdollisuudesta." "Kiitos ihan valtavan paljon matikkadiplomista!" "Täältä tulee viidennen luokan oppilaalta positiivista palautetta siitä, että tehtävät ovat kivoja kokonaisuuksia ja ihan erilaisia kuin nää meidän omat matikan tehtävät." "Tehtävät kirvoittivat toivottua ryhmätyötä, ääneen pohtimista ja vastausten vertailua. Tämä on kyllä arvokas paketti, joten kiitos siitä."

Matematiikan tehtäviä tekemällä saa hyvää harjoitusta, paitsi matematiikassa, myös loogisessa ajattelussa, ongelmanratkaisussa ja monenlaisessa kehittävässä puuhailussa. Aivoja pitäisi harjoittaa samoin kuin lihaksia. Hienomotoriikankin merkitys näyttää peruskoulussa unohtuneen. Erityisesti kasvuiässä aivot muokkautuvat nopeasti, joten silloin on tärkeää harjoittaa monipuolista toimintaa, koska luodaan pohja koko elämää varten.

Diplomit eivät ole tiukasti sidottuja vuosiluokkiin, vaikkakin numerointi kertoo varsinkin alimmilla tasoilla etenemisestä suunnilleen vuosiluokkien mukaisesti. Viimeisessä diplomissa päästään myös hiukan kurkistamaan sellaisiin matematiikan aloihin, joihin ei ehkä koulussa törmätä. Ylimmät diplomit voi suorittaa myös osissa. IX diplomissa tarjotaan joitain lukiollekin sopivia yhteiskunnallisia aiheita ja X:ssä käytetään myös GeoGebraa.

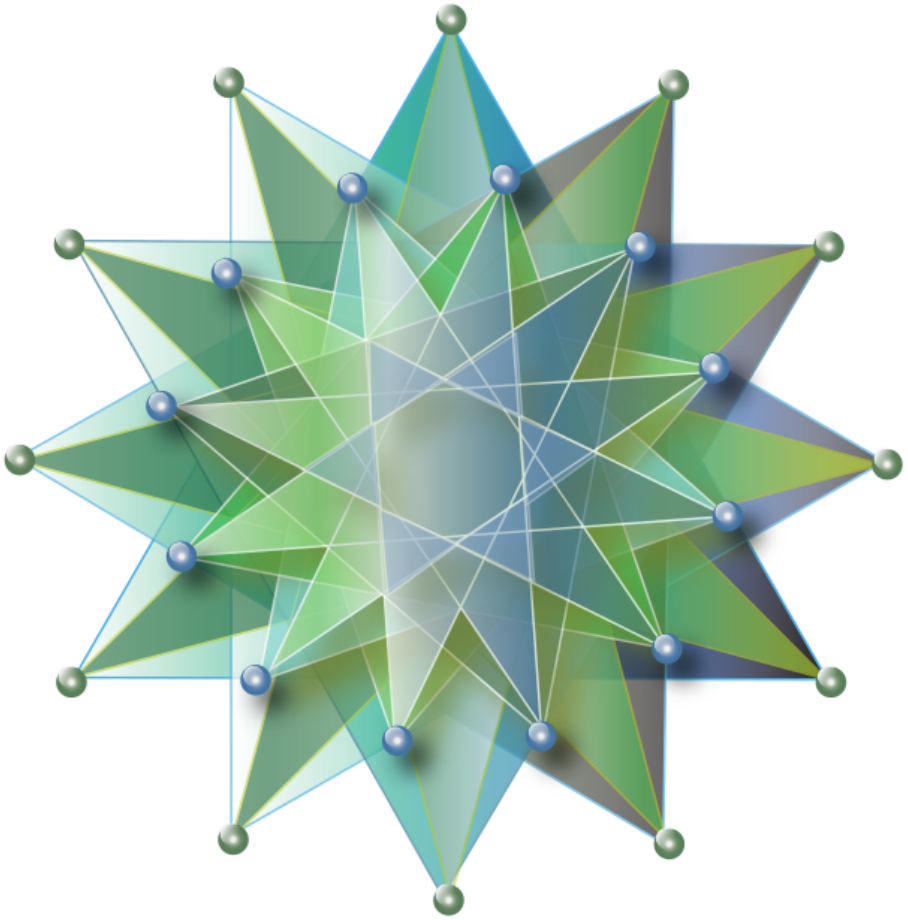


Matematiikan perustiedot ja asenteet syntyvät koulussa. Matematiikkadiplomi antaa mahdollisuuden hyödylliselle ja hauskalle harrastukselle, tarjoaa haasteita ja monipuolista toimintaa jo ensimmäisestä luokasta lähtien. Diplomitehtävät sopivat myös kerhotoimintaan ja kertaukseen. Tämä toiminta ei ole oppilaiden välistä kilpailua, vaan oppilas voi ottaa mittaa itsestään, tarvittaessa kysyä neuvoa ja tehdä yhteistyötä. Harrastus palkitaan ponnistelun jälkeisen onnistumisen ilolla, oppilaat huomaavat oppivansa ja ymmärtävänsä matematiikkaa. Diplomit toimivat matematiikan suppean sanaston takia myös kielikylpynä. Myös suuruusluokkien arviointi on huomattu tarpeelliseksi. Tehtävillä tarjotaan lapsille kokemuksia matematiikan käsitteistä, jotka tarkentuvat myöhemmin noustaessa portaita konkreettisesta abstraktiin. Tehtävät ovat matemaatikkojen itsensä laatimia ja valitsemia, joten matematiikan omaa rakennetta käytetään pohjana ja tuloksena rakentuu kestävä ja mielekäs pohja jatkolle.

Taloudellisen tuen on antanut Jenny ja Antti Wihurin säätiö.

Marjatta Näätänen
Dosentti, Helsingin yliopisto

sisällysluetteloon



MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI