

## Topologiaa talutushihnassa

*Petri Laarne*

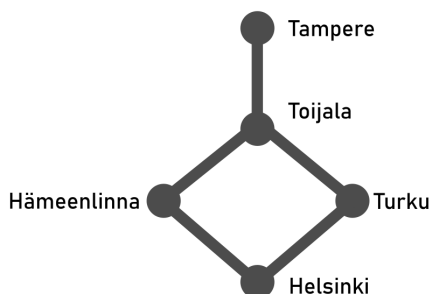
Väitöskirjatutkija, Helsingin yliopisto  
<https://www.nollakohta.fi>

Koiranomistaja tunnistaa tilanteen: Puistokävely ja koira pitkän hihnan toisessa päässä. Hetki upota omiin ajatuksiinsa ja koiran seurailla nenäänsä – ja sekuntia myöhemmin matka tyssää töksähtäen, kun jeppe on vetänyt kierroksen jonkin puun ympäri.

Tämän tilanteen toistuessa kymmenettä kertaa lenkin aikana voisi tehdä mieli sanoa pari rumaa sanaa. *Mate-matiikkalehti Solmu* kuitenkin suosittelee toista tietä: ihailla, kuinka koira on löytänyt olennaisen osan puiston *topologiasta*.

### Mitä on topologia?

Topologia tutkii kappaleiden ja avaruuksien ominaisuuksia, jotka eivät riipu tarkoista mitoista. Esimerkistä käy kartta junaverkosta: olennaista on, että viivat yhdistävät oikeat asemat toisiinsa, ei niinkään se, ovatko viivojen pituudet ja suunnat järkeviä.



Tarkkaavainen lukija saattaa huomata, että Turku ja Hämeenlinna eivät ole edellisessä kartassa tutuilla paikoillaan. Topologisesti ne ovat kuitenkin ihan oikein: Toijalan ja Helsingin välissä. Maantieteellisesti epäkorrektia, mutta junareitin kannalta se ja sama.

Tampereen ja Helsingin välistä etäisyyttä voidaan mitata kilometreissä, mutta yhtä hyvin sen voisi mitata asemanväleissä tai matka-ajassa. Eri mittareita voisi kuvata muuttamalla viivojen keskinäisiä pituuksia, mutta etäisyysmitan valinta ei vaikuta asemien väliin yhteyksiin: *topologisesti* asialla ei ole väliä.

Klassisempi määritelmä topologille on henkilö, joka ei näe eroa kahvikupin ja donitsin välillä. Sekä kupissa että donitsissa on täsmälleen yksi reikä, josta voi pujottaa sormensa läpi. Tällä kertaa topologinen ominaisuus on sormen mentävien reikien lukumäärä.

Muovailuvahasta tehdyn donitsin voisi painella kahvikupiksi ilman, että vahaa tarvitsisi repiä tai yhdistellä:



Munkkipossusta puolestaan ei saa donitsia ilman rei'itintä, joten ne ovat topologisesti erilaiset.

Donitsin ja kahvikupin välinen yhteys voidaan ilmaista matemaattisen tarkasti. Vastaus löytyy hieman yllättäen koiran, talutushihnan ja puun yhtymäkohdasta.

## Matemaattinen talutushihna

Aloitetaan määrittelemällä koirapuisto. Olkoon puisto ääretön taso, jossa ainoan puun virkaa toimittaa yksi piste. Hankitaan lisää virikkeitä vähän myöhemmin.

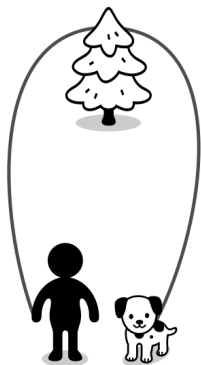
Olkoot koira ja sen ulkoiluttaja pistemäisiä ja heidän välissään äärettömän pitkä flexi-hihna, joka kelaautuu sisään nappia painamalla ja joka ei koskaan tukkeudu koirankarvoista.

Annetaan koiran kirmata villisti aikansa ja kutsutaan se sitten luokse. Kun koira on vierellä, painetaan taluttimen nappia. Kelautuuko hihna kokonaan vai jääkö se puuhun kiinni?

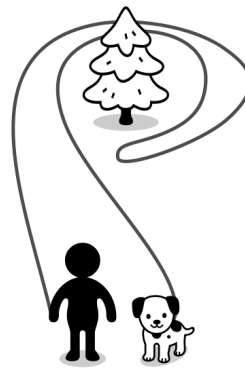
Jos hihna on näin, niin se kelaautuu nätisti:



Mutta jos koira on kiertänyt puun, hihna kiristyy puun ympäri:



Jos koira on kiertänyt puun ensin myötäpäivään ja sitten vastapäivään, niin kierrokset kumoavat toisensa ja hihna kelaautuu:



Jotta tilanne olisi matemaattisesti mielenkiintoisempi, voisimme erotella erilaiset jumittumisen tavat toisistaan. Hihna voi kiertää puun ympäri yhden, kaksi tai seitsemäntoista kertaa, ja sillä todella on vaikutusta taluttajan ärsytystasoon.

Lisäksi myöhempää varten on hyvä erottaa myötä- ja vastapäivään kiertämiset. Sanotaan vaikka, että vastapäivään tehty kierrokset ovat negatiivisia. Tällöin toimii edellisen kuvan sääntö

$$1 + (-1) = 0 = \text{ei sotkeutumista.}$$

Kaiken kaikkiaan siis sotkeutumisen astetta voidaan mitata yhdellä kokonaisluvulla. Kokonaislukujen joukkoa merkitään usein kirjaimella  $\mathbb{Z}$ . Topologi sanoisi, että yhden puun puiston ärsyttävyyssaste on siksi  $\mathbb{Z}$ .

## Paluu hetkeksi todellisuuteen

Teimme aika rankkoja yksinkertaistuksia, mutta ne ovat kaikki matemaattisesti perusteltuja.

Ensinnäkään puun sijainnilla ei pitäisi olla mitään merkitystä sen suhteen, millaisilla tavoilla hihna voi kiertyä sen ympäri. Pistemäinen puu voidaan myöskin korvata ympyrällä tai oikeastaan minkälaisella suljetulla kuviolla tahansa: olennaista on vain, että hihna ei pääse sujahtamaan siitä läpi.

Entä jos puistossa on avustaja, joka voi mennä heiluttelemaan hihnaa? Voisiko hihnan kelautumista auttaa jotenkin? Ei voi, jos hihnaa ei ylety heittämään puun yli ja hihnan toisessa päässä olevat ihminen ja koira pysyvät paikallaan.

**Pohdi tätä:** Vakuuta itsesi siitä, että avustaja ei voi yksinään purkaa puun ympärille kiertynyttä hihnaa.

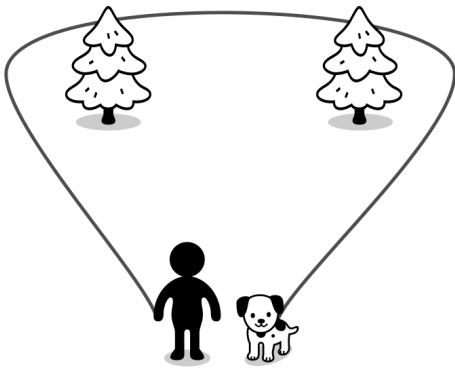
## Lisää puita nuuhkittavaksi

Tehdäänpä sitten seuraava matemaattinen askel ja tarkastellaan puistoa, jossa on kokonaiset kaksi puuta. Nyt siis tasossa on kaksi pistettä, joiden läpi viiva ei voi kulkea. Millä kaikilla tavoin hihna voi nyt sotkeutua?

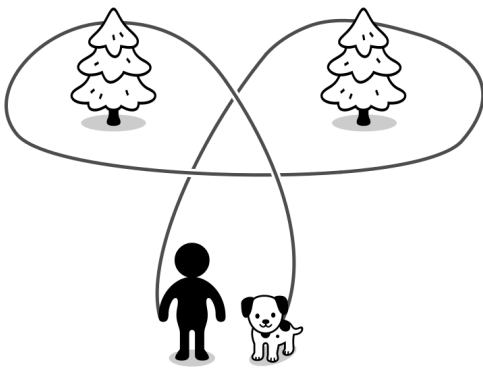
Ensimmäinen veikkaus voisi olla, että lasketaan erikseen kierrokset kummankin puun suhteen. Sotkeutumista kuvaisi lukupari  $(a, b)$ , jossa sekä  $a$  että  $b$  ovat kokonaislukuja. Matemaattinen merkintä tällaisten parien joukolle on  $\mathbb{Z}^2$ . Ärsytystä toiseen potenssiin!

Tämä idea on valitettavasti väärä.

Jos koira kiertää myötäpäivään ensin vasemman ja sitten oikean puun, hihna kiristyy tähän muotoon:



Jos taas koira kiertää myötäpäivään ensin oikean ja sitten vasemman puun, tulos on tämä:



Nämä kaksi tapaa sotkea talutushihna ovat ihan erilaiset, eikä avustaja pysty heiluttelevaan yhtä toiseksi. Miten tämä ero voidaan sitten kuvailla?

Koiranulkoiluttajan ratkaisu on kuin onkin turvautua rumiin sanoihin. Tässä sana ymmärretään kuitenkin hyvin tarkassa matemaattisessa mielessä, nimittäin... peräkkäisinä kirjaimina.

Sovitetaan, että kirjain  $x$  tarkoittaa ”kierrä vasen puu myötäpäivään” ja kirjain  $y$  puolestaan ”kierrä oikea puu myötäpäivään”. Sitten ensimmäistä kuvaa vastaa sana  $xy$  ja toista  $yx$ . Selkeästi kaksi eri sanaa.

Nyt tulee abstrakti osuus, älä pelästy: *Ryhmä* on algebran termi joukolle, jossa on määritelty jokin laskutoimitus.<sup>1</sup> Esimerkiksi kokonaisluvut ja yhteenlasku muodostavat ryhmän  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Yleensä matikan kurssilla  $xy$  tarkoittaa kertolaskua. Nollasta poikkeavien lukujen kertolasku  $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$  on myös ryhmä. Nyt reaalityyppien joukon tilalla on kaikkien kirjaimista  $x$  ja  $y$  koostuvien sanojen joukko, ja kertolaskun tilalla on operaatio ”kirjoita peräkkäin”.

Sanojen yhdistämistä on yllättävän järkevää ajatella eräänlaisena kertolaskuna. Jos koira ei ole juossut yhdenkään puun ympäri, voidaan tilannetta kuvata symbolilla  $\bullet$ . Se vastaa kertolaskussa lukua 1. Jos koira juoksee sitten vasemman puun ympäri, saadaan  $\bullet x$ , ja se voidaan lyhentää muotoon  $x$ . Kolme kierrosta saman puun ympäri:  $xxx$  tai napakammin  $x^3$ .

Toisin kuin tutussa kertolaskussa, tässä on kuitenkin se ero, että  $xy \neq yx$ . Syvemmissä matematiikassa esiintyy kuitenkin monenlaisia objekteja, joiden kertolasku ei ole vaihdannaista. Esimerkiksi tietokonegrafikassa ja tilastotieteessä tarpeellisten matriisien kertolaskussa järjestyksellä on väliä.

Jos sanoja voidaan kertoa, voidaanko niillä myös jakaa? Kyllä vain. Sovitaan, että merkki  $\bar{x}$  tarkoittaa ”kierrä vasen puu vastapäivään” ja  $\bar{y}$  samaa oikealle puulle. Koska myötä- ja vastapäivään tehdyt kierrokset kumoavat toisensa, niin  $x\bar{x} = \bullet$ , kuten myös  $\bar{x}x = \bullet$ . Tämä idea ei siis ole sen kummempi kuin  $3 \cdot (1/3) = 1$ .

Jos siis koira juoksee ensin kahdesti vasemman puun ympäri  $(xx)$ , ja sitten hepulipäissään yhden kierroksen toisin päin ja kerran oikean puun ympäri  $(\bar{x}y)$ , niin kaikkiaan tilanne on

$$(xx)(\bar{x}y) = x(x\bar{x})y = x\bullet y = xy.$$

Järjestyksen suhteen pitää olla tarkkana, sillä toisin päin kertolaskua ei voisi sieventää:

$$(\bar{x}y)(xx) = \bar{x}yxx.$$

Välissä oleva puu pitää huolen, että  $\bar{x}$  ja  $x$  eivät pääse kumoamaan toisiaan.

**Pohdi tätä:** Yksittäisten kirjaimien lisäksi voidaan tehdä jakolaskua kokonaisilla sanoilla. ”Käänteissana”  $(\overline{xy})$  kumoaa kaikki sanassa  $xy$  juostut kierrokset puun ympäri. Miten  $(\overline{xy})$  kirjoitetaan merkeillä  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$ ? Oikea vastaus ei ole  $\bar{x}\bar{y}$ .

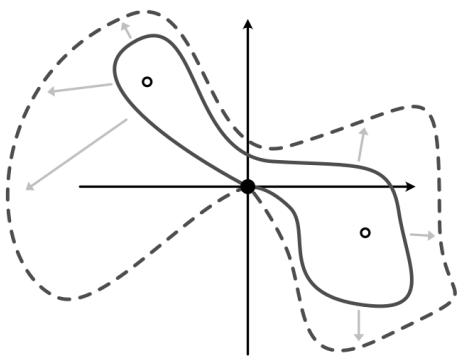
Tämä oli pitkänpuoleinen selitys, mutta kahden puun puistossa mahdollisia sotkeutumisia siis kuvaa kaikkien

<sup>1</sup>Laskutoimituksen täytyy toteuttaa tiettyjä ehtoja, mutta jätämme ne nyt huomiotta.

kirjaimista  $x$  ja  $y$  muodostettujen sanojen joukko. Tekninen termi sille on *kahden alkion vapaa ryhmä*, ja sitä voidaan merkitä esimerkiksi symbolilla  $F_2$ .

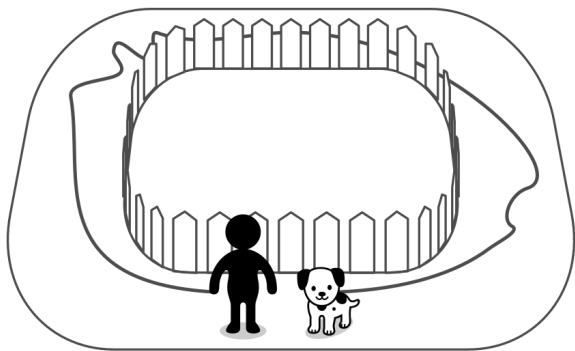
## Abstrakti puisto

Koirapuisto on vertauskuva niin sanotulle *rei'itetylle tasolle*, jossa tasosta  $\mathbb{R}^2$  on poistettu  $n$  eri pistettä. Hihnan jumittumisia kuvaava vapaa ryhmä  $F_n$  kertoo, millaisin topologisesti erilaisin tavoin kahdesta päästään yhdistetty polku voi kulkea tasossa. Polut ovat topologisesti samoja, jos ne voidaan muokata toisikseen liikkuttamatta päätepistettä tai kulkematta poistettujen pisteiden kautta.



Yhden puun puistoon liittyy muuten myöskin vapaa ryhmä  $F_1$ . Vain yhtä kirjainta käyttämällä kaikki sanat ovat muotoa  $x^n$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$  (mukaan lukien 0 ja negatiiviset luvut). Koska  $x^n x^m = x^{n+m}$ , sanojen yhdistäminen palautuu tavalliseksi yhteenlaskuksi. Siksi  $F_1$  ja  $\mathbb{Z}$  ovat olennaisesti sama asia.

Avaruuteen liittyvän ryhmän (jo nähdyt  $F_n$  ja  $\mathbb{Z}^n$  tai jotain vielä villimpää) selvittäminen on usein helpoin tapa verrata kahta avaruutta toisiinsa. Entä jos menimme puiston sijaan raviradalle? Tällä kertaa talutushihnan sotkeentumista kuvaa, kuinka monta kierrosta radan ympäri koira kirmaa:



Koska kierroksia kuvaa kokonaislukujen joukko  $\mathbb{Z}$ , on ravirata siis topologisesti sama kuin yksipuinen puisto. Radan ulkoreunalla ei siis ole merkitystä.

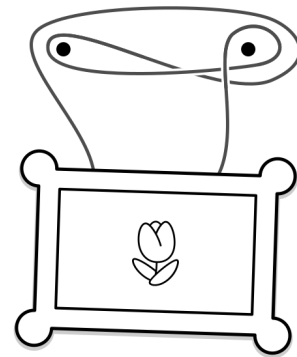
## Epäkäytännön sovellus

Talutushihnan topologiaa voidaan hyödyntää sangen epäkäytännölliseen sovellukseen: mikä on *huonoin* tapa ripustaa taulu?

Jos taulun ripustaa narulla naulaan, se pysyy seinällä tasan niin kauan kuin naulakin. Turvallisuuden kannalta voisi siis olla fiksu käyttää useampaa naulaa – idealisoitu taulu ei tipu kunhan naru kiertää edes yhden naulan ympäri.

Lienee ilmiselvää, miten tämä tehdään järkevästi.

*Huonoin tapa* sen sijaan on ripustaa taulu niin, että yhdenkin naulan irtoaminen saa taulun putoamaan. Tässä kuvassa niin on tehty kahdelle naulalle:



Irrota vasen naula, ja naru on kokonaan vapaa. Tai tee sama oikealle naulalle: sama tulos. Varo lasinsiruja.

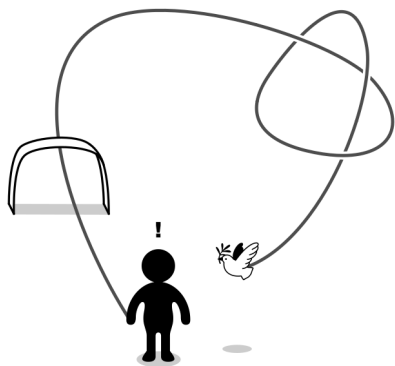
Tilanne ei eroa mitenkään koirapuistosta. Ripustusta vastaa nyt sana  $xy\bar{x}\bar{y}$ . Joko  $x/\bar{x}$ - tai  $y/\bar{y}$ -kirjainparin poistaminen jättää jäljelle joko sanan  $y\bar{y}$  tai  $x\bar{x}$ . Loput kirjaimet kumoutuvat itsestään.

**Pohdi tätä:** Keksitkö, miten sama tehdään kolmella naulalla? Tämä on luultavasti helpompi miettiä ensin kirjaimilla ja vasta sitten kuvana. Vastaus on tekstin lopussa. (Lisähaaste: Entä  $n$  naulalla?)

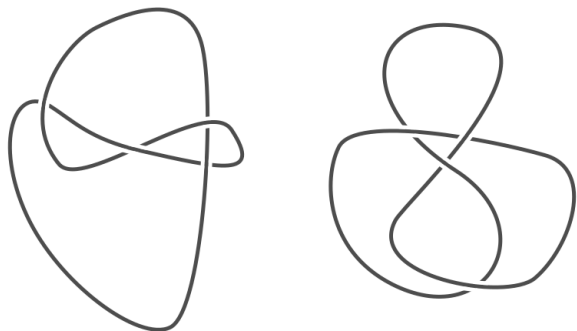
## Oikea sovellus: Solmuja hihnassa

Vielä jännemmäksi menisi, jos talutushihnan päässä olisi hurtan sijasta kyyhkynen (hihna on paitsi äärettömän ohut myös painoton). Nyt hihna ei voi enää tarttua puihin, koska kyyhkynen voi nykäistä hihnan puun yli. Sen sijaan kaariportin läpi lentäminen aiheuttaa harmaita hiuksia taluttajalle.

Kyyhkynen pystyy toiseenkin juttuun, johon 2D-koira ei kykene. Lintu voisi lentää hihnan silmukalle ja sitten pujahtaa silmukan läpi – eli vetää hihnaan solmun.



Solmuteoria on matematiikan ala, jonka yksi kysymys on tunnistaa erilaiset solmut toisistaan. Se onkin vaikea homma se! Kaksi solmua voi näyttää melko erilaisilta, mutta pienellä pyörittelyllä ja vääntelyllä ne saakin muutettua toisikseen.



(Kaikki neljän ylityksen solmut, kuten yllä olevat, ovat topologisesti samoja. Kuuden ylityksen solmuja on sen sijaan jo viisi erilaista.)

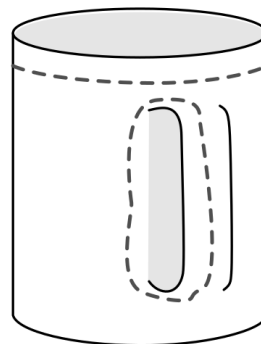
Jos talutushihna on äärettömän ohut, solmuilla ei ole vaikutusta sen kelaantumiseen. Siksi hihnan solmiutuminen ja kaariportin läpi jumiutuminen ovat eri asioita – toinen kuvaa hihnan ja toinen ympäröivän avaruuden muotoa.

Solmuteoriaa sovelletaan muuallakin kuin partiossa: sillä on analysoitu niin DNA-ketjun sotkeentumista kuin tiettyjä kvanttisysteemejäkin.

## Entäpä ne donitsi ja kahvikuppi?

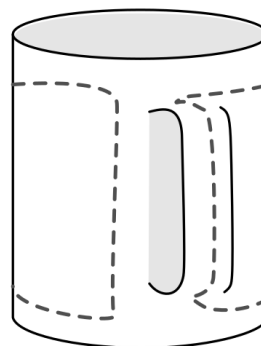
Palataanpa nyt siihen alun määritelmään topologista, joka juo donitsista ja syö kahvikuppeja. Mikä on kahvikuppiin liittyvä ryhmä?

Korvataan tällä kertaa koira muurahaisella, joka kulkee pitkin kupin pintaa. Kupin ympäri voi kulkea kahdella tavalla: joko lieriön reunaa pitkin tai kahvan kautta.

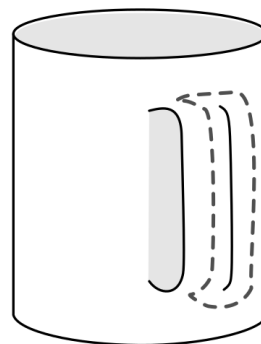


Tällä kertaa ei saada vapaata ryhmää  $F_2$  vaan kokonaislukuparien joukko  $\mathbb{Z}^2$ . Lopputuloksen kannalta ei siis ole väliä, missä järjestyksessä muurahainen tekee kierrokset eri suuntiin.

Aloitetaan tässä kuvassa kahvan vierestä. Kierretään kuppi myötäpäivään ja kuljetaan sitten kahvaa pitkin. Kierretään kuppi vastapäivään ja palataan alkuun:



Viivoja voi liu'uttaa kuppia pitkin niin, että jää jäljelle vain kierros kahvan kautta:



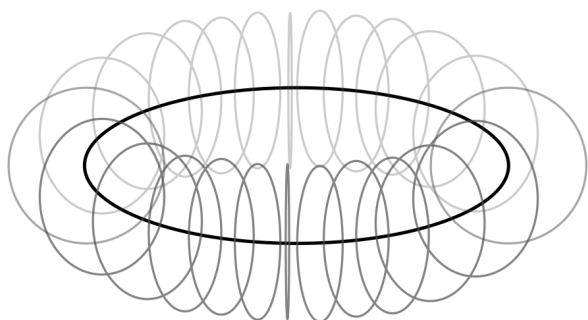
Toisin sanoen reunaa pitkin tehdyt kierrokset  $x$  ja  $\bar{x}$  kumoutuivat, vaikka välissä oli kahvan kulkeminen  $y$ :

$$xy\bar{x} = x\bar{x}y = y.$$

Tämä ei ole mahdollista ryhmässä  $F_2$ . Hankalampaa on perustella, miksi kahvikuppiin liittyy juuri  $\mathbb{Z}^2$  eikä joku kolmas vaihtoehto.

Entäs donitsi?

Ainakin minulle muurahaisen jalanjälkien hahmottaminen donitsin pinnalla käy vähän hankalaksi. Ongelmaan on kuitenkin matemaattisesti täsmällinen ratkaisu. Piirretään donitsista rautalankamalli:



Donitsia voi ajatella ympyränä, jonka jokainen piste toimii kohtisuorassa olevan ympyrän keskipisteenä. Koska ympyrään liittyvä ryhmä on  $\mathbb{Z}$ , ja donitsi on tietyssä mielessä ympyröiden tulo, on donitsin ryhmä  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  eli  $\mathbb{Z}^2$ .

Äskeisen perusteleminen matemaattisen tarkasti on jokin, mitä tehdään yliopiston maisteritason kursseilla. Ei anneta sen haitata! Olennaista on, että sekä kahvikupin että donitsin ryhmä on  $\mathbb{Z}^2$ . Siksi ne ovat tässä topologisessa mielessä sama asia.

*Algebrallinen topologia* on matematiikan ala, joka muuntaa topologiaan liittyviä kysymyksiä (millaisia polkuja on?) algebraan liittyviksi (millainen ryhmä ja laskutoimitus kuvaavat polkuja?). Ryhmiin liittyviin kysymyksiin on usein helpompi vastata, varsinkin kun yritetään todistaa jotain tarkasti.

Tämän tekstin esimerkeissä on ollut kyse niin sanotusta *polkuhomotopiasta*.<sup>2</sup> Se ei ole ainoa tapa luokitella muotoja samanlaisiksi tai erilaisiksi: eri tavat korostavat eri ominaisuuksia. Topologiaan ja jännittävän muotoisiin avaruuksiin liittyviä kysymyksiä tutkitaan myös useissa yliopistoissa Suomessa.

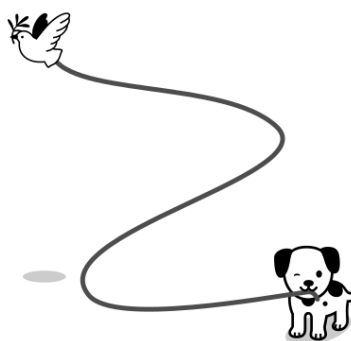
Yksi tunnetuimmista algebrallisen topologian ongelmista liittyi kyyhkysen ja hihnan jumiutumisiin 4-ulotteisen pallon pinnalla (joka itse on 3-ulotteinen, ihan kuten tutun pallon pinta on 2-ulotteinen). Tämä

*Poincarén konjektuuri* oli yksi seitsemästä ongelmasta, joiden ratkaisemisesta luvattiin vuonna 2000 miljoonan dollarin palkkio kustakin.

Ongelma oli tunnettu, koska se oli vaikea. Rahapalkkio teki siitä kuuluisan. Ja sehän vasta olikin, kun Grigori Perelman julkaisi siihen ratkaisun vain muutamia vuotta myöhemmin.

Jo nämä ainekset olisivat tehneet hänestä legendan, mutta ei siinä kaikki: Hän nimittäin kieltäytyi sekä palkkiosta että arvostetusta Fieldsin mitalista, ryhtyi erakoksi ja katkaisi yhteydet muuhun maailmaan.

Ole siis varovainen koiraa ulkoiluttaessasi: saatat vielä päätyä ratkaisemaan jotain suurta.



## Ratkaisu: Kolmen naulan taulutuho

Kolmea naulaa  $x$ ,  $y$  ja  $z$  käyttäen yksi ratkaisu on  $xy\bar{x}yzyx\bar{y}\bar{x}\bar{z}$ .

Suoraviivainen ratkaisu perustuu induktioon: Olkoon sana  $A$  ratkaisu  $n$  naulan ongelmaan. Sanassa  $A$  siis esiintyy  $n$  eri aakkosta, joista minkä tahansa poistaminen kumoaa koko sanan. Tässä  $A = xy\bar{x}y$  on aiemmin nähty kahden naulan ratkaisu.

Olkoon  $w$  aakkonen, joka ei esiinny sanassa  $A$ . Sitten  $Aw\bar{A}w$  ratkaisee  $n + 1$  naulan ongelman.<sup>3</sup>

*Kirjoittaja kiittää FT Susanna Heikkilää kommentteista mutta pitää kunnian huonoista vitseistä itsellään.*

<sup>2</sup>*Homo-* ja *-topia* tulevat kreikan samaa ja paikkaa tarkoittavista sanoista.

<sup>3</sup>Tämä algoritmi noin kaksinkertaistaa sanan pituuden jokaista lisättyä kirjainta kohti. Lyhyempiä sanoja tuottava menetelmä löytyy Demainen ym. artikkelin "Picture-Hanging Puzzles" luvusta 3.3 (esiversio osoitteessa <https://arxiv.org/abs/1203.3602>). Sitä ei tiedetä, onko tämäkään tapa tehokkain mahdollinen.