



Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2025

Daniel Slivinskiy

Vieraana kengurujen kotimaassa

Australia, Brisbane, *Lone Pine Koala Sanctuary*. Kengurut loikkivat aitauksessaan vierailijoiden keskuudessa. Ihmislauman sekaan on päätynyt kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Suomea edustava joukkue. Lukiolaiskisaajat pääsevät ruokkimaan pitkäkuonoisia kenguruja, silittämään niitä, ja vaikka kuvaamaan eksoottisen eläimen kanssa selfien. Samalla jotkut uppoavat ajatuksiinsa ja kävelevät hiljaa pohtien topologian harjoitustehtävää. Eräs opiskelija on nimittäin tuonut mukanaan Jussi Väisälän oppikirjan *Topologia II*, jota kisaajat ovat käyneet läpi kisamatkan aikana.

Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Suomea edustivat vuonna 2025 Zhongyi Li, David Liu, Veikko Heikkinen, Ohto Katila, Lénárd Virág ja Albert Henriksson. Ensikertalaiskisaaja Ohto Katila palasi Australian seikkailusta pronssimitalistina. Zhongyi, Veikko ja Lénárd ansaitsivat kunniainninnat ratkomalla täysin pistein vähintään yhden tehtävän. Kisaajien yhteinen panostus asettaa Suomen 61. sijalle tämän vuoden 110 osallistujamaasta.

Olympialaiset järjestettiin Novotel Sunshine Coast Resort -hotellilla, johon varajohtaja Veera Nurmela ja kisaajat majoitettiin tapahtuman ajaksi. Laguunin rannalle rakennettu lomakohde asettautuu luonnonsuojelualueen ja Korallimeren välille. Aamiaiselle kävellessä saattoi siis törmätä kenguruun, kun taas lounaalla pääsi ihailemaan ikkunasta rantamaisemaa. Illalliseen

mennessä tuli kuitenkin jo pimeä — eteläisellä pallonpuoliskolla on nimittäin heinäkuussa talvi. Pitkiä, kylmiä öitä lukuunottamatta talvisää Sunshine Coastissa muistuttaa suomalaista alkukesää.

Kansainvälinen kisakokemus

Joukkueen suhteellistettu sijoitus oli paras seitsemään vuoteen. Kisaajat harjoittelivatkin olympialaisiin ahkerasti, ja useampi oli osallistunut jo edellisiin kisoihin. Joukkueen treenaus huipentui Pohjoismaiden yhteiseen valmennusleiriin, jossa suomalaisista oli opettamassa Lauri Hallila. Vuosittain Tanskan Sorøssä järjestetyn leirin ohjelmaan kuuluu luentoja, harjoituskokeita ja jopa suunnistusta. Leirillä järjestetään Suomen, Ruotsin, Tanskan, Norjan ja Islannin välinen matematiikkakilpailu, Viikinkitaistelu, jonka toisessa osiossa kisaajat pääsevät miettimään tehtäviä yhdessä. Tänä vuonna Viikinkitaistelun voitti Suomen joukkue.

Kilpailuhenkisyydestä huolimatta joukkueen jäsenet viihtyivät hyvin muiden maiden edustajien keskuudessa. Kisaajat viettivät vapaa-aikaansa lautapeliin ja pöytätenniksen parissa, erityisesti muiden Pohjoismaiden ja Viron kisaajien kanssa. Muuten matematiikan parissa ahkeroinnista pääsi rentoutumaan mm. kahden eläintarhavierailun aikana, joista jälkimmäisen järjesti sijoitusfirma Jane Street kisoja seuraavan tapahtuman yhteydessä.

Tehtävät

Tehtävä 1. Tasossa oleva suora on *aurinkoinen*, jos se ei ole yhdensuuntainen x -akselin, y -akselin tai suoran $x + y = 0$ kanssa.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Määritä kaikki epänegatiiviset kokonaisluvut k siten, että tasosta löytyy n eri suoraa, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b , joilla $a + b \leq n + 1$, piste (a, b) sijaitsee vähintään yhdellä suorista
- suorista täsmälleen k ovat aurinkoisia.

Tehtävä 2. Olkoon Ω ympyrä, jonka keskipiste on M , ja olkoon Γ ympyrä, jonka keskipiste on N . Oletetaan lisäksi, että ympyrän Ω säde on pienempi kuin ympyrän Γ säde. Ympyrät Ω ja Γ leikkaavat pisteissä A ja B , missä $A \neq B$. Suora MN leikkaa ympyrän Ω pisteessä C , ja ympyrän Γ pisteessä D siten, että pisteet C, M, N ja D ovat suoralla MN , tässä järjestyksessä. Olkoon P kolmion ACD ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Suora AP leikkaa ympyrän Ω jälleen pisteessä $E \neq A$. Suora AP leikkaa ympyrän Γ jälleen pisteessä $F \neq A$. Olkoon H kolmion PMN ortokeskus.

Osoita, että pisteen H kautta kulkeva, suoran AP kanssa yhdensuuntainen suora sivuaa kolmion BEF ympäri piirrettyä ympyrää.

(Kolmion *ortokeskus* on tämän korkeusjanojen leikkauspiste.)

Tehtävä 3. Olkoon $\mathbb{N}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on *nasta*, jos

$$f(a) \text{ jakaa luvun } b^n - f(b)^{f(a)}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b .

Määritä pienin reaaliluku c siten, että $f(n) \leq cn$ kaikilla nastoilla funktioilla f ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .

Tehtävä 4. Positiivisen kokonaisluvun N *aito jakaja* on luvun N positiivinen jakaja, joka ei ole N itse.

Äärettömän positiivisten kokonaislukujen jonon $a_1, a_2, \dots$ jokaisella jäsenellä on vähintään kolme aitoa jakajaa. Kaikilla $n \geq 1$ luku a_{n+1} on luvun a_n kolmen suurimman aidon jakajan summa.

Määritä mahdolliset lukujonon jäsenen a_1 arvot.

Tehtävä 5. Alisa ja Bazza pelaavat *koalarajapeliä*. Kaksinpelin säännöt riippuvat kummankin pelaajan tiedossa olevasta positiivisesta reaaliluvusta λ . Pelin vuorolla n (peli alkaa vuorosta $n = 1$) toimitaan seuraavasti:

- Jos n on pariton, Alisa valitsee epänegatiivisen reaaliluvun x_n siten, että

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Jos n on parillinen, Bazza valitsee epänegatiivisen reaaliluvun n siten, että

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Jos jompikumpi pelaajista ei voi valita sopivaa lukua x_n , peli loppuu muun pelaajan voittoon. Jos peli jatkuu loputtomasti, kumpikaan pelaajista ei voita. Kaikki valitut luvut ovat kummankin pelaajan tiedossa.

Määritä ne luvun λ arvot, joilla Alisalla on voittostrategia, ja ne luvun λ arvot, joilla Bazzalla on voittostrategia.

Tehtävä 6. Tarkastellaan 2025×2025 -ruudukkoa. Matilda asettaa ruudukolle vaihtelevankokoisia suorakulmion muotoisia laattoja siten, että jokaisen laatan reunat asettuvat ruudukon viivoille ja että jokaisen ruudun peittää enintään yksi laatta.

Määritä pienin laattojen lukumäärä, jolla Matilda voi asettaa laatat siten, että ruudukon jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ruutu, jota ei peitä mikään laatta.