

Metsästä rationaalikertoimisiin asymptootteihin

Timo Salminen
lehtori, Oulunkylän yhteiskoulu, eläkkeellä
trisalminen@hotmail.com

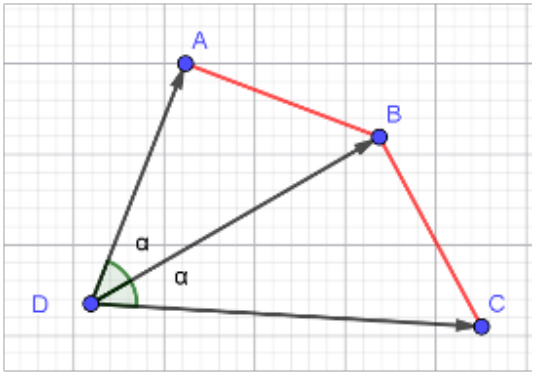
Metsässä

Kävin jokin aika sitten metsässä patikoimassa. Seepra ei pääse raidoistaan, mutta miten käy eläköityneelle matematiikan opettajalle? Malttaako hän luopua matematiikasta ja keskittyä johonkin elämänläheisempään? – Edes metsässä? Vaikeaa tuntuu välillä olevan.

Kävellessäni katseeni kiinnittyi kolmeen puuhun, jotka olivat muutamien metrien päässä toisistaan. Jostain syystä päähäni pälkähti kysymys siitä, minkälainen reitti pitäisi kulkea, jotta puiden runkojen välimatkat toisistaan tältä reitiltä katsottuna näkyisivät aina samassa kulmassa. Melko pähkähullua pohdintaa, mutta minkäs seeprakaan raidoilleen mahtaa.

Palatessani metsästä ajattelin tutkailla, mitä jokin sopiva ohjelmisto tilanteesta piirtäisi. Koska olin tutustunut työssäni GeoGebraan, päätin kokeilla sitä ja typistin ongelman kaksiulotteiseen tasoon.

Tasossa on kolme pistettä A, B ja C. Etsittävä kaikki tason pisteet, joista annettujen pisteiden väliset janat AB ja BC näkyvät samassa kulmassa. (Tilanne ei tietenkään muutu, vaikka tarkastelisi janoja AB ja AC tai BC ja AC.)



Ongelma ja ratkaisu.

Ratkaisu:

Olkoon pisteiden koordinaatit $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ ja $C = (e, f)$ sekä mielivaltainen tason piste $D = (x, y)$. Vaaditaan, että $\angle ADB = \angle CDB$.

Vektorien $\overrightarrow{DA}$ ja $\overrightarrow{DB}$ sekä vektorien $\overrightarrow{DB}$ ja $\overrightarrow{DC}$ välinen kulma on sama, joten myös niiden kosinit ovat samoja. Koska

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|},$$

on

$$\frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{DB}\right|} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|},$$

ja jana näkyy tason pisteestä aina alle 180° kulmassa. Jätän tarkastelusta muutamia erikoistapauksia pois.

Esim. jos janoja katsotaan niiden päätepisteistä, on tarkasteltava erikseen tapausta, että pisteet ovat samalla suoralla tai eivät ole. Lisäksi mukaan tulee määrittelyongelmia, jos janaa katsotaan jostakin janan pisteestä jne.

Yhtälö voidaan kertoa $\left|\overrightarrow{DB}\right|$:llä, ja saadaan

$$\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|}=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DC}\right|}.$$

Tässä

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left[(a-x)\vec{i}+(b-y)\vec{j}\right]\cdot\left[(c-x)\vec{i}+(d-y)\vec{j}\right]$$

ja

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left[(c-x)\vec{i}+(d-y)\vec{j}\right]\cdot\left[(e-x)\vec{i}+(f-y)\vec{j}\right]$$

sekä

$$\left|\overrightarrow{DA}\right|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

ja

$$\left|\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{(e-x)^2+(f-y)^2}.$$

Yhtälö muuttuu muotoon

$$\frac{(a-x)(c-x)+(b-y)(d-y)}{(c-x)(e-x)+(d-y)(f-y)}=\frac{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}{\sqrt{(e-x)^2+(f-y)^2}}.$$

Neliöjuurista päästään eroon korottamalla yhtälö puolittain potenssiin kaksi, kunhan huomioidaan, että myös vasen puoli on ei-negatiivinen. Tämä edellyttää, että vasemman puolen osamäärässä osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkiset ts. vaaditaan, että osoittajan ja nimittäjän tulo on ≥ 0.

Yllätykseksi tämän ehdon näytti voivan asettaa GeoGebran implisiittisen käyrän piirtoehdoksi. Ilman neliöönkorotusehtoa mukaan tulevat myös suplementtikulmat. Lisäksi mukaan tulee aina suora AC, jonka pisteistä janat näkyvät joko samassa kulmassa tai toistensa suplementtikulmassa. Jos piirtämiseen käyttää GeoGebraa, niin kulmat on asetuksissa syytä rajata välille 0°–180°.

Jos haluaa olla erityisen täsmällinen, täytyy ottaa huomioon muitakin määrittelyehtoja (nimittäjien nollakohdat), mutta nämä ovat erikoistapauksia, jotka voi tarkastella erikseen. Esim. jos $D=(x,y)$ on sama kuin $C=(e,f)$, on yo. yhtälö määrittelemätön, ja ollaan tilanteessa, josta oli maininta aiemmin. Muitakin rajoitteita varmaan on, mutta antaa niiden nyt olla.

Korotuksen jälkeen yhtälö on

$$\left[\frac{(a-x)(c-x)+(b-y)(d-y)}{(c-x)(e-x)+(d-y)(f-y)}\right]^2=\frac{(a-x)^2+(b-y)^2}{(e-x)^2+(f-y)^2}.$$

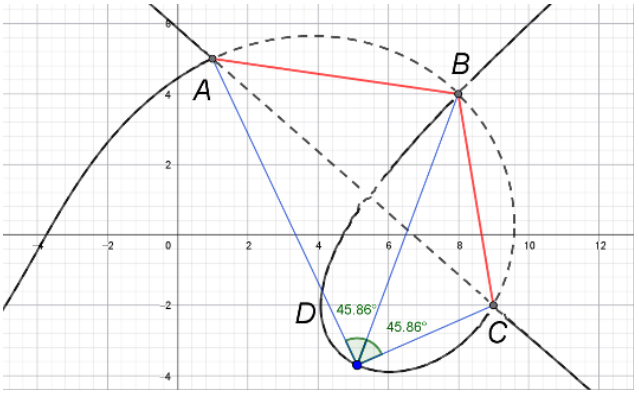
GeoGebrassa käyriä voi tarkastella parametrisoimalla pisteiden koordinaatit, jolloin pisteiden sijaintia voi säätää liukusäätimillä tai liikuttamalla pisteitä piirtoalueella.

Etukäteen en olisi arvannut, minkälaisia reittejä pitäisi (tasaisessa) metsikössä kulkea, jotta kolme puun runkoa näkyisi aina samassa kulmassa. – No, ehkä metsässä kannattaakin keskittyä ihan muihin seikkoihin.

Loppupäätelmänä voi sanoa, että ihan kelvollisesti GeoGebra käyriä piirtää. Ongelmakohdat osoittavat sen, mikä laskentaohjelmissa taitaa yleensäkin olla ongelmana, ts. rajallinen laskentatarkkuus, mikä johtaa erilaisten ”singulariteettien” lähellä oleviin ongelmiin. Käyristä jää tällöin osa näkymättömiin.

Oikeastaan tässä olikin kaikki, ja sain metsäkävelyllä syntyneelle kysymykselleni vastauksen: Jaaha, että tuollaisia reittejä pitkin siis pitäisi kulkea. Mitään sen kummempaa jotain yleistä ominaisuutta käyristä ei tunnu voitavan sanoa, ellei sitten rajoita jollain tavalla pisteiden sijaintia toisiinsa nähden.

Kuvassa on esimerkki käyrästä. Siinä suplementtikulmassa näkyvä käyrän osa on merkitty katkoviivalla.



Lisää havaintoja

Joskus matemaattinen ongelma poikii lisää kysymyksiä ja niin kävi tässäkin. Jonkin aikaa GeoGebralla leikittyäni tein pari havaintoa.

1) Käyrillä näytti aina olevan jonkinlainen asymptootti (elleivät pisteet A, B ja C ole samalla suoralla (mutta eivät niin, että B on janan AC keskipiste), jolloin käyrä on ympyrä).

2) Jos otetaan suplementtikulmat mukaan, käyrät näyttivät aina muodostavan jonkinlaisen suljetun silmukan.

Kahden muuttujan algebrallisten tasokäyrien teoria ei ollut minulle entuudestaan tuttu, joten asymptoottien tutkimiseen piti saada jostain tietoa. Selasin netin sivustoja, joista selvisi, että jos näitä haluaa tutkia, ne on käytännössä hyvä saattaa polynomimuotoon, ainakin korkeimpien asteiden osalta. Geometrisen havainnon perusteella voisi yrittää perustella asymptootin olemassaoloa ehkä helpommin, mutta minua viehätti nimenomaan mahdollinen algebrallinen ratkaisu ja olihan siinä kiinnostava, ennestään tuntematon aihe koluttavana.

Ryhdyin toimeen ja kun sitten päädyin tulokseen, että polynomista katoavat 6. ja 5. asteen termit, niin se houkutti jatkamaan. Kun jäljellä on kuitenkin vain neljännen asteen käyrä, siitä voisi ehkä sanoa jotain yleisempääkin.

Työ ei kuitenkaan juuri helpottunut, koska jäljelle jääneidenkin termien kertoimien laskeminen näytti olevan melko työlästä. Päätin aluksi kokeilla joillakin luvuilla, miten asymptootin yhtälön voisi määrittää ja kun menetelmä tuli tätä kautta tutuksi, en voinut välttää etenemästä jonkinlaiseen yleistämiseen suunnattoman työmäärän uhallakin.

Käytännön menetelmä on, että sijoitetaan korkeimman asteen termeihin $x = 1$ ja $y = k$, jolloin korkeimman asteen termien muodostaman (homogeenisen) polynomin nollakohdat antavat asymptootin kulmakertoimen k. Vakiotermi saadaan sitten suoraan eräästä kaavasta, josta lisää myöhemmin. Tämän kaavan käyttöön tarvitaan lisäksi toiseksi korkeimman asteen termit.

Yleistysyritys

Siispä aakkoset a, b, c, d, e ja f kehiin ja töihin. Menetelmää varten tarvitaan käyrän 4. ja 3. asteen termit.

Tarkoitukseni oli siis tehdä aivan järjettömän aikasyöppöä työtä eli ratkaista asymptoottien yhtälöt yleisesti selvittämällä tasokäyräpolynomin 4. ja 3. asteen termit (erityisesti niiden kertoimet, kun lähtökohtana on pisteiden A, B ja C koordinaatit) ja sitten katsoa, voiko ylipäätään ratkaista saatu 4. asteen polynomiyhtälö, jonka ratkaisuna saisi asymptootin kulmakertoimen.

Avasin siis todellakin koko karmeuden ja laskin kertoimet eriasteisille termeille (käyttäisin sanaa 'sievensin', mutta koska tulos on kaikkea muuta kuin sievä, totean vain, että 'laskin'). Kertoimet voidaan järjestää monella tavalla ja varmaan saadaan lyhyempiäkin esityksiä esim. yhteisten tekijöiden erottamisilla jne.

Neljännen asteen termien kertoimet:

x^4: $f^2 - b^2 + 2bd - 2df$

x^3y: $2(cf + de + ab - ad - bc - ef)$

x^2y^2: $e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac$

xy^3: $2(cf + de + ab - ad - bc - ef)$

y^4: $e^2 - a^2 + 2ac - 2ce$

Kolmannen asteen termien kertoimet:

x^3: $2b^2(c+e) - 2f^2(a+c) + 4adf - 4bde + 2cdf - 2abd + 2def - 2bcd$

x^2y: $-4acf - 2bf^2 - 2de^2 + 2cda - 2cde + 4cbe - 4abe - 2bd^2 - 2abc - 2c^2f + 2da^2 + 2fb^2 + 4efa + 2d^2f + 2cef + 2c^2b$

xy^2: $-2ae^2 - 2cf^2 - 4bde - 4abf + 4adf - 2cdf - 2abd + 2cdb - 2ac^2 - 2d^2e + 2cb^2 + 2ea^2 + 4efb + 2def + 2c^2e + 2d^2a$

y^3: $-2be^2 - 2de^2 - 4acf - 2abc - 2acd + 2da^2 + 2db^2 + 2fa^2 + 4ceb + 2cde + 2cef - 2b^2d$

Lisään tähän vielä muidenkin termien kertoimet, vaikka niitä ei asymptootin määrittämisessä tarvita. Ne ovat melko epäyhtenäisellä tavalla esitettynä, koska laskin niitä hiukan eri järjestyksessä, enkä sieventänyt kaikkia samalla tavalla.

Toisen asteen termien kertoimet:

x^2: $4ace^2 + 4acf^2 + 2bde^2 + 2bdf^2 + a^2f^2 + c^2f^2 + b^2d^2 + 2abcd - 4cea^2 - 4ceb^2 - 2dfa^2 - 2dfb^2 - c^2b^2 - e^2b^2 - d^2f^2 - 2cdef + 4abde + 4cbde + 4a^2ce - 4cdfa - 4edfa - 4ce^2a$

xy: $2abe^2 - 2bce^2 + 2dae^2 + 2dce^2 + 2abf^2 + 2bcf^2 - 2daf^2 + 2dcf^2 + 4abdf + 2a^2cf + 4ac^2f + 2b^2de + 4bd^2e + 4abce - 2cda^2 - 2dea^2 - 2fea^2 - 2cdb^2 - 2fcb^2 - 2feb^2 - 4defb - 4c^2eb - 4d^2fa - 4cefa$

y^2: $(e^2 + f^2)(2(ac + bd) + (b + d)^2) + (ac + bd)(4(b + d)f + ac + bd) - (a^2 + b^2)(2(ce + df) + (d + f)^2) - (ce + df)(4(d + f)b + ce + df)$

Ensimmäisen asteen termien kertoimet:

x: $-2(a + c)(ac + bd)\left(e^2 + f^2\right) - 2e(ac + bd)^2 + 2(c + e)(ce + df)\left(a^2 + b^2\right) + 2a(ce + df)^2$

y: $-2(b + d)(ac + bd)\left(e^2 + f^2\right) - 2f(ac + bd)^2 + 2(d + f)(ce + df)\left(a^2 + b^2\right) + 2b(ce + df)^2$

Vakiotermi:

$(ac + bd)^2(e^2 + f^2) - (ce + df)^2(a^2 + b^2$

Tarkistuksen vuoksi kirjoitin GeoGebraan polynomimuotoisena tasokäyrän kuvaajan näillä kertoimilla ja

vertasin sitä alkuperäiseen sieventämättömään muotoon, ja kun kuvat näyttivät vastaavan toisiaan, uskon, että laskin kertoimet oikein.

Minulla oli nyt tarvittavat 4. ja 3. asteen kertoimet ja saatoin ryhtyä laskemaan 4. asteen termeistä muodostetun polynomin nollakohtia ja siten saada asymptoottien kulmakertoimet. Neljännen asteen yhtälön ratkaiseminen, kun kertoimina on tuollaista aakkossotkua vaikuttaa toivottomalta hommalta. Jätinkin asian sitten tähän ja ajattelin, että antaa koko homman olla.

Asymptootit rationaalikertoimisia?

Kun kuitenkin olin päässyt niin pitkälle, että GeoGebrassa oli käyrä, sen polynomimuotoinen esitys, ja yleisen menetelmän avulla pystyi GeoGebran CAS-ikkunassa laskemaan asymptoottien kulmakertoimet ja vakiotermit sekä piirtämään asymptootit, päätin kuitenkin jatkaa.

Liikuttamalla pisteiden paikkoja, havaitsin, että asymptoottien kulmakertoimet ja vakiotermit näyttivät aina olevan rationaalilukuja, kun pisteiden koordinaatit olivat rationaalisia. Pohdin, voisiko näin olla aina. Yleisestihän ei voi sanoa, että neljännen asteen rationaalikertoimisen polynomin asymptootit ovat rationaalikertoimisia. Esim. tasokäyrän

$$P(x,y) = -2x^4 - x^2y^2 + y^4 + x = 0$$

asymptootit ovat $y = \pm\sqrt{2}x$.

Mutta jos ne nyt todellakin ovat rationaalisia eli aiemmin mainitun 4. asteen yhtälön ratkaisut ovat rationaalisia, niin onhan siinä ehkä pienen pieni mahdollisuus, että ne voisi saada selville. Pitäisi oikeastaan "vain" siis osoittaa, että ratkaisu on olemassa, ja se on rationaalinen.

Esitietoni kahden muuttujan polynomeista eivät riitä siihen, että voisin jollain yksinkertaisella menetelmällä osoittaa tätä. Turvauduin siis rumaan "brute force" -menetelmään eli asymptoottien määrittämiseen pisteiden koordinaattien toimiessa lähtötietona ja katsoa, saisiko tätä kautta kertoimien rationaalisuuden osoitettua. Jatkoin siis kuitenkin siitä, mihin edellä kerroin jääneeni.

Tarkastellaan 4. asteen termejä käyrää esittävässä polynomissa:

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4.$$

Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = k$ ja merkitään polynomi nollaksi (yleinen menetelmä), jolloin saadaan yhtälö

$$Ek^4 + Dk^3 + Ck^2 + Bk + A = 0.$$

Rationaalilukulause sanoo, että jos rationaalilukukertoimisella yhtälöllä on rationaalijuuri, se saadaan vakiotermin ja korkeimman asteen termin tekijöistä. Tässä on kuitenkin ongelmana sana 'jos'. Mitään takeita sille, että yhtälöllä olisi rationaalijuuri, en huomaa, joten tästä lauseesta en keksi olevan hyötyä.

Jatketaan sijoittamalla aiemmin lasketut kertoimet tähän ja saadaan

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)k^4\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)k^3\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)k^2\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)k\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0.\end{aligned}$$

Tilanteen geometriasta ja muutaman käyrän piirtämisen jälkeen tuli mieleen, että asymptootteja ei voi olla useampia kuin kaksi (tai oikeastaan vain yksi "aito"). Siten tällä neljännen asteen yhtälöllä ei voine olla kuin korkeintaan kaksi reaalista ratkaisua, muiden ollessa imaginaarisia. Kun olin aiemmin laskenut pari numeerista esimerkkiä ja havainnut, että niissä oli yhtenä tekijänä $x^2 + 1$, ajattelin, että olisiko näin aina. Ja kappas, kylläpä vaan, yhtälöllä on aina ratkaisuina $k = \pm i$:

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)(\pm i)^4\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)^3\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)(\pm i)^2\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(e^2 - a^2 + 2ac - 2ce\right)\cdot 1\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\mp i)\\ &+ \left(e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - 2ce - 2df + 2db + 2ac\right)(-1)\\ &+ 2(cf + de + ab - ad - bc - ef)(\pm i)\\ &+ f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&e^2 - a^2 + 2ac - 2ce - e^2 - f^2 + a^2 + b^2 + 2ce + 2df\\ &\quad - 2db - 2ac + f^2 - b^2 + 2bd - 2df = 0\end{aligned}$$

$$0 = 0$$

Tämä havainto ratkaisi sen, että pääsin ongelman ratkaisussa eteenpäin.

Polynomi

$$Ek^4 + Dk^3 + Ck^2 + Bk + A$$

on siis jaollinen tekijällä

$$(k - i)(k + i) = k^2 + 1.$$

Kertoimista huomataan, että $D = B$. Jaetaan polynomi lausekkeella $k^2 + 1$.

Saadaan hajotelma

$$\begin{aligned}&Ek^4+Bk^3+Ck^2+Bk+A\\&\quad=\left(k^2+1\right)\left(Ek^2+By+(C-E)\right)+A-C+E.\end{aligned}$$

Jaon on mentävä tasan, joten on tietysti oltava $A-C+E=0$.

Tarkistetaan kuitenkin (tarpeettomasti) vielä, että näin todella on:

$$\begin{aligned}&A-C+E\\&\quad=f^2-b^2+2bd-2df\\&\qquad-\left(e^2+f^2-a^2-b^2-2ce-2df+2db+2ac\right)\\&\qquad+\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\\&\quad=f^2-b^2+2bd-2df-e^2-f^2\\&\qquad+a^2+b^2+2ce+2df-2db-2ac+e^2-a^2\\&\qquad+2ac-2ce=0.\end{aligned}$$

Pätee.

Jakojäännös $A-C+E$ on siis nolla, ja voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}&Ek^4+Bk^3+Ck^2+Bk+A\\&\qquad\qquad=\left(k^2+1\right)\left(Ek^2+Bk+(C-E)\right).\end{aligned}$$

Tämän polynomin loput nollakohdat saadaan tekijän $Ek^2+Bk+(C-E)$ nollakohdista. Nämä ovat myös asymptoottien kulmakertoimia

$$k_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4E(C-E)}}{2E}.$$

No niin. Siinä se nyt sitten on: diskriminantti, jonka soisi olevan jonkin rationaaliluvun neliö, jotta siitä ulos tullessaan kehkeytyisi rationaaliluku ja sen myötä kulmakerroinkin olisi rationaalinen.

Tavoite on siis osoittaa diskriminantti rationaaliluvun neliöksi, jolloin yhtälöllä on kaksi (yksi, jos se on $=0$) reaalista ratkaisua. Edellyttäen tietysti, että $E\neq 0$.

$$\begin{aligned}&B^2-4E(C-E)\\&\quad=(2(cf+de+ab-ad-bc-ef))^2\\&\qquad-4\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\\&\quad=4(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\\&\qquad-4\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\\&\quad=4\left[(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\right.\\&\qquad\left.-\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\right].\end{aligned}$$

Tuosta en keksinyt mitään. Päätin avata lausekkeen ja katsoa mitä siitä seuraa. Tiedä vaikka joitain termejä katoaisi ja jotain kiinnostavaa paljastuisi. Vahva oletukseni oli, että lauseke voidaan kirjoittaa neliöksi, joten oli syytä ainakin yrittää.

Lauseke $(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2$ avautuu seuraavan kaavan avulla:

$$\begin{aligned}&(x+y+z+u+v+w)^2\\&\quad=x^2+y^2+z^2+u^2+v^2+w^2\\&\qquad+2xy+2xz+2xu+2xv+2xw\\&\qquad+2yz+2yu+2yv+2yw\\&\qquad+2zu+2zv+2zw+2uv+2uw+2vw.\quad(*)\end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}&(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\\&\quad=(cf)^2+(de)^2+(ab)^2+(ad)^2+(bc)^2+(ef)^2\\&\qquad+2cfde+2cfab-2cfad-2cfbc-2cfef\\&\qquad+2deab-2dead-2debc-2deef\\&\qquad-2abad-2abbc-2abef+2adbc+2adef+2bcef.\end{aligned}$$

Jälkimmäisestä tulosta

$$\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)$$

saadaan lauseke:

$$\begin{aligned}&e^2f^2-e^2b^2-2e^2df+2e^2db\\&\qquad-a^2f^2+a^2b^2+2a^2df-2a^2db\\&\qquad+2acf^2-2acb^2-4acdf+4acdb\\&\qquad-2cef^2+2ceb^2+4cedf-4cedb.\end{aligned}$$

Koko lauseke on sieventämättömänä siten

$$\begin{aligned}&4\left[(cf+de+ab-ad-bc-ef)^2\right.\\&\qquad\left.-\left(e^2-a^2+2ac-2ce\right)\left(f^2-b^2-2df+2db\right)\right]\\&\quad=4\left[(cf)^2+(de)^2+(ab)^2+(ad)^2+(bc)^2+(ef)^2\right.\\&\qquad+2cfde+2cfab-2cfad-2cfbc-2cfef\\&\qquad+2deab-2dead-2debc-2deef\\&\qquad-2abad-2abbc-2abef+2adbc+2adef+2bcef\\&\qquad-\left(e^2f^2-e^2b^2-2e^2df+2e^2db\right.\\&\qquad\qquad-a^2f^2+a^2b^2+2a^2df-2a^2db\\&\qquad\qquad+2acf^2-2acb^2-4acdf+4acdb\\&\qquad\qquad\left.\left.-2cef^2+2ceb^2+4cedf-4cedb\right)\right].\end{aligned}$$

(Tuolla on seassa 'dead', ja sopi miettiä, uskaltaako jatkaa. Ties vielä mihin tämä johtaa…)

Sievennetään, ja lauseke hiukan lyhenee:

$$\begin{aligned}&4\left[(cf)^2+(de)^2+(ad)^2+(bc)^2+(eb)^2+(af)^2\right.\\&\qquad-2cfde+2cfab+2cfad-2cfbc\\&\qquad+2deab-2dead+2debc\\&\qquad-2abef-2adbc+2adef+2bcef\\&\qquad\left.-2e^2db-2a^2df-2acf^2-2ceb^2\right].\end{aligned}$$

Lupaava havainto on, että jokaisessa yhteenlaskettavassa on neljän tekijän tulo, osassa ne ovat kaksinkertaisina, ja kun lisäksi mukana on puhtaita neliötermejä, ja vieläpä termien lukumäärä täsmää kuuden yhteenlaskettavan binomin kanssa, se houkuttaa käyttämään aiempaa kaavaa (*) toiseen suuntaan, jos oikein hyvin kävisi.

Järjestetään termit niin, että ”puhtaissa” neliötermeissä olevat tulot ovat tekijöinä kaksinkertaisissa tuloissa, ja kun kaikki vielä järjestetään sopivaan järjestykseen, niin huomataan, että koko litania uppoaa sujuvasti kaavaan (*), kunhan vielä huomioidaan merkit:

$$\begin{aligned}4\,\big[&(cf)^2+(de)^2+(ad)^2+(bc)^2+(eb)^2+(af)^2\\&-2(cf)(de)+2(cf)(ad)-2(cf)(bc)+2(cf)(eb)\\&-2(cf)(af)-2(de)(ad)+2(de)(bc)-2(de)(eb)\\&+2(de)(af)-2(ad)(bc)+2(ad)(eb)-2(ad)(af)\\&-2(bc)(eb)+2(bc)(af)-2(eb)(af)\big]\,.\end{aligned}$$

Merkit saadaan vertaamalla tuloja pareittain, esim. tulon $(cf)(de)$ etumerkkinä on miinus, joten tulontekijät cf ja de ovat erimerkkiset. Vastaavasti tulon $(cf)(ad)$ etumerkki on plus, joten ne ovat samanmerkkiset. Samalla tavalla määrittyvät muutkin merkit.

Lisäksi voidaan valita kuinka päin tahansa, joko cf:n merkiksi valitaan miinus, jolloin de:n merkki on plus, tai toisin päin. Tällä ei ole merkitystä, koska lauseke korotetaan jatkossa neliöön. (Onhan esimerkiksi

$$(x-y-z+u)^2=(-(-x+y+z-u))^2\,.)$$

Valitaan $cf>0$, jolloin saadaan lauseke kirjoitettua neliönä:

$$[2(cf-de+ad-bc+eb-af)]^2\,(\geq 0).$$

Asymptoottien kulmakertoimet voidaan siis laskea alla olevilla kaavoilla, ja samalla voidaan todeta, että jos pisteiden koordinaatit ovat rationaalilukuja, myös asymptoottien kulmakertoimet ovat rationaalisia.

$$\begin{aligned}k_{1,2}=&\frac{-2(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\\&\pm\frac{\sqrt{[2(cf-de+ad-bc+eb-af)]^2}}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{1,2}=&\frac{-2(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}\\&\pm\frac{(2(cf-de+ad-bc+eb-af))}{2\,(e^2-a^2+2ac-2ce)}.\end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned}k_1=&\frac{-(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\&+\frac{cf-de+ad-bc+eb-af}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\=&\frac{-2de-ab+2ad+ef+eb-af}{e^2-a^2+2ac-2ce}\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}k_2=&\frac{-(cf+de+ab-ad-bc-ef)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\&+\frac{-(cf-de+ad-bc+eb-af)}{e^2-a^2+2ac-2ce}\\=&\frac{-2cf-ab+2bc+ef-eb+af}{e^2-a^2+2ac-2ce}.\end{aligned}$$

Edellytys on mm., että $e\neq a$ ja $e\neq 2c-a$.

Ja siis todellakin kulmakertoimet ovat rationaalilukuja, jos koordinaatit ovat.

Kaavasta saadaan kaksi kulmakerrointa. Toinen näistä kuuluu aidolle asymptootille, ja toinen suoralle, joka kulkee pisteiden A ja C kautta. Tämä ei siis oikeastaan ole asymptootti sanan varsinaisessa merkityksessä, mutta sekin siis tulee tuosta ”automaattisesti”.

Asymptoottien vakiotermeillekin voidaan johtaa kaava, johon voi suoraan sijoittaa pisteiden koordinaatit. Tämä olisi todella raskas työ, eikä sitä ole tarpeellista tehdä, koska niiden rationaalisuudesta ei ole epäilystä, sillä se seuraa yleisestä menetelmästä, jonka mukaan vakiotermi voidaan laskea lausekkeesta

$$-\frac{\phi_{n-1}(k)}{\phi_n'(k)}.$$

Tässä $\phi_{n-1}(k)$ on toiseksi korkeimman asteen termien muodostaman polynomin arvo laskettuna kulmakertoimen arvolla k, ja $\phi_n^{'}(k)$ on korkeimman asteen termien muodostaman polynomin derivaatta laskettuna arvolla k.

Lopuksi

Se, miksi halusin selvittää asymptoottien kulmakertoimet yo. hankalalla tavalla, ei ollut varsinainen tavoitteeni. Halusin vain selvittää, tuottavatko rationaalipisteet asymptooteille aina rationaaliset kulmakertoimet. Enkä siis keksinyt mitään helpompaa tapaa.

Toive siitä, että löytäisin 4. asteen käyrille joitain yleisiä ominaisuuksia jäi toteutumatta. Sitä varten pitäisi tutkia asiaa enemmän. Yhden ominaisuuden osalta asia jäi auki. Edellä kirjoitin, että käyrä näyttäisi muodostavan suljetun silmukan, jos mukaan otetaan suplementtikulmat. Tätä en lähtenyt selvittämään, koska jos

haluaisi selvittää tätä algebrallisesti, pitäisi ensin ainakin määritellä käsite silmukka. Jo se vaikuttaa hankalalta ja geometrinen lähestyminen voisi ratkaista tämän hyvinkin yksinkertaisesti.

Lause ja sen merkitys matematiikassa:

Jos tasossa olevien kolmen pisteen A, B ja C, joiden koordinaatit ovat rationaalilukuja, väliset janat AB ja BC näkyvät samassa kulmassa (tai sen suplementtikulmassa) käyrältä $P(x, y) = 0$, niin käyrän asymptoottien kertoimet ovat rationaalilukuja.

Lauseella ei ole mitään merkitystä sen enempää matematiikassa kuin missään muuallakaan – ei edes metsässä – ja sen asema matematiikassa on absoluuttisen tyhjänpäiväinen.