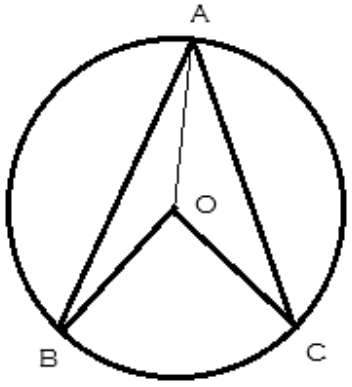


Laiskajaakon geometriaa

Tuomas Korppi

Johdanto

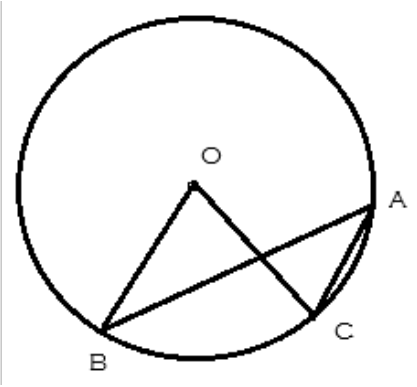
Kuten lukija varmaan tietää, ympyrässä kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Todistuskaan ei ole vaikea. Tutkitaan Kuvaa 1.



Kuva 1: Kehäkulmalause.

Kulma BAC on kehäkulma, ja BOC on keskuskulma. Kolmiot AOB ja AOC ovat tasakylkisiä, ja kulmien AOB ja AOC summa on $360° - \angle BOC$, mistä seuraa, että $\angle OAB + \angle OAC + \angle OBA + \angle OCA = \angle BOC$. Mutta $\angle OAC = \angle OCA$ ja $\angle OAB = \angle OBA$. Siis $\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \angle BOC/2$.

Mutta entä, jos kuvio on kuten Kuvassa 2?



Kuva 2: Vino kehäkulma.

Nyt sama todistus ei päde. Normaalisti klassisessa geometriassa laiska todistaja tyytyy yhteen tapaukseen eikä ala tekemään jokaista tapausta erikseen. Tässä artikkelissa todistamme teoreeman, joka monessa tapauksessa antaa formaalin oikeutuksen tälle laiskan geometrikon piintyneelle tavalle.

Harppi- ja viivoitinkonstruktiot

Klassisessa geometriassa kaikki konstruktiot tehdään harpilla ja viivoittimella. Tämä tarkoittaa sitä, että niissä toistetaan vain seuraavaa viittä askelta.

- Kun kaksi pistettä on annettu, suoran piirtäminen niiden kautta.

- Kun pisteet A ja B on annettu, sellaisen ympyrän piirtäminen, jonka keskipiste on A ja jonka kehä kulkee pisteen B kautta.
- Kun kaksi sellaista suoraa on annettu, jotka eivät ole yhdensuuntaisia, niiden leikkauspisteen ottaminen.
- Kun on annettu ympyrä ja suora, jotka leikkaavat, niiden leikkauspisteiden ottaminen.
- Kun on annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat, niiden leikkauspisteiden ottaminen.

Kaikki klassisen geometrian konstruktiot voidaan suorittaa toistamalla yllä olevia viittä askelta. Klassikkoteos, joka kertoo, mikä kaikki näillä askeleilla on mahdollista, on Eukleideen Alkeet (https://www.gutenberg.org/ebooks/21076). Esimerkinomaisesti luettelemme joitain onnistuvia operaatioita.

- Janan keskipisteen konstruointi.
- Jos on annettu suora ja piste sen ulkopuolella, pisteen kautta kulkevan normaalin piirtäminen suoralle.
- Jos on annettu ympyrä ja piste sen ulkopuolelta, tangentin piirtäminen ympyrälle pisteen kautta sekä tangeerauspisteen löytäminen (muutenkin kuin ympyrän ja suoran leikkauspisteenä; tämä on tärkeää meidän kannaltamme).
- Jos on annettu jana ja piste sen ulkopuolelta, sellaisen ympyrän piirtäminen, jonka keskipiste on annettu piste ja säde annetun janan pituus.
- Jos on annettu kolmio, ympyröiden piirtäminen kolmion sisään ja ympäri.
- Kulman puolittaminen.

Tunnettu esimerkki operaatiosta, joka ei välttämättä onnistu yllä mainituilla viidellä operaatiolla, on kulman jakaminen kolmeen yhtä suureen osaan, ja siksi tällaista kulman kolmijakoa ei esiinny klassisen geometrian tehtävissä.

Reaalianalyyttiset funktiot

Olkoon V avoin väli, eli joko $\mathbb{R}$, $]a,\infty[$, $]-\infty,b[$ tai $]a,b[$. Tässä kappaleessa tutkimme reaalianalyyttisiä funktioita $f\colon V\to\mathbb{R}$. Annamme muodollisen määritelmän, mutta sitä ei tarvitse ymmärtää. Kaikki tarvittava reaalianalyyttisistä funktioista sisältyy Teoreemoihin 2, 3 ja 5 sekä Korollaariin 4.

Määritelmä 1. *Funktio $f\colon V\to\mathbb{R}$ on reaalianalyyttinen, jos jokaisella $x_0\in V$ on avoin väli $V'\subset V$, $x_0\in V'$ ja kertoimet a_i, $i\in\mathbb{N}$, joille kaikilla $x\in V'$ pätee*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x-x_0)^i.$$

Seuraavien teoreemojen todistukset sivuutamme, koska ne ovat yliopistokamaa.

Teoreema 2. *Seuraavat funktiot ovat reaalianalyyttisiä.*

- *Vakiofunktiot.*
- sin, cos *ovat reaalianalyyttisiä koko* $\mathbb{R}$*:ssa,* tan *on reaalianalyyttinen sellaisilla väleillä, joissa se on jatkuva.*
- $x\mapsto -x$.
- $x\mapsto\frac{1}{x}$, *kun lähtöjoukkona on joko* $]-\infty,0[$ *tai* $]0,\infty[$.
- *Identtinen funktio* $x\mapsto x$.
- $x\mapsto a^x$, *missä* $a>0$ *on vakio.*

Teoreema 3. *Jos f,g ovat reaalianalyyttisiä funktioita, niin seuraavat ovat myös reaalianalyyttisiä funktioita olettaen että kyseiset funktiot on määritelty.*

- $f|U$ *(f:n lähtöjoukon rajoittaminen pienempään avoimeen väliin).*
- $x\mapsto f(g(x))$.
- $x\mapsto f(x)+g(x)$.
- $x\mapsto f(x)g(x)$.
- $x\mapsto f^{-1}(x)$ *olettaen, että f on injektio ja sen derivaatta on kaikkialla nollasta eroava.*

Lisäksi seuraava pätee: Jos $f\colon V\to\mathbb{R}$ ja V_i:t ovat avoimia välejä, joille $\bigcup V_i=V$ ja $f|V_i$ on reaalianalyyttinen jokaisella i, niin tällöin f on reaalianalyyttinen.

Korollaari 4. *Seuraavat funktiot ovat reaalianalyyttisiä.*

- $x\mapsto x^n$.
- $x\mapsto\sqrt{x}$, *kun* $x>0$.
- *Trigonometristen funktioiden arkusfunktiot, kun lähtöjoukkoina ovat sopivat* avoimet *välit.*
- $x\mapsto f(x)-g(x)$, *kun f,g ovat reaalianalyyttisiä.*
- $x\mapsto f(x)/g(x)$, *kun f,g ovat reaalianalyyttisiä ja määrittelyvälillä* $g(x)\neq 0$.

Todistus: $x^n=x\times\cdots\times x$, joten ensimmäisen pykälän tulos seuraa siitä, että kahden reaalianalyyttisen funktion tulo on reaalianalyyttinen.

Neliöjuurta koskeva tulos seuraa edellisestä kappaleesta ja siitä, että reaalianalyyttisen funktion käänteisfunktio on reaalianalyyttinen.

Kolmas kohta seuraa samoin siitä, että reaalianalyyttisten funktioiden käänteisfunktiot ovat reaalianalyyttisiä.

Kaksi viimeistä kohtaa seuraavat siitä, että $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$ ja $f(x)/g(x)=f(x)(1/g(x))$. □

Koko homma tässä artikkelissa perustuu seuraavaan teoreemaan:

Teoreema 5. *Olkoot $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ reaalianalyyttisiä. Oletetaan, että on olemassa avoin väli $V' \subset V$, jolle $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V'$. Tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in V$.*

Harppi- ja viivoitinkonstruktioiden reaalianalyyttisyys

Olkoon V väli ja $\mathbb{R}^2$ taso. Olkoon $p \in \mathbb{R}^2$. Merkitään p:n koordinaatteja p_x ja p_y. Sanomme, että $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ on reaalianalyyttinen, jos $t \mapsto f(t)_x$ ja $t \mapsto f(t)_y$ ovat reaalianalyyttisiä. Ajattelemme t:tä aikaparametrinä. Näin ollen, jos f on määritelty kuten edellä, sanomme, että piste f varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.

Harppi-ja viivoitinkonstruktioissa pisteiden avulla konstruoidaan suoria ja ympyröitä, joiden leikkauspisteitä käytetään jatkokonstruktioihin. Seuraavaksi todistamme, että jos suorien ja ympyröiden määrittelyssä käytetyt pisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen, myös saadut leikkauspisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.

Teoreema 6. *Olkoon p, q, r, s pisteitä tasossa, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että kaikissa vaiheissa $p \neq q$ ja $r \neq s$, ja lisäksi missään vaiheessa pisteiden p, q ja pisteiden r, s määrittelemät suorat eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin suorien leikkauspiste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Suorien leikkauspisteen x-koordinaatti on

$$\frac{(p_x q_y - p_y q_x)(r_x - s_x) - (p_x - q_x)(r_x s_y - r_y s_x)}{(p_x - q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x - s_x)}$$

ja y-koordinaatti

$$\frac{(p_x q_y - p_y q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x s_y - r_y s_x)}{(p_x - q_x)(r_y - s_y) - (p_y - q_y)(r_x - s_x)}.$$

Nähdään, että nämä funktiot saadaan koottua reaalianalyyttisistä alkeisfunktioista operaatioilla, jotka säilyttävät reaalianalyyttisyyden. □

Teoreema 7. *Olkoon p, q, r, s pisteitä tasossa, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että kaikissa vaiheissa $p \neq q$ ja $r \neq s$, ja lisäksi pisteiden p, q määrittelemällä suoralla ja pisteiden r (keskipiste) ja s (kehäpiste) määrittelemällä ympyrällä on kaksi leikkauspistettä. Tällöin kumpikin leikkauspiste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Määritellään

$$\begin{aligned}
d_x &= q_x - p_x,\\
d_y &= q_y - p_y,\\
d_r &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2},\\
D &= (p_x - r_x)(q_y - r_y) - (q_x - r_x)(p_y - r_y),\\
R &= \sqrt{(s_x - r_x)^2 + (s_y - r_y)^2},\\
\operatorname{sgn}(x) &= 1, \text{ jos } x \geq 1, \operatorname{sgn}(x) = -1, \text{ jos } x < 1.
\end{aligned}$$

Nyt leikkauspisteiden x-koordinaatit voidaan kirjoittaa

$$\frac{D d_y \pm \operatorname{sgn}(d_y) d_x \sqrt{R^2 d_r^2 - D^2}}{d_r^2} + r_x$$

ja y-koordinaatit

$$\frac{-D d_x \pm |d_y| \sqrt{R^2 d_r^2 - D^2}}{d_r^2} + r_y.$$

Huomaa, että itseisarvofunktio ja sgn-funktio eivät ole reaalianalyyttisiä. Purkamalla kaavat auki kuitenkin nähdään, että silloin kun d_y ei vaihda merkkiään, saadaan reaalianalyyttinen funktio. Tehtävänannossa y- ja x-koordinaattien roolit ovat symmetriset, joten kaavoista voidaan johtaa myös sellaiset versiot, joissa sgn- ja itseisarvofunktioiden sisällä on d_x. Koska d_x ja d_y eivät voi olla yhtaikaa nollia (tällöin ne eivät määräisi yksikäsitteistä suoraa), jompaa kumpaa kaavaparia voidaan aina käyttää. Niinpä lauseen väite seuraa Teoreeman 3 ”Lisäksi”-pykälästä.

Kahdessa viimeisessä kaavassa juurilausekkeiden sisukset ovat positiivisia, jos ja vain jos ympyrällä ja suoralla on täsmälleen kaksi leikkauspistettä. □

Teoreema 8. *Olkoon p, q, r, s neljä pistettä, jotka varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen niin, että koko ajan $p \neq q$ ja $r \neq s$. Olkoon S pisteiden p (keskipiste) ja q (kehäpiste) määräämä ympyrä ja S' vastaavasti pisteiden r, s määräämä ympyrä. Oletamme, että ympyröillä on koko ajan kaksi leikkauspistettä. Tällöin ympyröiden S, S' leikkauspisteet varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Olkoon

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{[q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2},\\
R_2 &= \sqrt{(s_x - r_x)^2 + (x_y - r_y)^2},\\
d &= \sqrt{(p_x - r_x)^2 + (p_y - r_y)^2},\\
\ell &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d},\\
h &= \sqrt{R_1^2 - \ell^2}.
\end{aligned}$$

Nyt leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat

$$\frac{\ell}{d}(r_x - p_x) \pm \frac{h}{d}(r_y - p_y) + p_x$$

ja y-koordinaatit

$$\frac{\ell}{d}(r_y - p_y) \mp \frac{h}{d}(r_x - p_x) + p_y.$$

Kaavat auki purkamalla nähdään, että ne määrittelevät reaalianalyyttiset funktiot. Juurilausekkeiden sisukset ovat positiivisia, jos ja vain jos ympyröillä on kaksi leikkauspistettä. □

Päätulos

Todistamme tässä luvussa artikkelin päätuloksen. Idea on siis se, että meillä on ajassa liikkuvia pisteitä, joihin teemme harppi- ja viivoitinkonstruktion. Koska pisteet, joihin konstruktio tehdään, liikkuvat ajassa, myös konstruktio liikkuu ajassa. Kuitenkin kaikkina hetkinä konstruktio on tehty samalla tavalla. Sen jälkeen todistamme, että kaikki konstruoidut pisteet ja niistä reaalianalyyttisillä kaavoilla johdetut numeeriset arvot varioivat reaalianalyyttisesti aikaparametrin suhteen. Erityisesti, jos joku numeerinen arvo pysyy vakiona lyhyenkin aikavälin, se säilyy vakiona koko tarkastelujakson.

Lemma 9. *Olkoon S suora, p piste suoralla ja q suoran suuntainen vektori. Nyt $S = \{p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$, ja piste $p+tq$ varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen käyden läpi koko suoran.*

Todistus: $p + tq$:n x-koordinaatti on $p_x + tq_x$, eli reaalianalyyttinen, ja $p + tq$:n y-koordinaatti on $p_y + tq_y$, eli reaalianalyyttinen. □

Lemma 10. *Olkoon S ympyrä, jonka keskipiste on p ja säde r. Tällöin voidaan määritellä piste q ympyrän kehältä, joka varioi parametrin t suhteen reaalianalyyttisesti ja käy läpi koko ympyrän*

Todistus: Selvästi $q_x = p_x + r\cos(t)$ ja $q_y = p_y + r\sin(t)$ toimii. □

Määritelmä 11. *Olkoot p_i pisteitä tasossa ja S suora tai ympyrä tasossa. Olkoon p piste suoralla tai ympyrällä S, p varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. (Tällainen on olemassa kahden edellisen lemman perusteella.) Olkoon K harppi- ja viivoitinkonstruktio pisteistä $p, (p_i)_i$. Huomaa, että väliä, jolla t on määritelty, saatetaan joutua rajoittamaan, että suorille saataisiin varmasti leikkauspisteet, suorille ja ympyröille kaksi leikkauspistettä ja ympyröille kaksi leikkauspistettä, silloin kun ko. leikkauspisteiden halutaan kuuluvan konstruktioon. Rajoituksia t:hen voidaan joutua tekemään myös siksi, että halutut suorat ja ympyrät olisivat varmasti määriteltyjä.*

Tällöin sanomme, että K on varioiva systeemi.

Olkoon K varioiva systeemi, ja $p, (p_i)_i, t$ kuten varioivan systeemin määritelmässä.

Teoreema 12. *Jokainen K:n konstruktioon otettu piste varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Piste p varioi oletuksena reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen, ja jokainen p_i on vakiofunktio parametrin t suhteen, ja vakiofunktiona reaalianalyyttinen. Väite seuraa edellisen luvun lauseista induktiivisesti, kun induktio tehdään samassa järjestyksessä kuin K:n konstruktio. □

Huomautus 13. *K:n määritelmässä on vain yksi suoraan t:n mukaan varioiva piste p. Loppujen varioivien pisteiden variointi seuraa siitä, että ne on saatu harppi- ja viivoitinkonstruktiolla p:stä.*

Useimmissa tapauksissa tämä riittää, mutta rajoitus on epäolennainen: Näitä suoraan varioivia pisteitä voi olla useampikin, kunhan ne varioivat reaalianalyyttisesti saman parametrin t suhteen, ja todistus on tässä tapauksessa ihan sama.

Korollaari 14. *Olkoon q, r kaksi pistettä K:ssa. Tällöin niiden etäisyyden neliö varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Etäisyyden neliö saadaan reaalianalyyttisellä kaavalla $(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2$. □

Korollaari 15. *Olkoon q, r kaksi pistettä K:ssa. Tällöin niiden etäisyys varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen sillä oletuksella, että variointivälillä $p \neq q$.*

Todistus: Etäisyys saadaan kaavalla

$$\sqrt{(r_x - q_x)^2 + (r_y - q_y)^2},$$

joka on reaalianalyyttinen, jos $p \neq q$ variointivälillä. □

Korollaari 16. *Olkoon q, r, s kolme pistettä K:ssa, $q \neq r, s$ koko ajan. Tällöin pisteiden r, q määräämän suoran ja pisteiden s, q määräämän suoran välinen kulma varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen olettaen, että suorat eivät ole yhdensuuntaisia.*

Todistus: Olkoon v vektori, jonka alkupiste on q ja loppupiste r, ja v':n alkupiste vastaavasti q ja loppupiste s. Nyt $v \cdot v' = |v||v'|\cos\alpha$, missä α on kyseinen suorien välinen kulma.

Muokkaamalla

$$\alpha = \arccos\Big(\frac{v \cdot v'}{|v||v'|}\Big)$$

ja purkamalla pistetulojen ja vektorien pituuksien kaavat auki nähdään, että α:lle tulee reaalianalyyttinen kaava. Toinen suorien välinen kulma on $180° - \alpha$, eli sekin on reaalianalyyttinen. □

Korollaari 17. *Olkoon p, q, r pisteitä K:ssa, $p \neq q, r$. Olkoon v vektori, jonka alkupiste on p ja loppupiste q, ja v' vastaavasti p:lle ja r:lle. Olkoon α vektorien v, v' välinen etumerkillinen kulma välillä $]-180°, 180°[$. Tällöin α varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen.*

Todistus: Kun $\alpha \in]0°, 180°[$, se varioi reaalianalyyttisesti edellisen korollaarin perusteella.

Oletetaan, että $\alpha \in]-180°, 0°[$. Jos nyt β on v:n ja v':n määräämien suorien välinen kulma, se edellisen lemman perusteella varioi reaalianalyyttisesti. Nyt $\alpha = -\beta$, eli α varioi reaalianalyyttisesti.

Olkoon nyt $\alpha \in]-90°, 90°[$, ja $\bar{k}$ tasoa vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Nyt

$$\bar{k} \sin \alpha = \frac{v \times v'}{|v||v'|}.$$

Purkamalla oikean puolen kaavat auki nähdään, että $\sin\alpha$:lle saadaan reaalianalyyttinen kaava ϕ, ja siis $\alpha = \arcsin \phi$ varioi reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. Nyt korollaari seuraa Teoreeman 3 "Lisäksi"-kohdasta. □

Huomautus 18. *Samaan tapaan voidaan todistaa, että vektorien v ja v' välinen kulma varioi reaalianalyyttisesti silloin, kun sen ajatellaan olevan välillä $]0°, 360°[$.*

Korollaari 19. *Seuraavat pätevät:*

- *Olkoon ϕ, ψ reaalianalyyttisiä kaavoja, joissa esiintyy muuttujina K:n pisteiden x- ja y-koordinaatteja. Jos on olemassa avoin väli V siten, että $\phi = \psi$, kun t on välillä V, yhtälö $\phi = \psi$ pätee koko t:n määrittelyvälillä.*
- *Olkoon ϕ, ψ kaksi realianalyyttistä kaavaa, joissa esiintyy muuttujina K:n etäisyyksien neliöitä, etäisyyksiä ja kulmia. Jos on olemassa avoin väli V, jolle $\phi = \psi$, kun t on välillä V, yhtälö $\phi = \psi$ pätee koko t:n määrittelyvälillä.*
- *Olkoon ϕ reaalianalyyttinen kaava, jossa esiintyy muuttujina K:n etäisyyksien neliöitä, etäisyyksiä ja kulmia. Jos on olemassa avoin väli V siten, että ϕ on vakio, kun t on välillä V, kaava ϕ on vakio koko t:n määrittelyvälillä.*

Todistus: Todistetaan ensimmäinen väite. Selvästi ϕ ja ψ varioivat reaalianalyyttisesti parametrin t suhteen. Nyt väite seuraa Teoreemasta 5.

Keskimmäinen väite on ensimmäisen erikoistapaus, joten se pätee myös.

Viimeinen väite seuraa keskimmäisestä, koska vakiofunktio on reaalianalyyttinen. □

Korollaari 20. *Olkoon q, r kaksi (eri tavalla konstruoitua) pistettä K:ssa. Jos on olemassa avoin väli V siten, että $q = r$, kun $t \in V$, pätee $q = r$ koko t:n määrittelyvälillä.*

Todistus: $q = r$, jos ja vain jos q:n ja r:n etäisyyden neliö on nolla. Niinpä väite seuraa edellisestä korollaarista. □

Korollaari 21. *Olkoon S', S'' kaksi suoraa K:ssa. Jos S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia, kun parametri t on jollain välillä V, niin S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia kaikilla parametrin t arvoilla.*

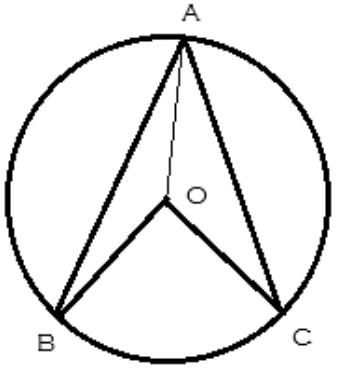
Todistus: Lisätään K:hon suora L, joka on kohtisuorassa S':ää vastaan. Nyt S' ja S'' ovat yhdensuuntaisia, jos ja vain jos L on kohtisuorassa S'':ää vastaan. Siis väite seuraa Korollaarista 19. □

Huomautus 22. *Korollaarien 14-21 tapaisia korollaareja saa todistettua lisääkin. Kattavan listan tekeminen niistä on mahdotonta, joten jatko jätetään lukijan mielikuvituksen varaan.*

Esimerkkejä

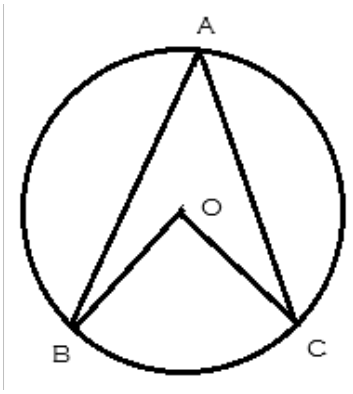
Seuraavaksi tutkimme, kuinka teoriaamme voi soveltaa. Käymme siis läpi geometrian tuloksia, joiden todistuksissa on tapaustarkasteluja. Teemme yhden tapauksen perinteisellä tavalla ja selitämme, kuinka teoriamme hoitaa muut tapaukset. Vaikka selitykset ovat sanamääräisesti pitkiä, ideat, jotka niissä selitetään, ovat yksinkertaisia.

Esimerkki 1. *Palataan johdannon tapaukseen. Oletetaan, että Kuvassa 3 $\angle BOC < 180°$.*



Kuva 3: Kehäkulmalause.

Kun B:ta, C:tä ja ympyrää pidetään paikallaan, ja A:ta liikutetaan hiukan ympyrän kehää pitkin, johdannon konstruktio on mahdollinen, ja $\angle BAC = \angle BOC/2$. Olkoon nyt K kuten alemmassa Kuvassa 4.



Kuva 4: Kehäkulmalauseen todistus.

Edelleen B, C ja ympyrä ovat kiinteitä, ja A liikkuu kehää pitkin. Koska $\angle BAC$ saa vakioarvon $\angle BOC/2$ pienellä avoimella välillä, Korollaarin 19 perusteella $\angle BAC$ saa vakioarvon $\angle BOC/2$ koko ylemmällä ympyränkehällä B:stä C:hen. (Huomaa, että A ei kuitenkaan voi hypätä pisteiden B tai C yli, koska näiden pisteiden kohdalla kulma BAC ei ole määritelty.)

Esimerkki 2. *Olkoon ABC kolmio ja S sen ympäri piirretty ympyrä. Olkoon $a = BC$ sivu. Halutaan todistaa $a/\sin(A) = 2R$, missä R on ympyrän S säde, ja O keskipiste.*

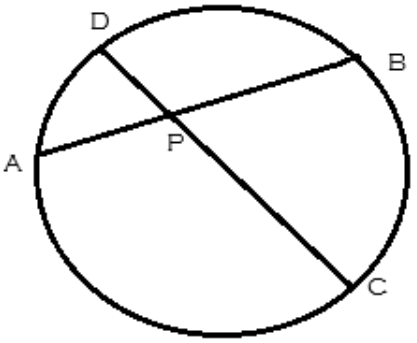
Oletetaan ensin, että a ei ole lävistäjä, ja A sijaitsee pisteiden B, C erottamalla suuremmalla kaarella. Nyt kehäkulmalauseen nojalla $\angle A = (1/2)\angle BOC$, joten $a/2 = R\sin A$, joten $a/\sin(A) = 2R$ pätee aina, kun A sijaitsee suuremmalla kaarella.

Olkoon sitten ABC annettu kolmio, ja S, R kuten edellä. Olkoon nyt C' lähellä B:tä, niin, että A sijaitsee BC':n erottamalla suuremmalla kaarella, ja C', C sijaitsevat samalla AB:n erottamalla kaarella. Olkoon $a' = BC'$ jana. Nyt C':a voidaan liikuttaa edellisen kappaleen nojalla hiukan niin, että $a'/\sin(\angle(C'AB)) = 2R$ pätee koko ajan. Liikutetaan C' ympyrän kaarta pitkin pisteeksi C niin, että C' ei mene A:n tai B:n yli. Koska $a'/\sin(\angle C'AB)$ varioi reaalianalyyttisesti, se säilyy vakiona $2R$. Kun $C' = C$, saadaan väite.

Esimerkki 3. *Jatketaan vielä kehäkulmalausetta. Jos A on B:n ja C:n rajoittamalla lyhyellä kaarella, kehäkulmalause pätee edelleen, kun kulman BOC ajatellaan olevan yli 180 astetta. Tämän tapauksen käsittelemiseksi ajatellaan kulma BOC Huomautuksen 18 mukaisesti välille $]0°, 360°[$.*

Olkoon A, B, C mielivaltaiset kolme pistettä ympyrän S kehällä. Valitaan C' läheltä B:tä niin, että A on B:n ja C':n rajoittamalla pidemmällä kaarella, ja C, C' ovat samalla A:n ja B:n rajoittamalla kaarella. Edellä todistetun perusteella $2\angle BAC' = \angle BOC'$, kun C':a liikutetaan hiukan, joten $2\angle BAC' = \angle BOC'$ pätee myös, kun C' liikutetaan C:ksi, mikä todistaa kehäkulmalauseen täyden tapauksen.

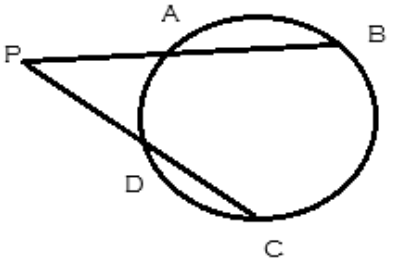
Esimerkki 4. *Meillä on Kuvan 5 tapaus, ja halutaan todistaa $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.*



Kuva 5: Pisteen potenssi ympyrän suhteen.

Kulmat ADC ja ABC ovat janan AC kehäkulmina yhtä suuria. Siis kolmiot ADP ja CBP ovat yhdenmuotoisia, mistä saadaan $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{PB}$, mistä väite seuraa.

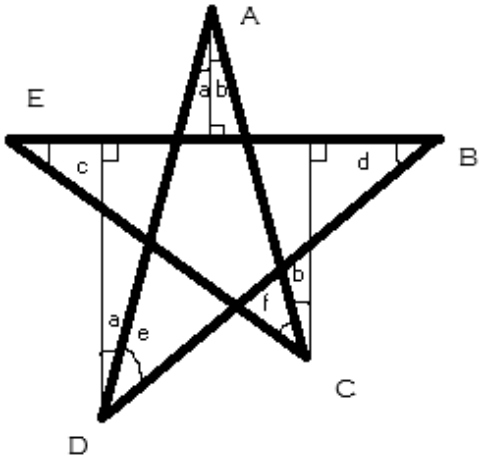
Oletetaan sitten, että ollaan Kuvan 6 tapauksessa.



Kuva 6: Pisteen potenssi, kun piste on ympyrän ulkopuolella.

Piirretään pisteestä P jana j ympyrän sisälle niin, että se kulkee janojen PB ja PC välissä. Olkoon alussa $P' = P$ ja liikutetaan piste P' janaa j pitkin ympyrän sisään. Olkoon A' ja D' suorien $P'B$ ja $P'C$ ja ympyrän leikkauspisteet. Kun P' on ympyrän sisässä, pätee edellä todistetun perusteella $(A'P')^2 \cdot (BP')^2 = (CP')^2 \cdot (D'P')^2$. Siis Korollaarin 19 nojalla $AP^2 \cdot BP^2 = CP^2 \cdot DP^2$, mistä seuraa $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. (Huomaa, että konstruktiossa pisteiden etäisyydet käyvät nollan kautta, joten pitää käyttää etäisyyksien neliöitä.)

Esimerkki 5. *Meillä on vino pentagrammi eli viisisakarainen tähti. Se koostuu viidestä janasta, mutta kaikki janat eivät ole yhtä pitkiä, eivätkä kaikki sakaroiden kärjissä olevat kulmat yhtä suuria. Todistettava, että sakaroiden kärjissä olevien kulmien summa on kuitenkin täsmälleen 180 astetta.*



Kuva 7: Vino pentagrammi.

Jos olemme Kuvan 7 tapauksessa, todistus on selvä. Suorakulmaisista kolmioista saadaan $f + b + c = 90°$ *ja* $a + e + d = 90°$*. Laskemalla nämä yhteen saadaan haluttu tulos* $a + b + c + d + e + f = 180°$*.*

Kuitenkin, jos pentagrammi on riittävän vino, a *voi olla kärjessä* A *kulman* b *sisällä tai kulma* b *kärjessä* C *kulman* f *sisällä, joten konstruktio ei toimi yleisesti.*

Olkoon nyt $ABCDE$ *mielivaltainen vino pentagrammi. Oletetaan, että sivu* BE *on vaakasuorassa ja kärki* A *sen yläpuolella. Asetetaan kuvan päälle säännöllinen pentagrammi* $A'B'C'D'E'$*, jolle* $A' = A$ *ja suorat* BE *ja* $B'E'$ *yhtyvät. Olkoon kaikilla* $X = A, B, C, D, E$ *symboli* j_X *jana* $X'X$*, ja olkoon sillä piste* p_X*, joka liikkuu tasaisella nopeudella pisteestä* X' *pisteeseen* X*, kun* t *liikkuu* 0*:sta* 1*:een. (Katso Huomautus 13.)*

Ajatellaan kaikissa kärjissä olevia kulmia etumerkillisinä (Korollaari 17), ja alussa ja lopussa ne ovat positiivisia. Nyt kulmien summa säilyy $180°$*:ssa, kun* t *liikkuu nollan lähellä hiukan. Siis Korollaarin 19 mukaan kulmien summa on* $180°$ *myös silloin, kun* $t = 1$*, mikä antaa todella vinon pentagrammin tapauksen.*

Lopuksi

Olen joskus määritellyt matemaatikon henkilöksi, joka on valmis todistamaan kaksi tuntia teoreemaa välttääkseen tunnin laskemisen. Nyt minusta tuntuu siltä, että olen mennyt tästä vielä askeleen pidemmälle: Olen kehittänyt päivän yleistä teoriaa välttääkseni simppeleiden geometristen rutiinitodistusten kirjoittamisen.

Kun matemaatikkoa laiskottaa, se johtaa vaan entistä suurempaan työmäärään.