

Ellipsin näkyminen suorassa kulmassa

Pentti Haukkanen
Tampereen yliopisto

Tämä artikkeli sai alkunsa Markku Halmetojan eräällä keskustelufoorumilla esittämästä kysymyksestä, mistä pisteistä ellipsi

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

näkyy suorassa kulmassa, eli mistä pisteistä ellipsiin piirretyt kaksi tangenttia ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Halmetoja on toki ratkaissut tehtävän itsekin yleisen ellipsin tapauksessa [1].

Tarkasteltava ongelma kuuluu ortoptiseen geometriaan (engl. orthoptic geometry), jossa tutkitaan niiden pisteiden geometrisia paikkoja, joista annettu käyrä tai pinta näkyy suorassa kulmassa. Aiheesta löytyy yleiskatsaus esimerkiksi englanninkielisestä Wikipediasta [2]. Ortoptista geometriaa sovelletaan mm. optiikassa.

Tässä artikkelissa on hyödynnetty tekoälyä ChatGPT 5.2.

Ellipsin perusmuoto

Kirjoitetaan ellipsi standardimuodossa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

josta puolipääakselien pituudet ovat

$$a = 2, \qquad b = 1.$$

Tangentin analyyttinen ehto

Tarkastellaan yleistä ellipsiä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja suoraa

$$y = mx + c.$$

Lemma 1 (Diskriminantin nollaehto tangentille)**.** *Suora $y = mx + c$ on ellipsin tangentti täsmälleen silloin, kun*

$$c^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Todistus. Sijoitetaan $y = mx + c$ ellipsin yhtälöön:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1.$$

Kertomalla puolittain luvulla a^2b^2 saadaan toisen asteen yhtälö muuttujalle x:

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mcx + (a^2c^2 - a^2b^2) = 0.$$

Suora on tangentti, jos ja vain jos tällä yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, eli diskriminantti on nolla:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0.$$

Tämä ehto tulee muotoon

$$4a^4m^2c^2 - 4a^2(b^2 + a^2m^2)(c^2 - b^2) = 0,$$

josta seuraa väite. □

Huomautus (geometrinen tulkinta). Diskriminantin nollaehto tarkoittaa, että suora ja ellipsi leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä. Kahden leikkauspisteen tapauksessa suora olisi sekantti, ja ilman leikkauspisteitä se ei kohtaisi ellipsiä lainkaan. Tangentti on näiden rajatapaus.

Näkyminen suorassa kulmassa

Olkoon $P = (x_0, y_0)$ piste ellipsin ulkopuolella. Tangentti pisteestä P on muotoa $y = mx + c$, missä

$$c = y_0 - mx_0.$$

Kun tämä sijoitetaan Lemman 1 ehtoon, saadaan toisen asteen yhtälö kulmakertoimen m suhteen:

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Sen kaksi ratkaisua m_1, m_2 vastaavat kahta tangenttia pisteestä P.

Kahden suoran välinen kulma on suora täsmälleen silloin, kun

$$m_1m_2 = -1.$$

Lause 1. *Ellipsi*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

näkyy pisteestä $P = (x_0, y_0)$ suorassa kulmassa täsmälleen silloin, kun

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $x_0^2 \neq a^2$. Sijoittamalla $c = y_0 - mx_0$ tangenttiehtoon $c^2 = a^2m^2 + b^2$ saadaan

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

Kirjoittamalla auki ja siirtämällä kaikki vasemmalle saadaan

$$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0\, m + (y_0^2 - b^2) = 0.$$

Tämän yhtälön kaksi juurta m_1, m_2 ovat kahden tangentin kulmakertoimet. Vietan kaavojen (ks. huomautus alla) mukaan

$$m_1m_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}.$$

Ehto suoralle kulmalle on $m_1m_2 = -1$, joten

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Tapauksessa $x_0^2 = a^2$ toinen tangentti on pystysuora, ja suoran kulman ehto johtaa samaan tulokseen suoraan. □

Huomautus (Vietan kaavat). Olkoon

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (A \neq 0)$$

ja sen juuret x_1, x_2. Tällöin

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \qquad x_1x_2 = \frac{C}{A}.$$

Kaavat seuraavat tekijöityksestä

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2).$$

Geometrinen tulkinta (johtajaympyrä)

Yhtälö

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

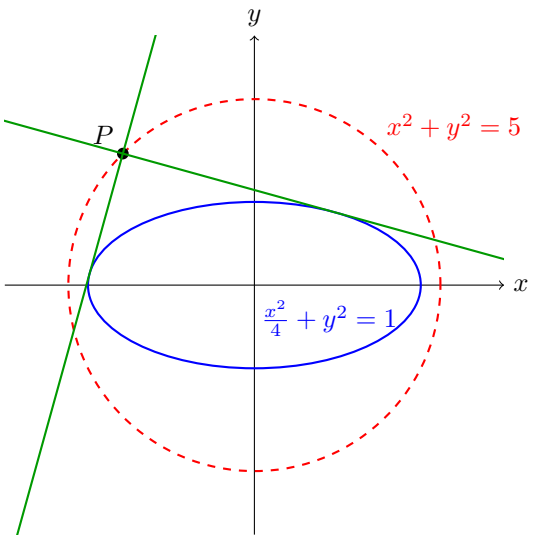
määrittelee ympyrän, jota kutsutaan ellipsin *johtajaympyräksi*. Se on niiden pisteiden geometrinen paikka, joista ellipsiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa.

Sovellus

Tarkastellussa tapauksessa $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$. Siis ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ näkyy suorassa kulmassa täsmälleen niistä pisteistä, jotka sijaitsevat ympyrällä

$$\boxed{x^2 + y^2 = 5}.$$

Havainnollistava kuva



Viitteet

[1] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2025/2/nostalgiaa.pdf

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Orthoptic_(geometry)