



Kärsimystä ja nostalgiaa

Markku Halmetoja

Selasin hiljattain Solmuun kirjoittamiani artikkeleita ja muuta materiaalia. Silmiini osui oppimateriaaleissa julkaistu tehtäväkokoelma 'Sata lukion matematiikan tehtävää'. Kokoelman rakenne myötäilee lukiomatematiikan kurssien sisältöjä sellaisina kuin ne olivat kokoelman laatimisen aikaan. Osioiden tehtävät on järjestetty helpohkoista kohti vaativampia. Analyyttistä geometriaa sisältävän osion viimeiseksi olin valinnut yhdelle tekstiriville mahtuvan kysymyksen: *Mistä xy -tason pisteistä paraabeli $y = x^2$ näkyy suorassa kulmassa?* Sivulle ei olisi laajempaa tekstiä sopinut. Muistin tuloksen omalta kouluajaltani ja päätin nyt tarkistaa ratkaisun paperilla. Se onnistuu suoraviivaisesti määrittämällä aluksi millä parametrin u arvolla suoralla $y = kx + u$ ja paraabelilla $y = x^2$ on yksi yhteinen piste. Saadaan yhtälö $x^2 - kx - u = 0$; sillä on yksi ratkaisu jos yhtälön diskriminantti on nolla. Siis

$$k^2 + 4u = 0, \quad \text{joten} \quad u = -\frac{1}{4}k^2.$$

Tangentin yhtälö on

$$y = kx - \frac{1}{4}k^2 \quad \text{eli} \quad 4y - 4kx + k^2 = 0$$

ja sitä vastaan kohtisuora tangentti saadaan sijoituksella $k \rightarrow -1/k$,

$$y = -\frac{1}{k}x - \frac{1}{4k^2} \quad \text{eli} \quad 4k^2y + 4kx + 1 = 0.$$

Eliminoidaan k laskemalla yhteen eli-sanojen jälkeiset yhtälöt (samalla häviää myös x); saadaan

$$4(1 + k^2)y + (1 + k^2) = 0 \quad \text{ja edelleen} \quad 4y + 1 = 0.$$

Siis, paraabeli $y = x^2$ näkyy suorassa kulmassa suoran $4y + 1 = 0$ pisteistä.

Toinen tapa on ottaa tangentit 'valmiina' ja vaatia niiltä kohtisuoruus. Varsinkin differentiaalilaskennan kursilla muodostettaneen tangenttiparvia joillekin yksinkertaisille käyrille. Lienee siis tunnettua, että paraabelia $y = x^2$ pisteissä (a, a^2) ja (b, b^2) sivuavat tangentit ovat

$$y = 2ax - a^2 \quad \text{ja} \quad y = 2bx - b^2.$$

Ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos $2a \cdot 2b = -1$ eli jos $ab = -\frac{1}{4}$. Tangenttien leikkauspisteen koordinaateiksi saadaan $x = \frac{1}{2}(a + b)$ ja $y = ab = -\frac{1}{4}$. Leikkauspiste on siis suoralla $4y + 1 = 0$, mutta tämä ei vielä takaa, että suoran jokaisen pisteen kautta piirretyt tangentit olisivat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon siis $(u, -\frac{1}{4})$ suoran $4y + 1 = 0$ piste ja $y + \frac{1}{4} = k(x - u)$ sen kautta kulkeva suora. Paraabelilla $y = x^2$ ja suoralla $y = kx - ku - \frac{1}{4}$ on yksi yhteinen piste, jos yhtälöllä

$$x^2 - kx + (ku + \frac{1}{4}) = 0$$

on yksi ratkaisu. Tämä toteutuu, jos yhtälön diskriminantti

$$k^2 - 4uk - 1 = 0.$$

Tällä yhtälöllä on kaksi ratkaisua k_1 ja k_2 , sillä yhtälön diskriminantti $16u^2 + 4 > 0$. Yhtälöstä nähdään myös, että $k_1k_2 = -1$. Tangentit ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Näissä nostalgisissa tunnelmissa johkaannuin sitten miettimään mistä xy -tason pisteistä ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

näkyi suorassa kulmassa. Arvelin, että 'valmiita tangentteja' olisi mukavampi käyttää kuin turvautua mahdollisesti hankaliin diskriminanttitarkasteluihin. Läh-
tökohtana olivat siis seuraavat faktat ja luulo:

- Pisteissä (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) ellipsiä (1) sivuavien suorien, tangenttien, yhtälöt ovat

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

- Niiden leikkauspisteen koordinaatit

$$x = \frac{a^2(y_0 - y_1)}{x_1 y_0 - x_0 y_1} \quad \text{ja} \quad y = \frac{b^2(x_1 - x_0)}{x_1 y_0 - x_0 y_1}$$

saadaan ratkaisemalla tangenttien muodostama yhtälöpari.

- Tangenttien kohtisuoruuden takaa se, että niiden normaalivektorien skalaaritulo

$$\frac{x_0 x_1}{a^4} + \frac{y_0 y_1}{b^4} = 0.$$

Kohtisuoruudelle saadaan ehto myös kulmakertomien tulona

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \cdot \frac{y - y_1}{x - x_1} = -1$$

ja huomaamalla, että pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) välinen jana on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Nämä kaksi kohtisuoruusehtoa sievenevät samaksi yhtälöksi.

- Pisteet (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) ovat ellipsin (1) kehällä eli niiden koordinaatit toteuttavat ko. ellipsin yhtälön.
- Edellä olevien lisäksi mielessä pyöri oletus, että etsitty pistejoukko olisi alkuperäistä suurempi ellipsi, jonka puoliakselit olisivat tuntemattomat α ja β . Pisteet $(\pm a, \pm b)$ olisivat tämän ellipsin kehällä, sillä ellipsin (1) vaak- ja pystysuorat tangentit kulkevat näiden pisteiden kautta. Toinen puoliakseleista voitaisiin eliminoida yhtälön

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 1$$

avulla.

Minulla oli sellainen ajatus, että pystyisin yllä olevista yhtälöistä nokkelalla kääntelyllä helposti johtamaan jonkinlaisen toisen asteen käyrän, mieluummin ellipsin yhtälön. Olin erehtynyt. Raavittuani kynällä parin päivän aikana huomattavan määrän kierreselkaisen luentovihkon sivuja minun oli myönnettävä itselleni, että en

pysty eliminomaan yhtälöistä sivuamispisteiden koordinaatteja ja päätyään yhtälöön, jossa olisi ainoastaan x , y , a ja b . Vaikka miten yritin, niin lausekkeet paisuivat mahdottomiin mittoihin enkä saanut niistä tolkkua. Koululaisille tarkoitettuun lehteen en halua tarkemmin ruotia tuolloista mielentilaani. Maltin palattua pyysin ystävääni Matikkatätiä kysymään hänen hallinnoimassaan 'Rakastan matematiikkaa' naamakirjaryhmässä, mistä pisteistä ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ näkyi suorassa kulmassa. Ryhmää pystyy ajoittain lukemaan vaikka ei olisi kirjautunut kyseiseen somealustaan. Kysymykseen tulikin melko nopeasti vastauksia. Eräs yliopistomatematiikko oli laatinut hienon animaation, joka näytti, että kyseessä on ympyrän kehä; säde on $\sqrt{5}$. Ilmeisesti tulos oli hänellekin yllätys, sillä hän oli varustanut tuloksensa kolmella huutomerkillä. Kaikki kysymykseen tarttuneet kertoivat vaikeasti sievennettävistä lausekkeista ja eräs arveli, että niiden käsittely ratkaisi Gröbner-kantojen avulla. Ne ovat itselleni tuntemattomia. Eräs vastaaja oli ratkaissut ongelman yleisesti jollakin symbolisen laskennan ohjelmalla; koodi näytti tosi palhalta. Myös kynällä ruutupaperille tehtyjä ratkaisuja ilmestyi ja nekin olivat pitkiä ja monimutkaisia. Päätin luopua tehtävästä ja niellä tappioni. Olihan tulos jo selvä: ellipsi näkyy suorassa kulmassa erään samakeskisen ympyrän kehäpisteistä.

Uteliaisuuttani päätin vielä selata muutamaa kirjaa, josko havaittu tulos löytyisi esimerkkinä tai harjoitustehtävänä. Lindelöf [2] samoin kuin Iversen [3] käsittelee syvällisesti toisen asteen käyrien teoriaa, mutta käsillä olevaa ellipsin ominaisuutta ei heidän teoksistaan löydy. Muistin, että myös Myrbergin [5] ja Poukan [7] teoksissa kerrotaan kartioleikkauksista, mutta tämän kirjoituksen aiheena olevaa ominaisuutta ei mainita. Myrbergin harjoituskirja [6] keskittyy kokonaan differentiaali- ja integraalilaskennan tehtäviin eikä tämä ellipsin ominaisuus näytä mahtuneen Iverseninkaan kokoelmaan [4]. Sitten oli vielä Pentti Kattaisen kirja [8]. Se oli käsite 1960-luvun pitkän matematiikan opiskelijoille. Kun aloitin lukion syksyllä 1968, matematiikan opettaja mainosti kirjaa ja sanoi takaavansa laudaturin sille, joka on kouluaikana suorittanut pääosan kirjan harjoituksista. Muistin, että alussa käsitelty paraabelitehtävä on muunnelma Kattaisen vastavasta tehtävästä. Avasin siis kirjan analyttisen geometrian osiosta ja siinä ellipsitehtävä oli numerolla 169:

Ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa tangenttia leikkaa toisensa pisteessä P. Mikä on P:n ura?

Ura saattaa olla nykylukiolaisille tuntematon käsite. Kysymys tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että minkä käyrän piste P piirtää, kun sivuamispisteet liikkuvat

siten, että tangentit pysyvät kohtisuorina toisiaan vastaan. Olin merkinnyt kirjaan kaikki kouluaikana ratkaisemani tehtävät, mutta tässä ellipsitehtävässä ei ollut merkintää. Ilmeisesti olin pitänyt sitä liian vaikeana. Kun nyt tuijotin Kattaisen vastaussivua, hän antaa ainoastaan tangentit ja kehottaa eliminoimaan niistä k :n, tajusin, että ei tämä ellipsikysymys ole alussa käsiteltyä paraabelitehtävää kummallisempi. Pääsin takaisin 1960-luvun lukiomoodiin ja lähdin ratkaisemaan tehtävää diskriminanttitarkasteluun johtavalla tavalla.

Siis: Suora $y = kx + u$ sivuaa ellipsiä $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jos yhtälöllä

$$b^2x^2 + a^2(kx + u)^2 - a^2b^2 = 0$$

on yksi ratkaisu. Yhtälö sievenee muotoon

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kux + a^2(u^2 - b^2) = 0.$$

Merkitsemällä sen diskriminantti nolaksi saadaan yhtälö

$$4a^4k^2u^2 - 4(b^2 + a^2k^2)a^2(u^2 - b^2) = 0,$$

joka sievenee muotoon

$$b^2 + a^2k^2 - u^2 = 0,$$

mistä seuraa

$$u = \pm \sqrt{b^2 + a^2k^2}.$$

Tarkastellaan x -akselin yläpuolista ellipsin kaarta valitsemalla $u = \sqrt{b^2 + a^2k^2}$. Tulos pätee x -akselin alapuolellakin ellipsin symmetrisyyden takia. Tangentin yhtälö on siis

$$y = kx + \sqrt{b^2 + a^2k^2}.$$

Sijoituksella $k \rightarrow -1/k$ saadaan sitä vastaan kohtisuora tangentti

$$y = -\frac{1}{k}x + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{k^2}}.$$

Eliminoidaan k neliöimällä yhtälöt

$$y - kx = \sqrt{b^2 + a^2k^2} \quad \text{ja} \quad y + \frac{x}{k} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{k^2}}$$

ja laskemalla ne yhteen. Sievennysten jälkeen saadaan

$$(1 + k^2)x^2 + (1 + k^2)y^2 = (1 + k^2)a^2 + (1 + k^2)b^2,$$

ja edelleen

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \quad (2)$$

Vaaka- ja pystysuorien tangenttien leikkauspisteet $(\pm a, \pm b)$ ovat myös ympyrän kehällä.

Siis, ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

näkyv suorassa kulmassa ympyrän

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

kehäpisteistä.

Merkitsin Kattaisen kirjaan tehtävän 169 ratkaistuksi, vaikka se ei aivan omin avuin tapahtunutkaan.

Viitteet

- [1] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/sata.pdf>
- [2] L. Lindelöf: Analyttisen geometrian oppikirja, 2. painos, Suomalaisen kirjallisuuden seura 1910.
- [3] Felix Iversen: Analyttisen geometrian oppikirja, 2. painos, Otava 1963.
- [4] Felix Iversen: Analyttisen geometrian tehtäväkoelma, Otava 1956.
- [5] P.J. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja, 6. painos, Otava 1967.
- [6] Differentiaali- ja integraalilaskennan harjoitustehtäviä, 3. painos, Otava 1965.
- [7] K.A. Poukka: Korkeamman matematiikan alkeiskurssi, 2. painos, WSOY 1946.
- [8] Pentti Kattainen: 800 lukion matematiikan tehtävää, 2. painos, Otava 1968.