

Ympyrän neliöiminen

Reijo Hautakangas

Tarkastellaan kysymystä siitä, voidaanko piirtää neliö, jonka pinta-ala on sama kuin annetun ympyrän pinta-ala. Neliön sivun pituuden pystyy tietenkin laskemaan helposti. Sen sijaan harpilla ja viivaimella tällaista neliötä ei voi piirtää, sillä esimerkiksi yksikköympyrää vastaavan neliön piirtäminen edellyttäisi erään transkendenttiluvun mittaisen pituuden konstruoinnin harpilla ja viivaimella. Sen sijaan likiarvotkatsuja voi tehdä harpilla ja viivaimella.

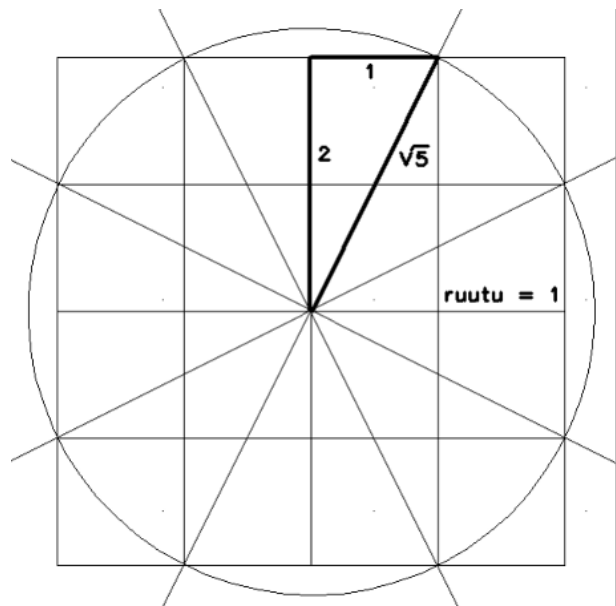
Voidaan esimerkiksi löytää niin tarkka ratkaisu, että kun otetaan huomioon harppiviivaimen menetelmän luontainen piirustusepätarkkuus, niin itse ratkaisumenetelmän epätarkkuus ei juuri huononna tulosta.

Lähdetään aluksi ratkaisemaan toista tehtävää: Neliön ympyröiminen. Tämäkin on mahdotonta ratkaista tarkasti harpilla ja viivaimella, sillä tämänkin ratkaiseminen antaisi transkendenttiluvun mittaisen pituuden konstruktion. Neliön ja ympyrän pinta-alojen yhtäsuuruus on tavoitteena tässäkin.

Jaetaan piirretty neliö aluksi kuuteentoista ruutuun. Ruudun sivun pituus on 1. Kuvaan piirretään ympyrä neliön keskipisteeseen. Sen säteeksi otetaan $\sqrt{5}$ kuvan mukaisesti. Ympyrän ja neliön leikkauspisteiden kautta kulkevat sädesuorat lisätään kuvaan (niiden ja neliön sivujen väliset kulmat määräävät ympyrän ja neliön pinta-alojen suhteen).

Neliön pinta-ala on

$$s^2 = 42 = 16$$



ja ympyrän

$$\pi r^2 = \pi(\sqrt{5})^2 = \pi 5 = 15,70 \dots$$

Pinta-alavirhesuhde on

$$16/15,70 \dots = 1,018 \dots$$

ja viivavirhesuhde

$$\sqrt{1,018 \dots} = 1,0092 \dots$$

Ympyrän säde on siis hiukan liian lyhyt ($< 1\%$).

Nyt voidaan lähteä ratkomaan alkuperäistä tehtävää: ympyrän neliöiminen.

Siirretään neliöitävä ympyrä samaan keskipisteeseen edellisen tehtävän ympyrän kanssa. Sädesuorien kanssa syntyy 8 uutta leikkauspistettä, jotka määrittävät piirrettävän uuden neliön sivut. Neliöitävän ympyrän säteeksi merkitään 1 ja uuden neliön sivuksi $\approx \sqrt{\pi}$. Nämä uudet tekstit ja viivat voidaan piirtää leveämpinä tai erivärisinä, jotta ne erottuisivat vanhasta kuvioista.

Käytännössä näiden kuvioden piirtäminen on huomattavan yksinkertaista ruutupaperia käyttäen, mitä harpivivainmenetelmä ei kuitenkaan salli. Tällöin voitaisiin käyttää sädesuorien tangentille tarkempia kokonaislukujen (ruutujen) osamääriä kuin tuo $1/2$, joita löytyykin runsaasti. Esimerkiksi $23/44$ on jo turhanakin tarkka. Oikea arvo on $\sqrt{(4-\pi)/\pi}$ ($= 0,52272\dots$), josta neliön sivujen ja sädesuorien väliseksi kulmaksi saadaan $27,597\dots^\circ$. Tässä ratkaisussa neliön sivu on kuitenkin hiukan liian pitkä ($< 1\%$).

