

Pupujussin kuolema

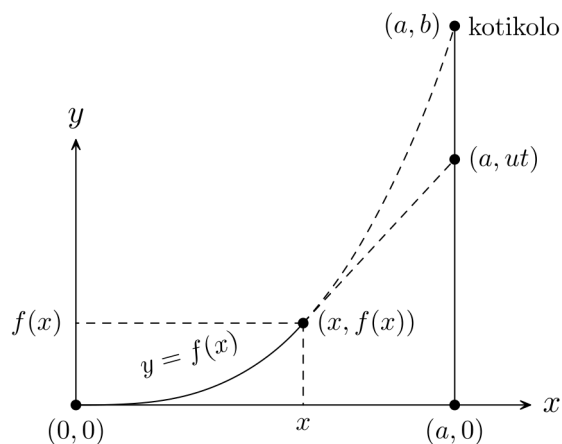
Markku Halmetoja

Katselin hiljattain ikkunastani takapihalle säätilaa arvioidakseni ja havaitsin pensasaidan vieressä vilkasta liikehdintää. Joukko harakoita ja variksia näytti pitävän kiivaanpuoleista torikokousta. Ihmettelin, mitä nämä kaksi eivät aivan ystävällisissä väleissä olevaa heimoa keskenään puuhaavat, kunnes näin, että ne olivat yhteisellä aterialla. Ruokalistalla oli edesmennyt pupujussi, jota linnut kilvan näykkivät terävillä nokillaan. Linnut eivät elävän pupun kimppuun kävisi; kuolinsyynä lienee ollut loukkaantuminen tai vanhuus. Luonnossa mikään ei mene hukkaan: toisen kuolema on toisen elämä. Tätä kiertokulkua siinä miettiessäni muistin, että olin parikymmentä vuotta sitten ratkaissut aihetta sivuavan tehtävän. Kyseessä oli Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen sivulta löytämäni differentiaaliyhälöitä sisältäneen kurssin laskuharjoituksen tehtävä:

Petolintu lentää 50 metrin korkeudella ja havaitsee suoraan alapuolellaan pupujussin. Lintu lähtee syöksymään vakiovauhdilla v kohti pupua, joka samalla hetkellä lähtee loikkimaan nopeudella 10 m/s kohti sadan metrin päässä olevaa kotikoloaan. Lintu suuntaa syöksynsä joka hetki pupua kohti. Mikä on pienin v , jolla lintu tavoittaa pupujussin?

Laadin tuolloin tilanteesta erilaisia yhtälöitä, mutta jokin tuntui aina estävän ratkaisuun pääsyn. Aikani veivattuani kysyin neuvoa laskuharjoituksen tekijältä Petri Olalta (hänelle kiitos), ja hän opastikin asettamaan tilanteen koordinaatistoon kuvion osoittamalla tavalla. Kun vielä merkitään $a = 50$ m, $b = 100$ m ja $u = 10$ m/s, päästään todella kauniisiin yhtälöihin.

Alkakoon linnun syöksy hetkellä $t = 0$ ja olkoon $y = f(x)$ linnun ratakäyrän yhtälö. Lintu lähtee origosta ja syöksy alkaa kohtisuoraan alas, joten $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 0$. Linnun syöksymisnopeus $v(> u)$ on pienin mahdollinen silloin, kun se tavoittaa pupun sen kotikolon edustalla. Siis $f(a) = b$.



Jos lintu on hetkellä t pisteessä $(x, f(x))$, niin se on aikavälillä $[0, t]$ kulkenut matkan vt ja toisaalta matka on käyrän $y = f(x)$ välillä $[0, x]$ olevan osan pituus. Siis

$$vt = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi. \quad (1)$$

Hetkellä t pupu on pisteessä (a, ut) . Koska linnun syöksy suuntautuu jatkuvasti pupua kohti, saamme sen lentoradan kohdassa x olevan tangentin kulmakertoimen

eli funktion f derivaatan esitettyä pupun sijainnin avulla,

$$f'(x) = \frac{f(x) - ut}{x - a},$$

mistä seuraa

$$ut = f(x) + f'(x)(a - x). \quad (2)$$

Eliminoimalla t :n yhtälöistä (1) ja (2) saamme yhtälön, josta ratkeaa ratakäyrä $y = f(x)$, ja sen avulla v . Aluksi palalta näytettävä yhtälö

$$\frac{u}{v} \int_0^x \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi = f(x) + f'(x)(a - x)$$

siistiytyy derivoimalla muotoon

$$\frac{u}{v} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = f''(x)(a - x). \quad (3)$$

Merkitsemällä $p = f'(x)$, jolloin $f''(x) = \frac{dp}{dx}$, saamme (3):sta

$$\frac{u}{v} \sqrt{1 + p^2} = \frac{dp}{dx}(a - x),$$

mistä muuttujat erottamalla tulee

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{u}{v} \frac{dx}{a - x},$$

ja edelleen integroimalla

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = -\frac{u}{v} \ln(a - x) + A.$$

Koska $p(0) = f'(0) = 0$, saamme $A = \frac{u}{v} \ln a$, ja yhtälö sievenee muotoon

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{u}{v} \ln\left(\frac{a}{a - x}\right).$$

Huomaamalla, että tämän yhtälön vasen puoli on hyperbolisen sinin^{*)} käänteisfunktio, saamme

$$\begin{aligned} p &= \sinh\left(\ln\left(\frac{a}{a - x}\right)^{u/v}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a - x}\right)^{u/v} - \frac{1}{2}\left(\frac{a - x}{a}\right)^{u/v} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Kirjoittamalla derivaatta muotoon

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-u/v} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{u/v}$$

saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{av}{2(v + u)}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+u/v} \\ &\quad - \frac{av}{2(v - u)}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-u/v} + B. \end{aligned}$$

Ehdosta $f(0) = 0$ seuraa

$$B = \frac{a}{2}\left(\frac{v}{v - u} - \frac{v}{v + u}\right) = \frac{auv}{v^2 - u^2},$$

joten ratakäyrän yhtälö on

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{av}{2(v + u)}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1+u/v} \\ &\quad - \frac{av}{2(v - u)}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-u/v} + \frac{auv}{v^2 - u^2}. \end{aligned}$$

Ehdosta $f(a) = b$ saamme v :n ratkaisemiseksi yhtälön

$$f(a) = \frac{auv}{v^2 - u^2} = b,$$

mikä annettujen numeeristen arvojen sijoittamisen jälkeen pelkistyy muotoon

$$v^2 - 5v - 100 = 0.$$

Haukalta vaadittava nopeus on siis

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 5\sqrt{17}} \text{ m/s} \approx 12,81 \text{ m/s}.$$

Seuraavana aamuna linnut olivat poissa eikä pupusta näkynyt suolen pätkeäkään. Ilmeisesti kettu oli yön pimeydessä käynyt kuittaamassa oman osansa saaliista.

*) Hyperbolisia funktioita $\sinh$ ja $\cosh$ ei ehkä näy nykylukion oppimäärässä. Niiden määritelmät ovat kuitenkin perin yksinkertaiset:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{ja} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Välttämättä nähdään, että funktiot ovat toistensa derivaattoja ja että $\cosh x \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten hyperbolinen sini on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio:

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Hyperbolisten funktioiden nimet muistuttavat trigonometrinen funktioiden sinin ja kosinin nimiä. Funktioilla onkin mielenkiintoinen ja syvällinen yhteys, mikä paljastuu, kun nämä funktiot määritellään kompleksiluvuille. Sitä kannattaa matematiikasta kiinnostuneen lukiolaisen odottaa ja tehdä ahkerasti töitä, jotta pääsee matematiikan syventäviin opintoihin yliopistossa.