

S&LMU

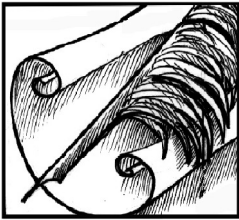
MATEMATIIKKALEHTI 1/2025

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Tyttöjen matematiikkakilpailujen vaikutus (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Seikkailuja seisauksina ja tasauksina: elliptisyyskorjaus (Jouni Luukkainen)	5
Jääkö rahapeliaddikti väistämättä tappiolle? (Tuomas Korppi)	6
Topologiaa talutushihnassa (Petri Laarne)	10
Epästandardi analyysi, mitä se on? (Jukka Tuomela)	16
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2025 Prishtinassa	24



Tyttöjen matematiikkakilpailujen vaikutus

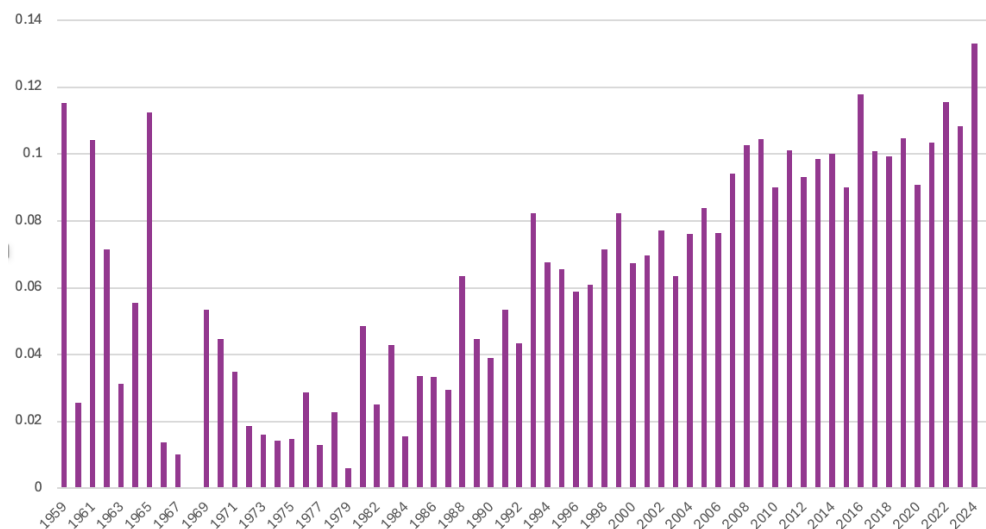
Pääkirjoitus

Vuoden 2011 kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Alankomaissa Iso-Britannian edustajat ilmoittivat, että seuraavana keväänä järjestettäisiin ensimmäiset Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset (EGMO) Cambridgessa. Britit olivat osallistuneet Kiinan tyttöjen matematiikkaolympialaisiin ja kokemus oli ollut hyvä. Tavoite oli saada näytettyä tytöille, että muutkin tytöt kilpailevat, sekä järjestää mukava väliporras matkalla IMO:on. Pyrkimyksenä oli kasvattaa tyttöjen määrää kansainvälisissä kilpailuissa – ei esimerkiksi ajaa tyttöjä omaan sarjaansa. Tarvetta tällaiselle oli, sillä kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa pääsääntöisesti alle 10 % kilpailijoista oli tyttöjä.

Suuressa mittakaavassa tilanne ei ole muuttunut merkittävästi paremmaksi, mutta pieni parannus näkyy:

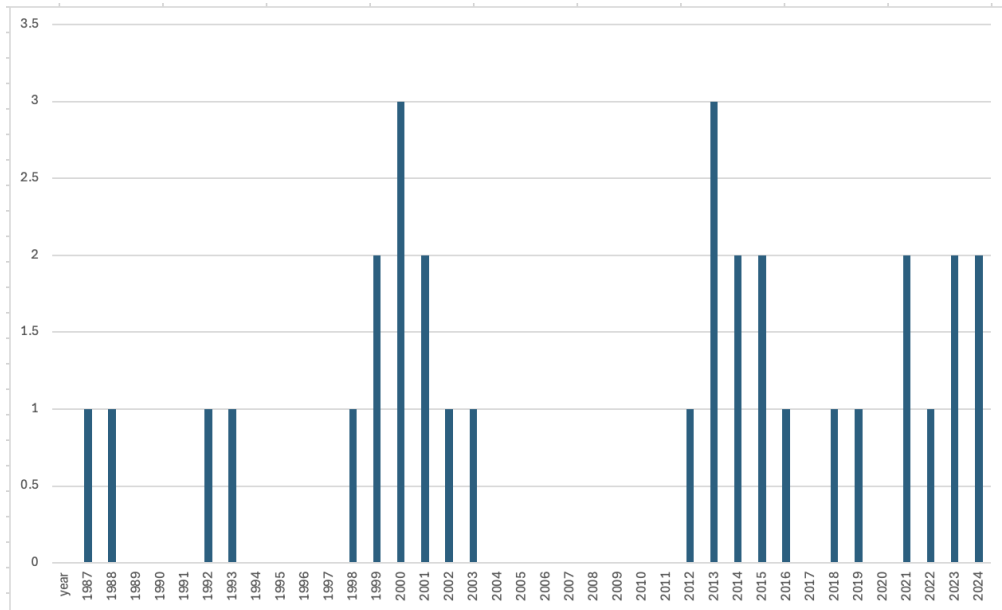
nykyään tyttöjä on pääsääntöisesti runsaat 10 % osallistujista. Ero on kuitenkin todella pieni. EGMO ei tietenkään vaikuta kaikkiin maihin. Nimestään huolimatta kilpailuun osallistuu joukkueita myös Euroopan ulkopuolelta. Kaikki Euroopan maat eivät taas osallistu kilpailuun. Esimerkiksi Ruotsi ei osallistu. Ei ehkä myöskään ole realistista odottaa suuria muutoksia nopeasti. Lisäksi muutokset voivat olla seurausta pitkäaikaisesta kehityksestä, joka näkyy kuvassa, jossa on tyttöjen osuus IMO:ssa kautta vuosien. Ensimmäisinä vuosina kilpailijoiden kokonaismäärä oli todella pieni, jolloin tyttöjen osuus heittelehti helposti. (Kuvaaja on tehty hyödyntäen sivuston <https://www.imo-official.org/> tietoja kilpailijoiden kokonaismäärästä ja tyttöjen lukumäärästä.)

Tyttöjen osuus kilpailijoissa koko kilpailussa



Suomessa muutos sen sijaan on ollut selkeä. Siinä missä ennen EGMO:on osallistumista oli monia vuosia ilman yhtään tyttöä joukkueessa, on EGMO:on osallistumisen jälkeen lähes joka vuosi ollut ainakin yksi tyttö joukkueessa. Tänä vuonna ei ollut. Oheisessa kuvaajassa näkyy Suomen tyttöinä kilpailleiden lukumäärä kunkin vuoden joukkueessa vuodesta 1987 al-

kaen. Erityisen mielenkiintoista mielestäni on se, miten vuosina 2004–2011 ei joukkueessa ollut yhtään tyttöä, mutta tämä muuttui heti EGMO:on osallistumisen jälkeen. (Kuvaaja on tehty hyödyntäen sivuston <https://www.imo-official.org/> tietoja kunkin vuoden joukkueen kilpailijoiden etunimistä.)

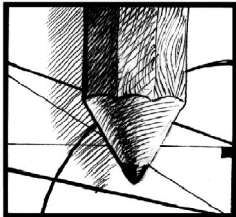


Näyttäisi siis siltä, että Suomessa EGMO:on osallistumisella on ollut selkeä vaikutus, vaikka kansainvälinen vaikutus onkin pienempi.

Kansainväliset tilastot kertovat osan koko tarinasta. Toinen puoli tarinaa on se, miten paljon valmennuksessa on tyttöjä tai osallistujia ylipäätään. Viime vuosina tilanne on ollut sikäli todella onnellinen, että valmennuksessa on ollut todella paljon osallistujia ja lisäksi

paljon todella hyviä osallistujia. Myös tyttöjä on ollut valmennuksessa aiempaa enemmän. Tässä on siis monta positiivista asiaa, sekä harrastajien määrän nouseminen että tyttöjen määrän nouseminen. Kaikesta ei varmasti voi kiittää EGMO:a. Kilpailijoiden määrä on noussut ihan viime vuosina, ja toistaiseksi en ainakaan itse tiedä, mistä tämä johtuu. Olen vain tyytyväinen.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Seikkailuja seisauksina ja tasauksina: elliptisyyskorjaus

Jouni Luukkainen

Kirjoitukseni *Seikkailuja seisauksina ja tasauksina* (Solmu 2/2018, s. 30–31¹) perustui harhaiseen ajatukseeni, että Aurinko olisi etelään nollapituuspiirillä sijaitsevasta Lontoon Greenwichin observatoriosta aina, kun siellä on kello 12.00 normaaliaikaa. Maan radan elliptisyyden tähden niin on kuitenkin vain keskimäärin, ja heilahdus kumpaankin suuntaan on 16 minuuttia.

Auringon etelässäoloajat Helsingissä Vanhankaupunginlahden lävistävällä 25° itäisellä pituuspiirillä löydetään Ursan Tähdet-vuosikirjasta tai saadaan Helsingin Sanomien julkaisemien Helsinkiä (samaa pituuspiiriä ja pohjoista leveyttä 60°) koskevien Auringon nousu- ja laskuaikojen keskiarvona. Seuraavassa nähdään, että tämä riittää oikeampiin laskuihin.

Tutkin uudestaan, missä eteläisen kääntöpiirin pisteessä Aurinko oli zeniitissä talvipäivänseisauksena 21.12.2017 klo 18.28. Tuona päivänä Helsingissä Aurinko nousi klo 9.22, oli etelässä klo 12.18 ja laski klo 15.14. Nyt 18 h 28 min – 12 h 18 min = 6 h 10 min. Tässä ajassa Maa pyörähtää akselinsa ympäri $(6 + 10/60) \cdot 15^\circ = 91,5^\circ$. Etsittävä piste on siis läntistä pituutta $91,5^\circ - 25^\circ = 66,5^\circ$. Aiempi tulos 67° eroaa tästä $0,5^\circ$.

Tutkitaanpa uudestaan myös, missä päiväntasaajan pisteessä Aurinko oli zeniitissä syyspäiväntasauksena 23.9.2014 klo 5.29. Tuona päivänä Helsingissä Aurinko nousi klo 7.06, oli etelässä klo 13.12 ja laski klo 19.17. Kellonajat siis kesäaikaa. Nyt 13 h 12 min – 5 h 29 min = 7 h 43 min. Tässä ajassa Maa pyörähtää akselinsa ympäri $(7 + 43/60) \cdot 15^\circ = 115,75^\circ$. Etsittävä piste on siis itäistä pituutta $25^\circ + 115,75^\circ = 140,75^\circ$. Aiempi tulos $142,75^\circ$ eroaa tästä 2° . Virhe vastaa etäisyyttä $(2^\circ/360^\circ) \cdot 40\,000\text{ km} = 222\text{ km}$.

Harjoiteltavaksi ja juhlittavaksi

Vuonna 2025 päiväntasausten ja -seisausten ajankohdat ovat 20.3. klo 11.01, 21.6. klo 5.42, 22.9. klo 21.19 ja 21.12. klo 17.03. Noina päivinä Aurinko on Helsingissä etelässä klo 12.27, 13.22, 13.13 ja 12.18. Laskun jälkeen voi kartalta katsoa, minkä pisteen yllä Aurinko kunakin noista neljästä hetkestä suunnilleen on ja missä siis on parhaat bileet.

¹<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/2/seikkailuja.pdf>



Jääkö rahapeliaddikti väistämättä tappiolle?

Tuomas Korppi

Johdanto

Mikäli lukija on seurannut yhtään rahapelivalistusta, hän on kuullut, että sellaisissa rahapeleissä, joissa pelataan taloa vastaan, kuten automaattipeleissä sekä ruletissa ja muissa kasinopeleissä, pelaaja jää pitkän päälle tappiolle. On nimittäin olemassa matemaattisia tuloksia, jotka sanovat, että kun samaa peliä toistetaan riittävän kauan, pelisarjan keskiarvokäyttäytyminen muistuttaa lähes varmasti pelin teoreettista keskiarvokäyttäytymistä, jonka rahapelien järjestäjät luonnollisesti säätävät itselleen edulliseksi.

Tämä vanha viisaus mielessäni ryhdyin kirjoittamaan valistuksellista artikkelia rahapelien vaaroista. Sain esitettyä teorian, mutta siinä vaiheessa kun ryhdyin tekemään numeerisia laskelmia, törmäsin yllättävään ilmiöön: Joissain tapauksissa melkein varma teoreettiseen keskiarvokäyttöön pääseminen kestää niin kauan, että on kyseenalaista, pelaavatko edes piintyneimmät addiktit niin pitkään.

Tässä tekstissä esitämme ensin teorian, jossa kieltämättä osoitetaan, että rahapeliaddikti jää pitkän päälle tappiolle. Sen jälkeen annamme menetelmän, jolla voi arvioida sitä, mitä ”pitkän päälle” edellisessä virkkeessä käytännössä tarkoittaa, ja teemme menetelmällä esimerkkilaskelmia.

Tilanne

Jussi on addiktoitunut rulettiin. Hän on addiktoitunut niin pahasti, että hän pelaa äärettömän jonon pelikier-

roksia, jokaisen euron panoksella. Jussi on kuullut, että ruletissa kasino jää voitolle siksi, että ruletissa on nolla, joten hän pelaa joka kierroksella nollaa kuvitellen pelaavansa ”talon edulla”.

Ruletissa on 37 numeroa, joista arvotaan yksi. Nollan sattuessa Jussi saa panoksensa takaisin 36-kertaisena, ja muussa tapauksessa Jussi häviää panoksensa.

Voittotodennäköisyys on siis $\frac{1}{37}$. Ajattelempa häviötä negatiivisena voittona. Voiton odotusarvo on todennäköisyyksillä painotettu voittosummien keskiarvo, tässä tapauksessa siis $\frac{36}{37}(-1) + \frac{1}{37}(36-1) = -\frac{1}{37}$. Odotusarvo on se, kuinka paljon Jussi keskimäärin voittaa yhdellä pyöräytyksellä. Tässä tapauksessa Jussi siis häviää keskimäärin $\frac{1}{37}$ euroa.

Käsitlemme rulettia siksi, että se on yksinkertainen peli. Esityksemme on kuitenkin sillä tavoin yleinen, että se soveltuu myös muihin kasinopeleihin sekä raha-automaattipeleihin, kunhan koko ajan pelataan samaa peliä samalla panoksella taloa vastaan. Oletamme koko ajan, että voittosumman odotusarvo on negatiivinen. Luonnollisesti pelien järjestäjät pitävät huolen siitä, että näin todella on. Joissain tällaisissa peleissä pelaajalla on joitain valintoja, esimerkiksi automaattipokerissa pelaaja saa valita, mitkä kortit hän vaihtaa. Voimme olettaa pelaajan pelaavan parhaalla mahdollisella strategialla, pelin järjestäjä kyllä pitää huolen, että myös tällöin voittosumman odotusarvo on negatiivinen. Alla olevassa esityksessä puhumme ruletinpyöräytyksistä, mutta lukija voi ajatella sen tarkoittavan myös muuta rahapeliä.

Satunnaismuuttuja

Oletetaan, että $t_1, \dots, t_m$ ovat tapahtumia, joista joku aina toteutuu, eikä kaksi voi toteutua yhtä aikaa. Jokaiseen tapahtumaan on liitetty todennäköisyys p_i , jolla tapahtuma tapahtuu, sekä reaalityluku r_i . Tällaista systeemiä kutsutaan satunnaismuuttujaksi, jota merkitään esimerkiksi kirjaimella X .

Rulettiesimerkissämme eräs mahdollinen satunnaismuuttuja olisi ensimmäinen ruletinpyöräytys. Tapahtumia olisi kaksi, ensimmäisessä Jussi voittaa ja toisessa Jussi häviää. Tällöin $p_1 = \frac{1}{37}$ ja $p_2 = \frac{36}{37}$. Olemme tässä artikkelissa kiinnostuneet Jussin rahapussista, joten $r_1 = 35$ ja $r_2 = -1$, Jussin voitot ja tappiot kyseisissä tapauksissa.

Satunnaismuuttujassa tapahtumia voi olla enemmänkin kuin kaksi. Esimerkiksi useissa peleissä on useita erilaisia voittoja, joista jokainen vaatii oman tapahtumansa. Esimerkiksi automaattipokerissa voittosumma riippuu siitä, millaisen pokerikäden pelaaja saa.

Olkoon X satunnaismuuttuja ja k reaalityluku. Satunnaismuuttuja kX tarkoittaa satunnaismuuttujaa, joka saadaan X :stä kertomalla jokainen r_i luvulla k . Satunnaismuuttuja $X + k$ tarkoittaa satunnaismuuttujaa, joka saadaan X :stä lisäämällä jokaiseen lukuun r_i luku k .

Seuraavaksi määrittelemme satunnaismuuttujien summan $X + Y$, jotka voivat olla esimerkiksi kaksi eri ruletinpyöräytystä. Summamuuttujan tapahtumat t_k'' ovat sellaisia kuten " t_i ja t_j tapahtuvat", missä t_i on X :n tapahtuma ja t_j on Y :n tapahtuma. Todennäköisyydet ovat todennäköisyyksiä, että noin todella käy. Jos X ja Y ovat kaksi eri ruletinpyöräytystä, edellisen tapahtuman todennäköisyys on $p_i p_j'$, mutta monimutkaisemmissa tilanteissa todennäköisyys voi olla jotain muuta. Tapahtuman arvo r_k'' on t_i :n ja t_j :n arvojen summa, siis $r_i + r_j'$. Satunnaismuuttujien tulo XY määritellään samoin, nyt vain $r_k'' = r_i r_j'$.

Huomautus: Tutkitaan satunnaismuuttujaa $X + X$. Sen tapahtumat ovat " t_i ja t_j ", missä t_i ja t_j ovat X :n tapahtumia. Jos $i \neq j$, niin t_i ja t_j eivät voi satunnaismuuttujan määritelmän nojalla tapahtua yhtä aikaa, joten " t_i ja t_j " on mahdoton tapahtuma, ja se voidaan jättää pois. Jäljelle jää siis tapahtumat " t_i ja t_i ". Tämä kuitenkin on sama tapahtuma kuin t_i , joten X :llä ja $X + X$:llä on täsmälleen samat tapahtumat.

Odotusarvo

Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathbb{E}[X] = \sum_i p_i r_i$, eli arvojen r_i todennäköisyyksillä painotettu keskiarvo.

Seuraava lemma nähdään selvästi todeksi.

Lemma 1. $\mathbb{E}[kX] = k\mathbb{E}[X]$ ja $\mathbb{E}[X + k] = \mathbb{E}[X] + k$.

Myös seuraavat kaksi vaikeampaa lemmaa pätevät.

Lemma 2. Jos X, Y ovat satunnaismuuttujia, $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Todistus: Oletetaan, että X :n todennäköisyydet ja arvot ovat p_i ja r_i , ja Y :lle vastaavasti p_j' ja r_j' .

Nyt

$$\mathbb{E}[X + Y] = \sum_k p_k''(r_i + r_j') = \sum_k p_k'' r_i + \sum_k p_k'' r_j'.$$

Jos summassa $\sum_k p_k'' r_i$ on termi $p_k'' r_i$, niin silloin t_k'' on tapaus " t_i ja t_j' " jollain j . Kun tutkitaan tiettyä i :tä ja käydään kaikki tällaiset k :t läpi, vastaavat p_k'' :t summautuvat p_i :ksi. Näin ollen $\sum_k p_k'' r_i = \sum_i p_i r_i = \mathbb{E}[X]$. Vastaavasti $\sum_k p_k'' r_j' = \mathbb{E}[Y]$, ja väite seuraa. $\square$

Lemma 3. Olkoot X ja Y ruletinpyöräytyksiä koskevia satunnaismuuttujia, joiden tapahtumat koskevat eri ruletinpyöräytyksiä (kumpikin yhtä). Jos μ on X :n odotusarvo ja μ' on Y :n odotusarvo, $\mathbb{E}[(X - \mu)(Y - \mu')] = 0$.

Todistus: Olkoon $X' = X - \mu$ ja $Y' = Y - \mu'$. Nyt X' ja Y' koskevat eri ruletinpyöräytyksiä, ja selvästi $\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[Y'] = 0$. Olkoot p_i, r_i satunnaismuuttujaa X' koskevia arvoja ja p_j', r_j' satunnaismuuttujaa Y' koskevia arvoja.

Osoitetaan, että $\mathbb{E}[X'Y'] = \mathbb{E}[X']\mathbb{E}[Y']$.

Kun kumpikin puoli puretaan auki, kummastakin saadaan

$$\sum_{i,j} p_i p_j' r_i r_j',$$

joten väite pätee. Nyt väitös seuraa siitä, että $\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[Y'] = 0$. $\square$

Päätulos

Tässä luvussa ryhdymme leikkimään varianssilla, joka on keskihajonnan neliö. Olkoon X satunnaismuuttuja ja μ sen odotusarvo. Muuttujan X varianssi saadaan kaavalla $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$, missä potenssiinokorotus on määritelty kertolaskun avulla. Lukijan kannattaa huomata, että varianssi määritellään tavallisestikin luvun $(r_i - \mu)^2$ keskiarvoksi, joten määritelmämme yhtyy tavalliseen varianssin määritelmään.

Merkitään $\Pr(X \geq k)$ todennäköisyyttä, että X on vähintään k , eli niiden p_i :den summaa, joita vastaavat r_i :t ovat vähintään k .

Lemma 4. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka keskiarvo on μ ja varianssi σ^2 . Tällöin kaikilla positiivisilla reaalityluilla k pätee

$$\Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Todistus: Nyt

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \\ &= \sum_{i'} p_{i'}(r_{i'} - \mu)^2 + \sum_{i''} p_{i''}(r_{i''} - \mu)^2, \quad (*)\end{aligned}$$

missä i' juoksee niiden t_i :den yli, joille $|r_i - \mu| \geq k\sigma$ ja i'' juoksee niiden t_i :den yli, joille $|r_i - \mu| < k\sigma$.

Yhtälön (*) oikea puoli on suurempi kuin

$$k^2\sigma^2 \Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) + 0 \cdot \Pr(|X - \mu| < k\sigma),$$

mistä saadaan $\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 \Pr(|X - \mu| \geq k\sigma)$, mistä saadaan väitys jakamalla puolittain $k^2\sigma^2$:lla. $\square$

Olkoon nyt Jussin ääretöntä rulettipelijonoa vastaavat satunnaismuuttujat $X_1, X_2, X_3, \dots$. Tapahtumiin liitettyinä arvoina ovat kuten aiemminkin voittosummat, kun tappio mielletään negatiivisena voittona.

Merkitään $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, eli n :ää ensimmäistä ruletinpyöräytystä vastaavien satunnaismuuttujien keskiarvo, eli Jussin n ensimmäisen pyöräytyksen voittojen keskiarvo.

Olkoon μ odotusarvo yhdessä pyöräytyksessä ja σ^2 varianssi yhdessä pyöräytyksessä.

Teoreema 5. *Olkoon $\epsilon > 0$ reaalityökalu. Tällöin*

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Todistus: Olkoon ρ^2 muuttujan $\bar{X}_n$ varianssi. Nyt

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}[((X_1 - \mu) + \dots + (X_n - \mu))^2] \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} (X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \mathbb{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)].\end{aligned}$$

Lemman 3 nojalla termit, joissa $i \neq j$ menevät nollaan. Summa on siis yhtä suuri kuin

$$\frac{1}{n^2} \sum_i \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Siis edellisen lemmän nojalla

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\rho^2}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

$\square$

Teoreema 6. *Kun $n \rightarrow \infty$, todennäköisyys, että Jussi on n ruletinpyöräytyksen jälkeen häviöllä, lähenee ykköstä.*

¹Kasinolla rulettia pelataan noin 40 pyöräytystä tunnissa, eli 320 pyöräytystä 8 tunnin päivän aikana. Jos Jussi pelaa kuukauden täysipäiväisesti, hän pelaa tuon 10000 pyöräytystä.

²Huomaa, että tämä ei päde lotolle ja vastaaville peleille, joissa on hyvin suuria, hyvin harvoin saatavia voittoja.

Todistus: Oletimme, että $\mu < 0$. Valitaan $0 < \epsilon < |\mu|$. Olkoon t, p, r satunnaismuuttujan $\bar{X}_n$ tapaus. Jos $|r - \mu| < \epsilon$, pätee $r < 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että $\Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \leq \Pr(\bar{X}_n < 0)$, ja sen osoittamiseksi, että oikea puoli lähenee ykköstä, riittää osoittaa, että vasen puoli lähenee ykköstä.

Edellisen teoreeman nojalla

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

joten

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Kun $n \rightarrow \infty$, oikea puoli lähenee ykköstä, joten $\Pr(\bar{X}_n < 0)$ lähenee ykköstä. $\square$

Numeerisia arvioita

Nyt siis tiedämme, että jos Jussi pelaa riittävän pitkään, hän jää lopulta tappiolle. Kuitenkin nyt tapahtuu jotain yllättävää: Jos pelataan kymmenentuhatta kierrosta, Jussilla on vielä useamman kymmenen prosentin todennäköisyys jäädä voitolle¹. Jussin pelissä talon etu on niin pieni, että edellä kehitetty teoria alkaa potkia kunnolla vasta useiden satojen tuhansien pelikertojen kohdalla.

Annamme tässä luvussa laskumenetelmän, jolla pystyy laskemaan karkeita arvioita sille, millä todennäköisyydellä pelaaja on tappiolla pelisarjan jälkeen, jos talon etu yksittäisessä pelissä, keskihajonta yksittäisessä pelissä ja pelikierrosten määrä tiedetään.

Jos pelin odotusarvo on μ , talon etu yksittäisessä pelissä on $|\mu|$. Teoreeman 5 todistuksessa totesimme, että jos ρ on satunnaismuuttujan $\bar{X}_n$ keskihajonta ja σ on yksittäisen pelin keskihajonta,

$$\rho^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Koska $\bar{X}_n$ on n pelin voittojen keskiarvoa kuvaava satunnaismuuttuja, $n\bar{X}_n$ kuvaa n pelin voittojen summaa. Näin ollen odotusarvo n pelin voittojen summalle on $n\mu$ ja keskihajonta summalle on $\sigma\sqrt{n}$.

On olemassa teoreema, jonka mukaan $\bar{X}_n$ alkaa vaikuttaa normaalijakaumalta ainakin sen suhteen, kuinka todennäköisyyksiä $\Pr(\bar{X}_n < k)$ lasketaan, kun n on hyvin suuri. Tavallisissa rahapeleissä näin käy ainakin silloin, kun n on vähintään tuhansia². Näin ollen se muuttuja, josta olemme kiinnostuneet, $n\bar{X}_n$, voidaan korvata normaalijakaumalla, jonka odotusarvo on $n\mu$ ja keskihajonta $\sigma\sqrt{n}$.

Voit laskea todennäköisyyden, että pelaaja on tappiolla pelisarjan jälkeen. Määrää ensin, kuinka monen keskihajonnan $\sigma\sqrt{n}$ päässä talon etu $|n\mu|$ on nolasta. Sen jälkeen voit katsoa alla olevasta taulukosta karkean arvion todennäköisyydelle, että pelaaja on tappiolla pelisarjan jälkeen.

Kuinka monen keskihajonnan päässä	Todennäköisyys olla tappiolla
0,5	69 %
1	84 %
1,5	93 %
2	98 %
2,5	99,3 %
3	99,9 %

Jussin pelissä talon etu on noin 0,027 ja keskihajonta noin 5,8. Tämä tarkoittaa sitä, että kymmenentuhannen pelin sarjassa talon etu on noin 270 ja keskihajonta 580. Olemme siis taulukon rivin 0,5 keskihajontaa suuruusluokassa, todennäköisyys jäädä tappiolle on vain 69 %.

Jos Jussi pelaa vuoden rulettia 8 tuntia päivässä, hän pelaa suuruusluokkaa 100000 peliä. Tällöin talon etu on noin 2700 ja keskihajonta noin 1800. Todennäköisyys jäädä tappiolle on noin 93 %.

Kansainvälisessä ruletissa talon etu on kuitenkin melko pieni verrattuna esim. Veikkauksen peliautomaatteihin, jossa talon etu on luokkaa $0,1 \times$ panos. Veikkauksen nykyisten automaattipelien keskihajontoja on kuitenkin vaikea alkaa laskemaan, joten käytämme esimerkkinä RAY:n vanhaa automaattirulettia, jossa on 13 numeroa, ja veikatessaan oikein numeroa saa panoksen takaisin 12-kertaisena.

Tällöin talon etu on 0,077, ja keskihajonta 3,2. Tuhannella pyöräytyksellä talon etu on 77 euroa ja keskihajonta 100, eli tappiollejäämistodennäköisyys on jossain 69 ja 84 prosentin välissä. Kymmenellä tuhannella pyöräytyksellä talon etu on 770 euroa ja keskihajonta 320, eli tappiollejäämistodennäköisyys on yli 98 %.

Alla on taulukko joidenkin helposti laskettavien pelien talon eduista ja keskihajonnoista. Kaikissa oletetaan euron panos. Olemme kiinnostuneet suuruusluokista, joten lukuja on pyöristelty.

Tuplaus on peli, jossa on annettu arvausten maksimimäärä k . Pelaaja asettaa aluksi panokseksi euron. Sitten hän arvaa, tuleeko iso vai pieni ja kääntää kortin. Jos kortti on 2-6 ja pelaaja arvasi pientä, hän voittaa.

Jos kortti on 8-A ja hän arvasi isoa, hän voittaa. Seisalla pelaaja häviää aina. Jos pelaaja hävisi, peli loppuu. Jos pelaaja arvasi oikein, hän arvaa uudelleen ja kääntää uuden kortin samalla tavalla. Näin jatketaan k kertaa, ja jos pelaaja arvaa k kertaa oikein, hän voittaa panoksensa takaisin 2^k -kertaisena.

Peli	Talon etu	Keskihajonta
Ruletti, pelataan 1 numeroa	0,027	5,8
Ruletti, pelataan 6 numeroa	0,027	2,2
Ruletti, pelataan punaista	0,027	1
Automaattiruletti, pelataan 1 numeroa	0,077	3,2
Automaattiruletti, pelataan punaista	0,077	1
Tuplaus, 5 arvausta	0,34	4,5
Tuplaus, 7 arvausta	0,43	8,5

Lopuksi

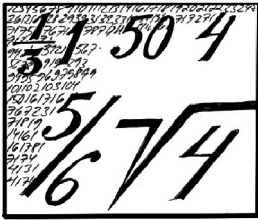
Yllä todistettu Teoreema 6 on melko heikko verrattuna siihen, mitä kaikkea pystytään todistamaan. Kuitenkin muokkaamalla Päättös-luvun todistuksia saadaan pari vahvempaa tulosta, jotka jätetään vaikeahkoiksi harjoitustehtäviksi.

Ensinnäkin tiedetään, että paitsi että riittävän pitkissä pelisarjoissa pelaajat jäävät tappiolle, he menettävät peliä jatkaessaan yhä suurempia rahamääriä.

Tehtävä 1. *Osoita, on olemassa reaaliuku $\ell > 0$ siten, että seuraava pätee: Kun $n \rightarrow \infty$, todennäköisyys, että n :n ruletinpyöräytyksen jälkeen Jussi on vähintään ℓn yksikköä tappiolla, lähenee ykköstä.*

Myöskin harva pelaa koko ajan samaa peliä samalla tavalla. Jussi voi vaihdella ruletin panosta (tietyissä rajoissa), joskus pelata automaattipokeria, joskus hedelmäpeliä jne. Seuraavassa tehtävässä oletamme, että jonon $X_1, X_2, \dots$ pelit eivät ole välttämättä samoja, vaan ne voivat vaihdella. Jotain pitää kuitenkin olettaa, että saisimme todistettua tuloksia. Oletamme, että on olemassa $\mu_0 < 0$ niin, että kaikkien X_i :den odotusarvot ovat pienempiä (eli itseisarvoltaan suurempia) kuin μ_0 , sekä $\sigma_0 > 0$ niin, että kaikkien X_i :den varianssit ovat pienempiä kuin σ_0^2 .

Tehtävä 2. *Osoita edellisillä oletuksilla seuraava: Kun $n \rightarrow \infty$, todennäköisyys, että Jussi on n pelikerran jälkeen häviöllä, lähenee ykköstä.*



Topologiaa talutushihnassa

Petri Laarne

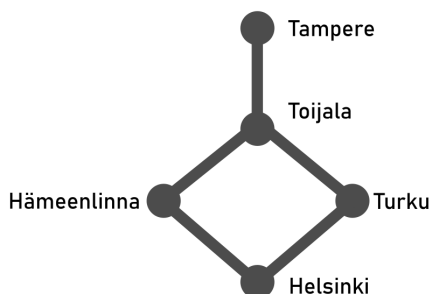
Väitöskirjatutkija, Helsingin yliopisto
<https://www.nollakohta.fi>

Koiranomistaja tunnistaa tilanteen: Puistokävely ja koira pitkän hihnan toisessa päässä. Hetki upota omiin ajatuksiinsa ja koiran seuralla nenäänsä – ja sekuntia myöhemmin matka tyssää töksähtäen, kun jeppe on vetänyt kierroksen jonkin puun ympäri.

Tämän tilanteen toistuessa kymmenettä kertaa lenkin aikana voisi tehdä mieli sanoa pari rumaa sanaa. *Mate-matiikkalehti Solmu* kuitenkin suosittelee toista tietä: ihailla, kuinka koira on löytänyt olennaisen osan puiston *topologiasta*.

Mitä on topologia?

Topologia tutkii kappaleiden ja avaruuksien ominaisuuksia, jotka eivät riipu tarkoista mitoista. Esimerkistä käy kartta junaverkosta: olennaista on, että viivat yhdistävät oikeat asemat toisiinsa, ei niinkään se, ovatko viivojen pituudet ja suunnat järkeviä.



Tarkkaavainen lukija saattaa huomata, että Turku ja Hämeenlinna eivät ole edellisessä kartassa tutuilla paikoillaan. Topologisesti ne ovat kuitenkin ihan oikein: Toijalan ja Helsingin välissä. Maantieteellisesti epäkorrektia, mutta junareitin kannalta se ja sama.

Tampereen ja Helsingin välistä etäisyyttä voidaan mitata kilometreissä, mutta yhtä hyvin sen voisi mitata asemanväleissä tai matka-ajassa. Eri mittareita voisi kuvata muuttamalla viivojen keskinäisiä pituuksia, mutta etäisyysmitan valinta ei vaikuta asemien väliin yhteyksiin: *topologisesti* asialla ei ole väliä.

Klassisempi määritelmä topologille on henkilö, joka ei näe eroa kahvikupin ja donitsin välillä. Sekä kupissa että donitsissa on täsmälleen yksi reikä, josta voi pujottaa sormensa läpi. Tällä kertaa topologinen ominaisuus on sormen mentävien reikien lukumäärä.

Muovailuvahasta tehdyn donitsin voisi painella kahvikupiksi ilman, että vahaa tarvitsisi repiä tai yhdistellä:



Munkkipossusta puolestaan ei saa donitsia ilman rei'itintä, joten ne ovat topologisesti erilaiset.

Donitsin ja kahvikupin välinen yhteys voidaan ilmaista matemaattisen tarkasti. Vastaus löytyy hieman yllättäen koiran, talutushihnan ja puun yhtymäkohdasta.

Matemaattinen talutushihna

Aloitetaan määrittelemällä koirapuisto. Olkoon puisto ääretön taso, jossa ainoan puun virkaa toimittaa yksi piste. Hankitaan lisää virikkeitä vähän myöhemmin.

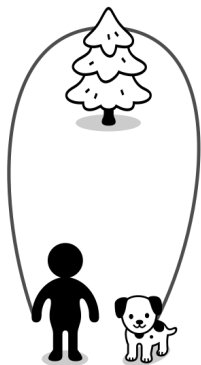
Olkoot koira ja sen ulkoiluttaja pistemäisiä ja heidän välissään äärettömän pitkä flexi-hihna, joka kelaautuu sisään nappia painamalla ja joka ei koskaan tukkeudu koirankarvoista.

Annetaan koiran kirmata villisti aikansa ja kutsutaan se sitten luokse. Kun koira on vierellä, painetaan taluttimen nappia. Kelautuuko hihna kokonaan vai jääkö se puuhun kiinni?

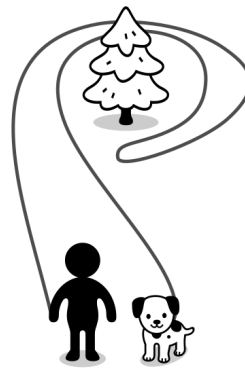
Jos hihna on näin, niin se kelaautuu nätisti:



Mutta jos koira on kiertänyt puun, hihna kiristyy puun ympäri:



Jos koira on kiertänyt puun ensin myötäpäivään ja sitten vastapäivään, niin kierrokset kumoavat toisensa ja hihna kelaautuu:



Jotta tilanne olisi matemaattisesti mielenkiintoisempi, voisimme erotella erilaiset jumittumisen tavat toisistaan. Hihna voi kiertää puun ympäri yhden, kaksi tai seitsemäntoista kertaa, ja sillä todella on vaikutusta taluttajan ärsytystasoon.

Lisäksi myöhempää varten on hyvä erottaa myötä- ja vastapäivään kiertämiset. Sanotaan vaikka, että vastapäivään tehty kierrokset ovat negatiivisia. Tällöin toimii edellisen kuvan sääntö

$$1 + (-1) = 0 = \text{ei sotkeutumista.}$$

Kaiken kaikkiaan siis sotkeutumisen astetta voidaan mitata yhdellä kokonaisluvulla. Kokonaislukujen joukkoa merkitään usein kirjaimella $\mathbb{Z}$. Topologi sanoisi, että yhden puun puiston ärsyttävyyssaste on siksi $\mathbb{Z}$.

Paluu hetkeksi todellisuuteen

Teimme aika rankkoja yksinkertaistuksia, mutta ne ovat kaikki matemaattisesti perusteltuja.

Ensinnäkään puun sijainnilla ei pitäisi olla mitään merkitystä sen suhteen, millaisilla tavoilla hihna voi kiertyä sen ympäri. Pistemäinen puu voidaan myöskin korvata ympyrällä tai oikeastaan minkälaisella suljetulla kuviolla tahansa: olennaista on vain, että hihna ei pääse sujahtamaan siitä läpi.

Entä jos puistossa on avustaja, joka voi mennä heiluttelemaan hihnaa? Voisiko hihnan kelautumista auttaa jotenkin? Ei voi, jos hihnaa ei ylety heittämään puun yli ja hihnan toisessa päässä olevat ihminen ja koira pysyvät paikallaan.

Pohdi tätä: Vakuuta itsesi siitä, että avustaja ei voi yksinään purkaa puun ympärille kiertynyttä hihnaa.

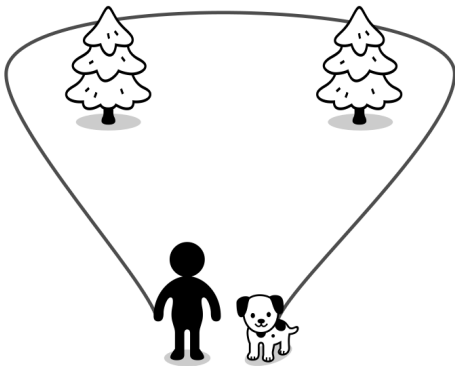
Lisää puita nuuhkittavaksi

Tehdäänpä sitten seuraava matemaattinen askel ja tarkastellaan puistoa, jossa on kokonaiset kaksi puuta. Nyt siis tasossa on kaksi pistettä, joiden läpi viiva ei voi kulkea. Millä kaikilla tavoin hihna voi nyt sotkeutua?

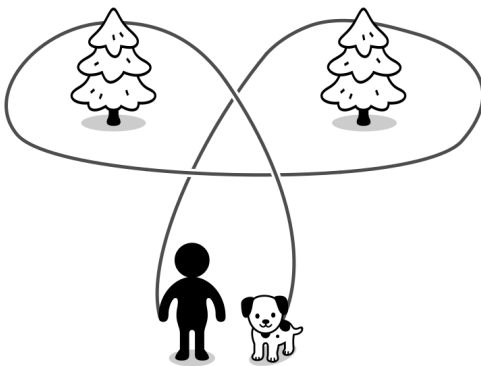
Ensimmäinen veikkaus voisi olla, että lasketaan erikseen kierrokset kummankin puun suhteen. Sotkeutumista kuvaisi lukupari (a, b) , jossa sekä a että b ovat kokonaislukuja. Matemaattinen merkintä tällaisten parien joukolle on $\mathbb{Z}^2$. Ärsytystä toiseen potenssiin!

Tämä idea on valitettavasti väärä.

Jos koira kiertää myötäpäivään ensin vasemman ja sitten oikean puun, hihna kiristyy tähän muotoon:



Jos taas koira kiertää myötäpäivään ensin oikean ja sitten vasemman puun, tulos on tämä:



Nämä kaksi tapaa sotkea talutushihna ovat ihan erilaiset, eikä avustaja pysty heiluttelevaan yhtä toiseksi. Miten tämä ero voidaan sitten kuvailla?

Koiranulkoiluttajan ratkaisu on kuin onkin turvautua rumiin sanoihin. Tässä *sana* ymmärretään kuitenkin hyvin tarkassa matemaattisessa mielessä, nimittäin... peräkkäisinä kirjaimina.

Sovitetaan, että kirjain x tarkoittaa ”kierrä vasen puu myötäpäivään” ja kirjain y puolestaan ”kierrä oikea puu myötäpäivään”. Sitten ensimmäistä kuvaa vastaa sana xy ja toista yx . Selkeästi kaksi eri sanaa.

Nyt tulee abstrakti osuus, älä pelästy: *Ryhmä* on algebran termi joukolle, jossa on määritelty jokin laskutoimitus.¹ Esimerkiksi kokonaisluvut ja yhteenlasku muodostavat ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$.

Yleensä matikan kurssilla xy tarkoittaa kertolaskua. Nollasta poikkeavien lukujen kertolasku $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$ on myös ryhmä. Nyt reaalityyppien joukon tilalla on kaikkien kirjaimista x ja y koostuvien sanojen joukko, ja kertolaskun tilalla on operaatio ”kirjoita peräkkäin”.

Sanojen yhdistämistä on yllättävän järkevää ajatella eräänlaisena kertolaskuna. Jos koira ei ole juossut yhdenkään puun ympäri, voidaan tilannetta kuvata symbolilla $\bullet$. Se vastaa kertolaskussa lukua 1. Jos koira juoksee sitten vasemman puun ympäri, saadaan $\bullet x$, ja se voidaan lyhentää muotoon x . Kolme kierrosta saman puun ympäri: xxx tai napakammin x^3 .

Toisin kuin tutussa kertolaskussa, tässä on kuitenkin se ero, että $xy \neq yx$. Syvemmissä matematiikassa esiintyy kuitenkin monenlaisia objekteja, joiden kertolasku ei ole vaihdannaista. Esimerkiksi tietokonegrafikassa ja tilastotieteessä tarpeellisten matriisien kertolaskussa järjestyksellä on väliä.

Jos sanoja voidaan kertoa, voidaanko niillä myös jakaa? Kyllä vain. Sovitaan, että merkki $\bar{x}$ tarkoittaa ”kierrä vasen puu vastapäivään” ja $\bar{y}$ samaa oikealle puulle. Koska myötä- ja vastapäivään tehdyt kierrokset kumoavat toisensa, niin $x\bar{x} = \bullet$, kuten myös $\bar{x}x = \bullet$. Tämä idea ei siis ole sen kummempi kuin $3 \cdot (1/3) = 1$.

Jos siis koira juoksee ensin kahdesti vasemman puun ympäri (xx) , ja sitten hepulipäissään yhden kierroksen toisin päin ja kerran oikean puun ympäri $(\bar{x}y)$, niin kaikkiaan tilanne on

$$(xx)(\bar{x}y) = x(x\bar{x})y = x\bullet y = xy.$$

Järjestyksen suhteen pitää olla tarkkana, sillä toisin päin kertolaskua ei voisi sieventää:

$$(\bar{x}y)(xx) = \bar{x}yxx.$$

Välissä oleva puu pitää huolen, että $\bar{x}$ ja x eivät pääse kumoamaan toisiaan.

Pohdi tätä: Yksittäisten kirjaimien lisäksi voidaan tehdä jakolaskua kokonaisilla sanoilla. ”Käänteisana” $(\bar{x}y)$ kumoaa kaikki sanassa xy juostut kierrokset puun ympäri. Miten $(\bar{x}y)$ kirjoitetaan merkeillä $\bar{x}$ ja $\bar{y}$? Oikea vastaus ei ole $\bar{x}\bar{y}$.

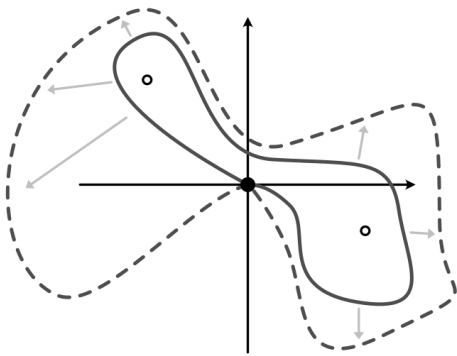
Tämä oli pitkänpuoleinen selitys, mutta kahden puun puistossa mahdollisia sotkeutumisia siis kuvaa kaikkien

¹Laskutoimituksen täytyy toteuttaa tiettyjä ehtoja, mutta jätämme ne nyt huomiotta.

kirjaimista x ja y muodostettujen sanojen joukko. Tekninen termi sille on *kahden alkion vapaa ryhmä*, ja sitä voidaan merkitä esimerkiksi symbolilla F_2 .

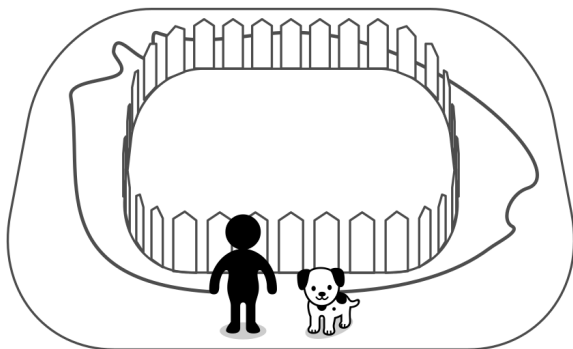
Abstrakti puisto

Koirapuisto on vertauskuva niin sanotulle *rei'itetylle tasolle*, jossa tasosta $\mathbb{R}^2$ on poistettu n eri pistettä. Hihnan jumittumisia kuvaava vapaa ryhmä F_n kertoo, millaisin topologisesti erilaisin tavoin kahdesta päästään yhdistetty polku voi kulkea tasossa. Polut ovat topologisesti samoja, jos ne voidaan muokata toisikseen liikkuttamatta päätepistettä tai kulkematta poistettujen pisteiden kautta.



Yhden puun puistoon liittyy muuten myöskin vapaa ryhmä F_1 . Vain yhtä kirjainta käyttämällä kaikki sanat ovat muotoa x^n , missä $n \in \mathbb{Z}$ (mukaan lukien 0 ja negatiiviset luvut). Koska $x^n x^m = x^{n+m}$, sanojen yhdistäminen palautuu tavalliseksi yhteenlaskuksi. Siksi F_1 ja $\mathbb{Z}$ ovat olennaisesti sama asia.

Avaruuteen liittyvän ryhmän (jo nähdyt F_n ja $\mathbb{Z}^n$ tai jotain vielä villimpää) selvittäminen on usein helpoin tapa verrata kahta avaruutta toisiinsa. Entä jos menimme puiston sijaan raviradalle? Tällä kertaa talutushihnan sotkeentumista kuvaa, kuinka monta kierrosta radan ympäri koira kirmaa:



Koska kierroksia kuvaa kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, on ravirata siis topologisesti sama kuin yksipuinen puisto. Radan ulkoreunalla ei siis ole merkitystä.

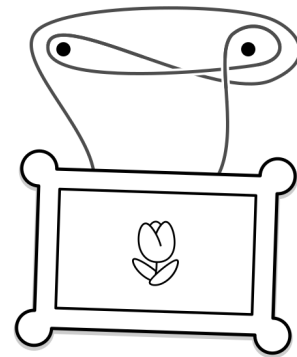
Epäkäytännön sovellus

Talutushihnan topologiaa voidaan hyödyntää sangen epäkäytännölliseen sovellukseen: mikä on *huonoin* tapa ripustaa taulu?

Jos taulun ripustaa narulla naulaan, se pysyy seinällä tasan niin kauan kuin naulakin. Turvallisuuden kannalta voisi siis olla fiksu käyttää useampaa naulaa – idealisoitu taulu ei tipu kunhan naru kiertää edes yhden naulan ympäri.

Lienee ilmeistä, miten tämä tehdään järkevästi.

Huonoin tapa sen sijaan on ripustaa taulu niin, että yhdenkin naulan irtoaminen saa taulun putoamaan. Tässä kuvassa niin on tehty kahdelle naulalle:



Irrota vasen naula, ja naru on kokonaan vapaa. Tai tee sama oikealle naulalle: sama tulos. Varo lasinsiruja.

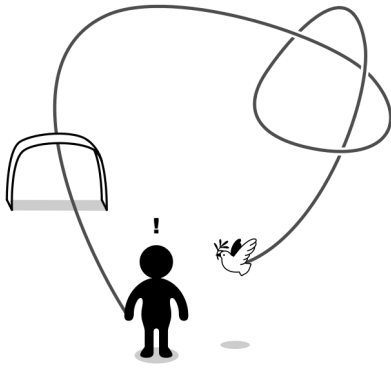
Tilanne ei eroa mitenkään koirapuistosta. Ripustusta vastaa nyt sana $xy\bar{x}\bar{y}$. Joko $x/\bar{x}$ - tai $y/\bar{y}$ -kirjainparin poistaminen jättää jäljelle joko sanan $y\bar{y}$ tai $x\bar{x}$. Loput kirjaimet kumoutuvat itsestään.

Pohdi tätä: Keksitkö, miten sama tehdään kolmella naulalla? Tämä on luultavasti helpompi miettiä ensin kirjaimilla ja vasta sitten kuvana. Vastaus on tekstin lopussa. (Lisähaaste: Entä n naulalla?)

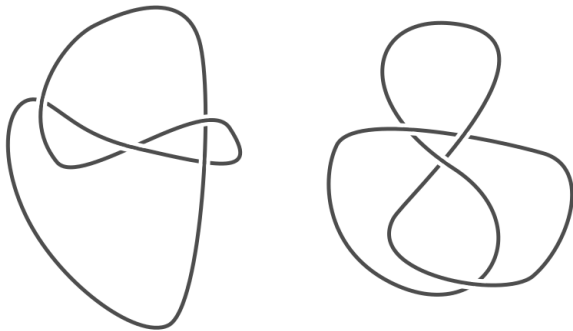
Oikea sovellus: Solmuja hihnassa

Vielä jännemmäksi menisi, jos talutushihnan päässä olisi hurtan sijasta kyyhkynen (hihna on paitsi äärettömän ohut myös painoton). Nyt hihna ei voi enää tarttua puihin, koska kyyhkynen voi nykäistä hihnan puun yli. Sen sijaan kaariportin läpi lentäminen aiheuttaa harmaita hiuksia taluttajalle.

Kyyhkynen pystyy toiseenkin juttuun, johon 2D-koira ei kykene. Lintu voisi lentää hihnan silmukalle ja sitten pujahtaa silmukan läpi – eli vetää hihnaan solmun.



Solmuteoria on matematiikan ala, jonka yksi kysymys on tunnistaa erilaiset solmut toisistaan. Se onkin vaikea homma se! Kaksi solmua voi näyttää melko erilaisilta, mutta pienellä pyörittelyllä ja vääntelyllä ne saakin muutettua toisikseen.



(Kaikki neljän ylityksen solmut, kuten yllä olevat, ovat topologisesti samoja. Kuuden ylityksen solmuja on sen sijaan jo viisi erilaista.)

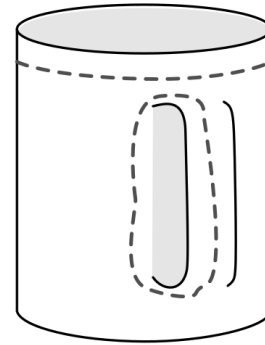
Jos talutushihna on äärettömän ohut, solmuilla ei ole vaikutusta sen kelaantumiseen. Siksi hihnan solmiutuminen ja kaariportin läpi jumiutuminen ovat eri asioita – toinen kuvaa hihnan ja toinen ympäröivän avaruuden muotoa.

Solmuteoriaa sovelletaan muuallakin kuin partiossa: sillä on analysoitu niin DNA-ketjun sotkeentumista kuin tiettyjä kvanttisysteemejäkin.

Entäpä ne donitsi ja kahvikuppi?

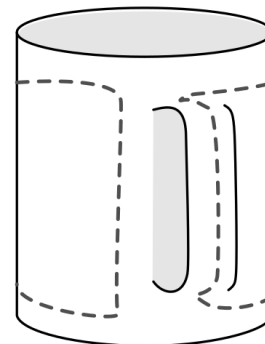
Palataanpa nyt siihen alun määritelmään topologista, joka juo donitsista ja syö kahvikuppeja. Mikä on kahvikuppiin liittyvä ryhmä?

Korvataan tällä kertaa koira muurahaisella, joka kulkee pitkin kupin pintaa. Kupin ympäri voi kulkea kahdella tavalla: joko lieriön reunaa pitkin tai kahvan kautta.

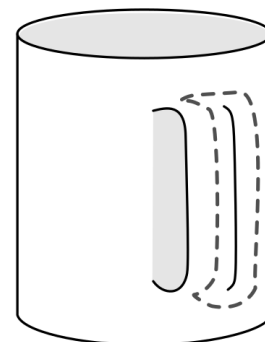


Tällä kertaa ei saada vapaata ryhmää F_2 vaan kokonaislukuparien joukko $\mathbb{Z}^2$. Lopputuloksen kannalta ei siis ole väliä, missä järjestyksessä muurahainen tekee kierrokset eri suuntiin.

Aloitetaan tässä kuvassa kahvan vierestä. Kierretään kuppi myötäpäivään ja kuljetaan sitten kahvaa pitkin. Kierretään kuppi vastapäivään ja palataan alkuun:



Viivoja voi liu'uttaa kuppia pitkin niin, että jää jäljelle vain kierros kahvan kautta:



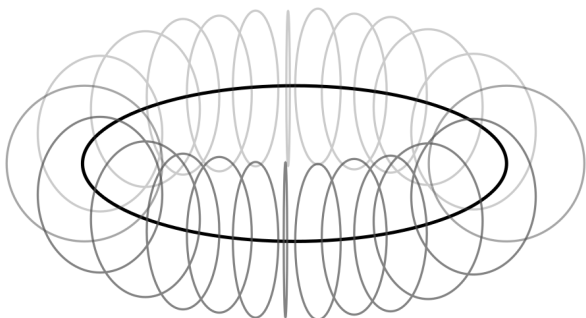
Toisin sanoen reunaa pitkin tehdyt kierrokset x ja $\bar{x}$ kumoutuivat, vaikka välissä oli kahvan kulkeminen y :

$$xy\bar{x} = x\bar{x}y = y.$$

Tämä ei ole mahdollista ryhmässä F_2 . Hankalampaa on perustella, miksi kahvikuppiin liittyy juuri $\mathbb{Z}^2$ eikä joku kolmas vaihtoehto.

Entäs donitsi?

Ainakin minulle muurahaisen jalanjälkien hahmottaminen donitsin pinnalla käy vähän hankalaksi. Ongelmaan on kuitenkin matemaattisesti täsmällinen ratkaisu. Piirretäänpä donitsista rautalankamalli:



Donitsia voi ajatella ympyränä, jonka jokainen piste toimii kohtisuorassa olevan ympyrän keskipisteenä. Koska ympyrään liittyvä ryhmä on $\mathbb{Z}$, ja donitsi on tietyssä mielessä ympyröiden tulo, on donitsin ryhmä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eli $\mathbb{Z}^2$.

Äskeisen perusteleminen matemaattisen tarkasti on joutain, mitä tehdään yliopiston maisteritason kursseilla. Ei anneta sen haitata! Olennaista on, että sekä kahvikupin että donitsin ryhmä on $\mathbb{Z}^2$. Siksi ne ovat tässä topologisessa mielessä sama asia.

Algebrallinen topologia on matematiikan ala, joka muuntaa topologiaan liittyviä kysymyksiä (millaisia polkuja on?) algebraan liittyviksi (millainen ryhmä ja laskutoimitus kuvaavat polkuja?). Ryhmiin liittyviin kysymyksiin on usein helpompi vastata, varsinkin kun yritetään todistaa jotain tarkasti.

Tämän tekstin esimerkeissä on ollut kyse niin sanotusta *polkuhomotopiasta*.² Se ei ole ainoa tapa luokitella muotoja samanlaisiksi tai erilaisiksi: eri tavat korostavat eri ominaisuuksia. Topologiaan ja jännittävän muotoisiin avaruuksiin liittyviä kysymyksiä tutkitaan myös useissa yliopistoissa Suomessa.

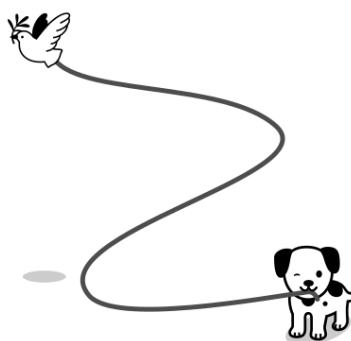
Yksi tunnetuimmista algebrallisen topologian ongelmista liittyi kyyhkysen ja hihnan jumiutumisiin 4-ulotteisen pallon pinnalla (joka itse on 3-ulotteinen, ihan kuten tutun pallon pinta on 2-ulotteinen). Tämä

Poincarén konjektuuri oli yksi seitsemästä ongelmasta, joiden ratkaisemisesta luvattiin vuonna 2000 miljoonan dollarin palkkio kustakin.

Ongelma oli tunnettu, koska se oli vaikea. Rahapalkkio teki siitä kuuluisan. Ja sehän vasta olikin, kun Grigori Perelman julkaisi siihen ratkaisun vain muutamaa vuotta myöhemmin.

Jo nämä ainekset olisivat tehneet hänestä legendan, mutta ei siinä kaikki: Hän nimittäin kieltäytyi sekä palkkiosta että arvostetusta Fieldsin mitalista, ryhtyi erakoksi ja katkaisi yhteydet muuhun maailmaan.

Ole siis varovainen koiraa ulkoiluttaessasi: saatat vielä päätyä ratkaisemaan jotain suurta.



Ratkaisu: Kolmen naulan taulutuho

Kolmea naulaa x , y ja z käyttäen yksi ratkaisu on $xy\bar{x}yzyx\bar{y}\bar{x}\bar{z}$.

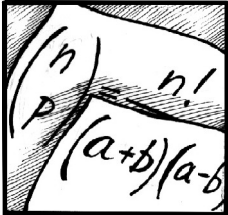
Suoraviivainen ratkaisu perustuu induktioon: Olkoon sana A ratkaisu n naulan ongelmaan. Sanassa A siis esiintyy n eri aakkosta, joista minkä tahansa poistaminen kumoaa koko sanan. Tässä $A = xy\bar{x}y$ on aiemmin nähty kahden naulan ratkaisu.

Olkoon w aakkonen, joka ei esiinny sanassa A . Sitten $Aw\bar{A}w$ ratkaisee $n + 1$ naulan ongelman.³

Kirjoittaja kiittää FT Susanna Heikkilää kommentteista mutta pitää kunnian huonoista vitseistä itsellään.

² *Homo-* ja *-topia* tulevat kreikan samaa ja paikkaa tarkoittavista sanoista.

³ Tämä algoritmi noin kaksinkertaistaa sanan pituuden jokaista lisättyä kirjainta kohti. Lyhyempiä sanoja tuottava menetelmä löytyy Demainin ym. artikkelin "Picture-Hanging Puzzles" luvusta 3.3 (esiversio osoitteessa <https://arxiv.org/abs/1203.3602>). Sitä ei tiedetä, onko tämäkään tapa tehokkain mahdollinen.



Epästandardi analyysi, mitä se on?

Jukka Tuomela

Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
jukka.tuomela@uef.fi

Differentiaalilaskennan alkuvaiheet

Ensimmäinen differentiaalilaskentaa perusteellisesti käsittelevä kirja julkaistiin 1696 [2]. Täältä ovat peräisin monet käytännöt, joita vieläkin noudatetaan: esimerkiksi vakiot valitaan aakkosten alkupäästä, a , b , kun taas muuttujat otetaan aakkosten loppupäästä, x , y . Lisäksi kirjaimella d on oma erikoisasemansa, joka on säilynyt nykypäiviin saakka, vaikka sen merkitys onkin muuttunut matkan varrella.

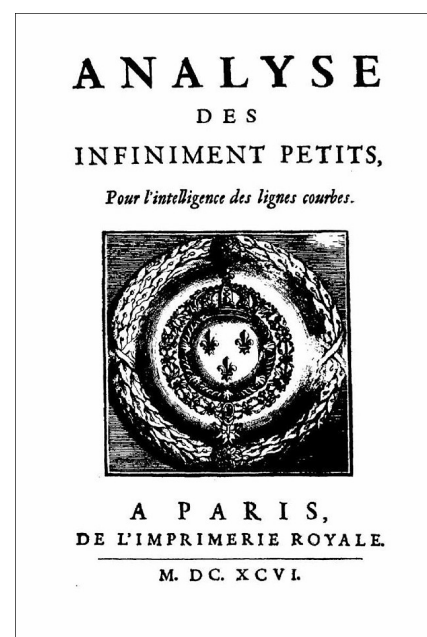
Erikoisesti kirjassa ei kerrota, kuka sen on kirjoittanut (kirjan kansi on kuvassa 1). Kirjoittajana on pidetty L'Hospitalia, mutta sittemmin on osoittautunut, että se perustuu suurelta osin Johann Bernoullin käsi-kirjoitukseen [15]. Kirjan esipuhe on kirjoitettu minä-muodossa, ja se varmaankin on L'Hospitalin kirjoittama, koska siinä hän oleellisesti myöntää, että tulokset perustuvat Johannin ja tämän isoveljen Jacobin töihin.

Je reconnois devoir beaucoup aux lumières de M^{rs} Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. Leibnis. C'est-pourquoy je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

Olen suuresti velkaa Bernoullien [Jacob & Johann] loistaville ideoille, etenkin nuoremmalle [Johann], joka on nykyään professorina Groningenissa. Olen vapaasti käyttänyt heidän ja Leibnizin tuloksia. Sik-

si hyväksyn, jos he haluavat pitää esitettyjä asioita ominaan, ja tyydyn siihen mitä he haluavat jättää minulle.

L'Hospitalin sääntö löytyy sivulta 145. Kirjan [2] nykyisessä painoksessa on myös Varignonin kirjoittama teksti vuodelta 1725, joka on tarkoitettu täydentämään ja selventämään alkuperäistä teosta.



Kuva 1: Johann Bernoullin ja L'Hospitalin kirjan kansi.

Differentiaalilaskenta aloitti aivan uuden kauden matematiikassa, ja koko 1700-luvun ajan sen avulla saatiinkin valtavasti uusia tuloksia. Kuitenkin koko jutun taustalla oli käsitteellisiä vaikeuksia: erityisesti miten pitäisi ymmärtää äärettömän pieni luku eli infinitesimaali (infiniment petit, infinitely small)? Tuo on terminäkin outo, koska äärettömän avulla yritetään kuvailla jotain hyvin pientä.

1800-luvulla sitten differentiaalilaskenta muotoiltiin aivan uudella tavalla ε - δ -tekniikan avulla, missä infinitesimaaleja ei edes mainita. Kuitenkin matemaatikkoja jäi mietityttämään ajatus siitä, miten infinitesimaalit pitäisi ymmärtää. Tulokset, joita niitten avulla oli saatu, olivat tavallaan ”liian hyviä” siinä mielessä, että tuntui mahdottomalta, että kaikki olisikin ollut vain tyhjän päällä.

Sitten Robinson selvensi infinitesimaalien käsitettä 1960-luvulla matemaattisen logiikan avulla ja näin saadusta systeemistä ruvettiin käyttämään nimitystä epästandardi analyysi [12]. Hiukan myöhemmin Nelson esitteli oman versionsa epästandardista analyysistä [10]. Nelsonin systeemi on kätevämpi, jos nimenomaan halutaan tehdä differentiaalilaskentaa, eikä oleteta teorian käyttäjältä pitkälle meneviä logiikan esitietoja. Tässä kirjoituksessa noudatetaan siis Nelsonin käytäntöjä, joihin voi tarkemmin perehtyä teosten [5, 4, 9] avulla. Epästandardin analyysin historiaa ja merkitystä on myös mielenkiintoisesti pohdittu kirjassa [3].

Mutta siirrytään sitten itse asiaan: miten Nelsonin systeemillä lasketaan?

Nelsonin systeemi

Epästandardin analyysin lähtökohta on laajentaa reaalilukujen joukkoa; tätä laajennusta merkitään edelleen symbolilla $\mathbb{R}$ ja tämän joukon alkioita sanotaan edelleen reaaliluvuiksi. ”Vanhoja” reaalilukuja sanotaan tavallisiksi reaaliluvuiksi, ja näitten lukujen kokoelmaa voidaan merkitä symbolilla $\mathbb{R}_{\text{tav}}$. Lukija kenties ihmettelee, että eikö tälle laajennetulle joukolle ja sen alueille pitäisi antaa uusi nimi, eikä nimetä perinteiset reaaliluvut uudelleen. Tietysti näinkin voisi menetellä, mutta tämä käytäntö on osoittautunut käteväksi. Syy tähän on seuraava tulos.

”Metalause”. *Se, mikä on ennenkin ollut totta, on edelleen totta.*

Toisin sanoen mikä tahansa lause, joka on todistettu perinteisessä matematiikassa, on automaattisesti totta tässä uudessa systeemissä. Esimerkiksi siis tässä uudessa systeemissä reaaliluvut muodostaa kunnan, algebran peruslause on voimassa jne. Huomaa, että käsitettävä ”tavallinen reaaliluku” ja siitä johdettuja käsitteitä ei ole olemassa perinteisessä matematiikassa.

Koska reaalilukujen joukkoa laajennettiin, niin siellä on uudenlaisia alkioita, joille on syytä antaa nimi.

Määritelmä 1. (i) *Reaaliluku x on tosi-iso, jos $|x| > a$ kaikilla tavallisilla reaaliluvuilla a .*

(ii) *Reaaliluku x on tosipieni, jos $|x| < a$ kaikilla tavallisilla positiivisilla reaaliluvuilla a .*

(iii) *Reaaliluku x on rajoitettu, jos se ei ole tosi-iso.*

(iv) *Reaaliluku x on kohtuullinen, jos se ei ole tosi-iso eikä tosipieni.* ♦

Luonnollisesti tavalliset reaaliluvut eivät voi olla tosi-isoja tai tosipieniä. Vastaavasti positiivinen kokonaisluku on tosi-iso, jos se on suurempi kuin kaikki tavalliset kokonaisluvut. Huomaa erityisesti, että tosi-isoit luvut ovat äärellisiä, vaikka ne ovatkin hyvin isoja. Siis jos N on tosi-iso kokonaisluku, niin joukko

$$S = \{1, 2, 3, \dots, N-1, N\}$$

on äärellinen. Tämä onkin eräs epästandardin analyysin mielenkiintoinen piirre: riittää usein tarkastella äärellisiä joukkoja, koska ne ovat jo tarpeeksi isoja. Välttäänsä siis äärettömiin joukkoihin liittyviltä vaikeuksilta. Ennen esimerkkiä tarvitaan kuitenkin vielä seuraava

Määritelmä 2. 1. *x ja y ovat ekvivalentteja, merkitään $x \simeq y$, jos $x - y$ on tosipieni.*

2. *x ja y ovat asympotoottisia, merkitään $x \sim y$, jos $x/y \simeq 1$.*

3. *Jos $x \simeq y$ ja y on tavallinen, niin sanotaan, että y on x :n standardiosa, merkitään $y = \text{st}(x)$.* ♦

Esimerkiksi jos x on tosipieni, niin $x \simeq 0$, joten $\text{st}(x) = 0$. Jos $f = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ on polynomi, niin $f \sim c_0$, jos $x \simeq 0$. Nyt voidaan osoittaa [5, s. 36]:

Lause 1. *Jos x on rajoitettu, niin sen standardiosa on yksikäsitteinen.* ★

Lauseesta seuraa, että jos x ja y ovat rajoitettuja, niin

$$x \simeq y \implies \text{st}(x) = \text{st}(y). \quad (1)$$

Seuraavasta tuloksesta saa jonkinlaisen mielikuvan miten isoja äärelliset luvut voivat olla.

Lause 2. *Välillä $[0, 1]$ on vain äärellinen määrä tavallisia reaalilukuja.*

Todistus. Olkoon n jokin tosi-iso kokonaisluku, jolloin siis $h = 1/n$ on tosipieni. Jaetaan väli $[0, 1]$ osiin ja merkitään $I_k = [(k-1)h, kh]$, $k = 1, \dots, n$. Olkoon $x, y \in I_k$; tällöin $|x - y| \leq h$, joten $x \simeq y$ ja siis äskeisen lauseen perusteella $\text{st}(x) = \text{st}(y)$. Siis välillä I_k voi olla korkeintaan yksi tavallinen reaaliluku, joten yhteensä niitä on korkeintaan n kappaletta. ♦

Luonnollisesti klassisen matematiikan kannalta välillä $[0, 1]$ on ylinumeroituvasti ääretön määrä reaalitykijöitä. Tässä näyttäisi olevan ristiriita: miten äärellisen joukon osajoukko voisi olla (ylinumeroituvasti) ääretön? Ongelma ratkeaa sillä, että $\mathbb{R}_{\text{tav}}$ ei ole joukko.

Nelson itse sovelsi tätä ideaa todennäköisyyslaskentaan [11]. Kirjan nimessä sanat *radically elementary* viittaavat juuri siihen, että koska äärelliset joukot voivat olla niin isoja, niin hyvin monet todennäköisyyslaskennan tulokset voidaan muotoilla äärellisten joukkojen avulla.

Infinitesimaalin käsite 1700-luvulla

Infinitesimaalin eli tosipiienen luvun selittäminen 1700-luvun termein oli kuitenkin haastavaa. Kirja [2] perustui kahteen perusoletukseen, joista ensimmäinen on seuraava.

- (O1) On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite.

Kaksi suuretta voidaan samaistaa, jos niiden erotus on tosipieni.

Oletuksessa (O1) "quantité" on käännetty suureeksi, mutta tämä voidaan myös tulkita reaalityluvaksi, vaikka tietysti tuolloin käsitettä reaalityluku ei ollut olemassa. Tämän oletuksen voisi tulkita määritelmän 2 kohdaksi 1. Varignon yritti seuraavasti [2, Varignon, s. 13]:

L'on ne doit pas dire que $x + dx$ soit $= x$ [...] mais que $x + dx$, est une abscisse qui a dans ce lieu la même propriété que x [...] de sorte que l'on pourra faire de $x + dx$ la même chose que de x .

Ei pidä sanoa, että $x + dx = x$, vaan että arvolla $x + dx$ on samat ominaisuudet kuin arvolla x , joten sitä voi käyttää samaan tapaan.

Nykytermein tämän voisi tulkita niin, että $x + dx \simeq x$, jos x on kohtuullinen ja dx on tosipieni, siis jälleen määritelmän 2 kohta 1.

Bernoullin ja L'Hospitalin kirja, samoin kuin Varignonin täydennys, oli tarkoitettu matemaatikoille: tämän oli silloista huippututkimusta, jossa esiteltiin alan uusimpia tuloksia. Kun sitten differentiaalilaskennan käyttö koko ajan laajeni, niin sitä piti ruveta opettamaan, ja tuli tarve varsinaisille oppikirjoille. Euler kirjoitti tällaisen vuonna 1755 [6]. Eulerin kirjaa voi jo pitää tyyliään ja merkinnöitään varsin modernina: algebrallinen esitystapa on paikoin hyvinkin tutunnäköistä, kun taas Bernoulli ja L'Hospital esittivät asiat hyvin geometrisesti, jolloin tyyllisesti oltiin lähellä Eukleideen geometriaa. 50 vuodessa oli siis tapahtunut valtava muutos matemaattisen tekstin kirjoittamisessa.

Euler selitti tosipiienen lukujen olemusta näin [6, ss. 51-53]:

If we accept the notation used in the analysis of the infinite, then dx indicates a quantity that is infinitely small, so that both $dx = 0$ and $adx = 0$, where a is any finite quantity. Despite this, the geometric ratio adx/dx is finite, namely $a/1$. For this reason these two infinitely small quantities dx and adx , both being equal to 0, cannot be confused when we consider their ratio.

If 1 or any other finite quantity is divided by something infinitely small or 0, the quotient will be infinitely large, and thus an infinite quantity. Since the symbol ∞ stands for an infinitely large quantity, we have the equation $a/dx = \infty$. The truth of this is clear also when we invert: $a/\infty = dx = 0$.

Luonnollisesti näin kirjoitettuna tätä ei voi hyväksyä. Voisi kuvitella, että 1700-luvun opiskelijaparka on ollut lohduton kirjansa ääressä, tai ainakin vähintään yhtä hämmentynyt kuin moderni lukijakin. Mutta jos käyttää tämän kirjoituksen termejä, niin Eulerin teksti voidaan tulkita täysin ymmärrettävästi:

Jos dx on tosipieni ja a kohtuullinen, niin $dx \simeq adx \simeq 0$ ja $adx/dx = a/1 = a$.

Jos $y = a/dx$, niin y on tosi-iso.

Pitää siis huolellisesti erottaa a ja $\simeq$ sekä ääretön ja tosi-iso (mutta äärelliset) luvut. Lisäksi Euler myöhemmin [6, s. 116] kirjoittaa $\sin(dx) = dx$, vaikka pitäisi olla $\sin(dx) \sim dx$.

Mutta on helppoa uskoa, että tuo Eulerin selitys ei ollut kovin vakuuttava 1700-luvullakaan, joten tosipiienen lukujen syvin olemus jäi edelleen hämärän peittoon. Kuitenkin Eulerin kirjassa on paljon laskuja ja esimerkkejä, ja idea varmaankin oli, että kun näkee, miten homma toimii "käytännössä", niin sen perusteella ymmärtää jotenkin intuitiivisesti, mistä on kysymys. Esimerkiksi Eulerin kirjasta löytyy kaikki alkeisfunktioitten derivointikaavat, jotka tietysti ovat samat kuin nykyäänkin, vaikka perustelut ovatkin erilaiset.

HARJOITUSTEHTÄVÄ 1 Onko Eulerin kirjassa jokin kaava tai tulos, mikä on "oikeasti" väärin? Miksi? *

1700-luvun lopussa Lagrange kuitenkin päätti, että nyt tämä epämääräisyys saa riittää [8]. Kirjan alaotsikko ilmoittaa selkeästi, mistä on kysymys:

Les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Differentiaalilaskennan perusteet, josta on raivattu pois äärettömän pienet ja häviävän pienet suuret ja fluksiot, käyttäen vain algebrallista analyysiä ja äärellisiä suureita.

Lagrange olisi voinut kirjoittaa neutraalisti *sans infiniment petits* (ilman infinitesimaaleja), mutta hän kirjoitti *dégagés de toute considération d'infiniment petits*, minkä lukija helposti tulkitsee niin, että infinitesimaalit on tarpeettomina ja ärsyttävinä heitetty roskikseen.

Fluksio oli Newtonin käyttämä termi. Algebrallisella analyysillä Lagrange tarkoitti potenssisarjoja; jos f on analyttinen funktio, niin se voidaan kirjoittaa potenssisarjana, joten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Derivaatat siis määrittyvät potenssisarjan kertoimien avulla. Tästä kirjasta on muuten peräisin sana derivaatta, ja merkintä f' , f'' jne derivaatoille. Lagrange kirjoitti, että f' on *première fonction dérivée*, siis ensimmäinen johdettu funktio [8, s. 19].¹ Funktio f itse oli *fonction primitive* eli alkuperäinen funktio.²

Lagrange kirja siis hylkäsi täysin perinteisen infinitesimaalianalyysin, ja hänen kirjaansa ainakin suurelta osin voidaan pitää pätevänä myös nykynäkökulmasta. Luonnollisesti ongelmana oli, että piti rajoittua analyttisiin funktioihin, joten tämän jälkeen kesti vielä pitkään ennen kuin päädyttiin moderniin derivaatan määritelmään.

Olemassaolo?

Skeptinen lukija saattaa ehkä ihmetellä, että onko tosi-pieniä ja tosi-isoja lukuja ”oikeasti” olemassa, vai onko jossain piilossa jokin ristiriita. Yleensäkin matemaattisten olioitten olemassaolo on hankala kysymys, eikä siihen ole yleisesti hyväksyttyä vastausta. Samoin voisi kysyä, onko tavallisia reaalilukuja olemassa, ja mitä tällä olemassaololla tarkoitetaan.

Normaalisti reaaliluvut luodaan joko Dedekindin leikkausten tai Cauchy-jonojen avulla rationaaliluvuista. Molemmissa tapauksissa tarvitaan äärettömiä joukkoja. Äärettömien joukkojen olemassaolo puolestaan on tavallisen joukko-opin aksiooma. Mutta jos asetettaisiin aksioomaksi saunatonttujen olemassaolo, niin luulisin, että aika harva pitäisi tätä todisteena saunatonttujen olemassaolosta. Tosin saunatontut ovat ideana olemassa: monet ihmiset ovat kuulleet niistä, kuten reaaliluvuistakin. Reaalilukujen ja saunatonttujen olemassaolo on siis varsin samankaltaista.

Joka tapauksessa matematiikassa on tapana sivuuttaa olemassaoloon liittyvät ongelmat, ja aksioomasysteemeiltä vaaditaan ”vain”, että ne ovat ristiriidattomia.

Tunnetusti Gödel sitten osoitti, että aksioomasysteemin sisällä ei voida todistaa ristiriidattomuutta. Voidaan kuitenkin vertailla eri systeemejä, ja onkin voinut osoittaa, että jos Nelsonin systeemissä on ristiriita, niin silloin on ristiriita myös tavallisessa joukko-opissa. Tosi-isojen ja tosi-pienten lukujen käyttö on siis yhtä ”turvallista” kuin tavallisten reaalilukujen käyttö.

Geometria

Katsotaan sitten pieni geometrinen esimerkki. Siinä tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 1. *Olkkoon α tosi-pieni; tällöin*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &\sim \tan(\alpha) \sim \alpha, \\ \cos(\alpha) &\simeq 1.\end{aligned}$$

Todistus. Metalauseen mukaan trigonometriset funktiot ovat analyttisiä, joten tulos saadaan potenssisarjojen avulla. $\diamond$

Määritellään luku π siten, että 2π radiaania on koko kierros.

Lause 3. *Piirretään r -säteisen ympyrän sisään säännöllinen n -kulmio. Olkkoon L monikulmion reunan pituus ja A sen pinta-ala. Jos n on tosi-iso, niin*

$$\text{st}(L) = 2\pi r \quad \text{ja} \quad \text{st}(A) = \pi r^2.$$

Todistus. Monikulmion reuna koostuu janoista, joitten pituus on h , joten reunan pituus on $L = nh$. Edelleen monikulmio koostuu tasasivuisista kolmioista K_h , joitten keskuskulma on $\alpha = 2\pi/n$.

Pienten laskujen jälkeen saadaan

$$L = nh = 2rn \sin(\alpha/2) = \frac{4\pi r \sin(\alpha/2)}{\alpha}.$$

Kun n on tosi-iso, niin α on tosi-pieni, joten yllä olevan Lemman perusteella saadaan

$$L \simeq 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \text{st}(L) = 2\pi r.$$

Olkkoon $b = r \cos(\alpha/2)$ kolmion K_h korkeus, joten K_h :n pinta-ala on $A_h = \frac{1}{2}bh$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}A &= nA_h = \frac{nbh}{2} = nr^2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \\ &= \frac{nr^2 \sin(\alpha)}{2} = \frac{\pi r^2 \sin(\alpha)}{\alpha}.\end{aligned}$$

Jälleen äskeisen Lemman avulla saadaan

$$A \simeq \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{st}(A) = \pi r^2. \quad \diamond$$

¹Finanssimarkkinoilla kuitenkin puhutaan johdannaisista eikä derivaatoista, vaikka kyseessä on sama sana.

²Tämän takia ranskaksi määräämätön integraali on primitive, adjektiivi on muutettu substantiiviksi.

Epästandardin analyysin puitteissa voitaisiin siis sanoa, että ympyrä on n -kulmio, missä n on tosi-iso. Mielinkiintoisesti Johann Bernoulli ja L'Hospital ajattelivat täsmälleen näin. Heidän toinen perusoletuksensa oli [2, s. 2–3]:

(O2) On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite.

Käyrä voidaan ajatella koostuvaksi janoista, joitten pituus on tosi-pieni.

Muistetaan, että pituuden ja pinta-alan laskeminen on oikeastaan integrointia, joten äskeinen lause voidaan tulkita eräitten integraalien laskemiseksi äärellisten summien avulla. Oletetaan jatkossa useimmiten, että lausekkeissa esiintyvät funktiot ovat *tavallisia*.

Määritelmä 3. *Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on tavallinen, jos sen määrittelyssä ei esiinny määritelmässä 1 ja 2 olevia käsitteitä tai näitten johdoksia.* ♦

Olkoon nyt $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jokin tavallinen funktio ja asetetaan

$$\int_0^1 f(x) dx = \text{st} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right), \quad (2)$$

missä n on tosi-iso. Yhtälön vasenta puolta on tapana sanoa määrätynksi integraaliksi, ja yhtälön oikea puoli kertoo, mitä tuolla hassulla merkinnällä tarkoitetaan. Otetaan esimerkiksi $f(x) = x^3$; tällöin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3.$$

Tunnetusti

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

mikä tulos löytyy Jacob Bernoullin kirjasta vuodelta 1713 [1]. Siispä

$$\int_0^1 x^3 dx = \text{st} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

d , osa 0

Siirrytään sitten lopulta derivointiin, differensseihin ja differentiaaleihin. Jätin tämän viimeiseksi, koska se on niin hankala; ongelmana on, että kirjaimella d on ai- van liian monta merkitystä, kun lasketaan mukaan sekä vanhat että uudet merkitykset. Kuten yllä olevista esimerkeistä on käynyt ilmi, niin jos puhutaan tosi- pienistä luvuista, niin voidaan sanoa esimerkiksi, että jos a kohtuullinen ja h tosi-pieni, niin $a + h \simeq a$. Perinteisesti tosi-pienistä luvuista kuitenkin aina käytettiin merkintää dx ja kirjoitettiin $x + dx$. Miksi d ?

Tarkastellaan tasoa, jossa on koordinaatit (x, y) , ja olkoon $y = f(x)$ jokin käyrä. Muistetaan, että kirja [2] analysoi nimenomaan tasokäyrien ominaisuuksia. Määritellään nyt

$$dy = df = f(x + dx) - f(x).$$

Tässä d tulee sanasta differenssi; siis merkinnässä dx ajatellaan, että lukuun x lisätään jokin tosi-pieni luku dx , mutta merkinnässä df ajatellaan, että d operoi funktioon f .

Ajatuksena on siis, että jos dx on tosi-pieni, niin myös dy on tosi-pieni. Mutta mistä tiedetään, että dy on tosi-pieni? Itse asiassa tässä käytetään funktion f jatkuvuutta.

Lause 4. *Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tavallinen funktio. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(i) f on jatkuva pisteessä a .

(ii) $f(a + h) \simeq f(a)$ kaikilla $h \simeq 0$. ★

1700-luvulla jatkuvuutta ei tietenkään oltu määritelty, vaan tavallaan automaattisesti ajateltiin, että ne funktiot, joita tarkastellaan, toteuttavat tuon ehdon. Ehkäpä siis hiukan yllättävästi tämä vastasi täysin nykyistä jatkuvuuden käsitettä.

Olettaen, että f on jatkuva, lasketaan käyrälle $y = f(x)$ tangentti oletuksen (O2) avulla [2, s. 11]. Tarkastellaan pisteitä (a, b) ja $(a + da, b + db)$. Suora, joka kulkee näitten pisteitten kautta, on

$$y - b = \frac{db}{da} (x - a). \quad (3)$$

Jos nyt $b = f(a)$, niin moderni lukijakin tunnistaa heti, että saatiin oikea vastaus, koska vieläkin saatetaan kirjoittaa $db/da = f'(a)$. Mutta nyt siis

$$\frac{db}{da} = \frac{f(a + da) - f(a)}{da}.$$

Koska oletettiin, että f on jatkuva, niin oikealla puolella on kahden tosi-pienen luvun suhde. Mutta tämän suhteen ei pitäisi oleellisesti riippua valitusta da :sta, jotta derivaatta olisi hyvin määritelty. Voidaan osoittaa:

Lause 5. *Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tavallinen funktio. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(i) f on derivoituva pisteessä a .

(ii) On olemassa jokin tavallinen reaaliluku q siten, että

$$\text{st} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right) = q$$

kaikilla $h \simeq 0$.

Jos väite (ii) pätee, niin kirjoitetaan $f'(a) = q$. ★

Olkoon esimerkiksi $y = f(x) = x^3$, jolloin

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2.$$

Siispä

$$f'(a) = \text{st}\left(3a^2 + 3ah + h^2\right) = 3a^2,$$

jos $h \simeq 0$. Jos siis oletetaan, että f on derivoituva, niin yleisesti ottaen $\text{st}(db/da) = f'(a)$, joten yhtälöstä (3) saadaan

$$y - b \simeq f'(a)(x - a)$$

ja tangentiksi saatiin (ainakin melkein) se mitä pitääkin. Lagrange kommentoi tätä laskua näin [8, s. 3]:

En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites.

Jos ajattelee, että käyrä koostuu tosipienistä janoista, joitten jatkeena saadaan tangentit, niin on selvää, että tämä oletus on virheellinen; mutta virhe korjaantuu, kun laskun kuluessa jätetään huomiotta tosipieniä suureita.

Lagrange on tässä aivan oikeassa: äsken ”tarpeettomista” tosipienistä suureista päästiin eroon ottamalla standardiosa. Tietenkin ennen vanhaan käsitettä standardiosa ei ollut, ja huolettomasti jätettiin sopivia termejä huomiotta. Mysteeriksi jäi, että jos lähdetään liikkeelle ”vääristä” oletuksista, niin miten ja miksi aina kuitenkin virheet korjaantuvat? Vai korjaantuvatko ne aina? Kuten Lagrange sanoo:

Il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.

Olisi ehkä vaikeaa todistaa tämä yleisesti.

Ei siis ihme, että Lagrange kirjansa johdannossa otti esille, että differentiaalilaskentaa on hyvin vaikeaa opettaa aloittelijoille (commençans).

Lasketaan vielä sinin ja arkussinin derivaatta Eulerin tapaan. Olkoon $y = \sin(x)$, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx} \\ &= \frac{\sin(x)\cos(dx) + \cos(x)\sin(dx) - \sin(x)}{dx} \\ &\simeq \frac{\sin(x) + \cos(x)\sin(dx) - \sin(x)}{dx} \simeq \cos(x), \end{aligned}$$

missä $\simeq$ seuraa Lemmasta 1, kun dx on tosipieni. Euler laski juuri näin, vaikka tietysti hän käytti yhtäsuuruusmerkkiä, eikä symbolia $\simeq$. Samoin hän vetosi potenssisarjoihin, eli käytännössä Lemmaan 1, kun hän perusteli siirtymistä toiselta riviltä kolmannelle yllä olevassa kaavassa.

Jos $y = \sin(x)$, niin $x = \arcsin(y)$, joten käyttämällä sitä, että $dy/dx \simeq \cos(x)$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &\simeq \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

Yleisesti ottaen Eulerin laskut antavat tuttuja tuloksia, vaikka ne nykyään perustellaan toisin. Mutta epästandardin analyysin puitteissa Eulerin laskut (ainakin useimmiten) ovat täysin oikein, jos yhtäsuuruusmerkin tilalle tietyissä kohdissa laitetaan joko $\simeq$ tai $\sim$, ja lisäksi sopivissa paikoissa otetaan lausekkeesta standardiosa.

HARJOITUSTEHTÄVÄ 2 Valitse muutama Eulerin lasku ja laita yhtäsuuruusmerkin tilalle oikeissa kohdissa joko $\simeq$ tai $\sim$. *

d , osa 1

Äsken jo nähtiin, että d voidaan tulkita operaattoriksi: jos f on funktio, niin

$$df = f(x+h) - f(x),$$

missä $h \simeq 0$. Selvästi tämä on lineaarinen; jos g on jokin toinen funktio, niin

$$d(af + bg) = a df + b dg,$$

missä a ja b ovat vakioita. Entä tulo? Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} d(fg) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + \\ &\quad f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + \\ &\quad (f(x+h) - f(x))g(x) \\ &\sim f dg + g df. \end{aligned}$$

Kun nyt merkitään $u = fg$, niin Lauseen 5 perusteella saadaan, että

$$u' = f g' + g f',$$

jos f ja g ovat derivoituvia, joten päädyttiin tuttuun tulon derivointisääntöön, jota myös Leibnizin säännökksi sanotaan. Vastaavasti voidaan sitten määritellä osittaisderivaattoja, jos f on monen muuttujan funktio.

HARJOITUSTEHTÄVÄ 3 Olkoon f ja g jatkuvia funktioita. Osoita, että

$$d\left(\frac{f}{g}\right) \sim \frac{g df - f dg}{g^2}.$$

*

d , osa 2

Jotta sekaannus olisi mahdollisimman suuri, niin modernissa differentiaali geometriassa käytetään samoja symboleja (d , dx , df jne) kuin 1700-luvulla, niille on vain annettu uusi merkitys. Differentiaali geometriassa käytettiin vanhaa terminologiaa (tosipieni jne) paljon kauemmin kuin analyysin puolella. Syy oli se, että ongelmana oli tiettyjen käsitteitten määrittely, eikä tämä ratkennut sillä, että derivaatat määriteltiin ε - δ -menetelmällä. Spivak selittää asian näin [14, s. 111]:

Once this realization came, it was only a matter of making new definitions, which preserved the *old* notation, and waiting for everybody to catch up. In short, all classical notions involving infinitely small quantities became functions on tangent vectors, like df , except for quotients of infinitely small quantities, which became tangent vectors, like dc/dt .

”This realization” tarkoittaa sitä, että ymmärrettiin, miten tietyt käsitteet on syytä määritellä. Spivak ei kerro, kuinka pitkään piti odottaa, mutta ehkäpä yhden matemaatikkosukupolven piti vaihtua ennen kuin kaikki olivat tilanteen tasalla (catch up).

Jos siis $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on (x, y) tasossa määritelty funktio, niin nykyään voidaan kirjoittaa esimerkiksi

$$\int_0^1 g(x) dx, \\ df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Nyt symbolit dx , dy ja df ovat kovektoreita, siis lineaarikuvauksia, jotka operoivat (tangentti)vektoreihin. Kovektorit ovat toiselta nimeltä differentiaali ykkös-muotoja (differential one form), ja ylipäättään differentiaalimuodot ovat objekteja, joita voi integroida. Lisäksi kuvaus $d: f \rightarrow df$ on ulkoderivaatta (exterior derivative). Joka tapauksessa tämä on johtanut siihen, että opetuksessa käytetään merkintöjä, joitten merkitystä ei oikeasti selitetä; differentiaali geometriaahan opetetaan vasta yliopiston jatkokursseilla. Minulle on epäselvää miten lukion opettajat nykyään selittävät symbolia dx integroinnin yhteydessä, tai onko ylipäättään olemassa jotain ”virallista” selitystä tähän käytäntöön. Voidaan siis todeta Lagrangen tapaan, että differentiaalilaskennan opettaminen on edelleen vaikeaa.

Differentiaali geometriaan voi perehtyä esimerkiksi kirjan [7] avulla. Kirjan otsikko on ehkä hämäävästi *Vector analysis*, mutta tämä viittaa siihen, että lähdetään

liikkeelle siitä, että huolellisesti määritellään, mitä ovat (tangentti)vektorit, ko(tangentti)vektorit, ja mitä eroa näillä on.

Mekaniikassa saatetaan edelleen käyttää vanhoja termejä; esimerkiksi voidaan edelleen puhua infinitesimaalisesta siirtymästä (infinitesimal displacement), vaikka kaiketi nykyään enemmän kuitenkin käytetään termiä virtuaalinen siirtymä (virtual displacement). Joka tapauksessa tällä ei ole mitään tekemistä epästandardin analyysin tai infinitesimaalien kanssa, vaan kyseessä on konfiguraatioavaruuden tangenttivektori. Näille vektoreille saatetaan myös käyttää merkintöjä dx tai δx , mikä tietysti sekoittaa asioita lisää.

Askelfunktio

Edellä on ollut puhetta tavallisista funktioista, joten annetaan vielä esimerkki funktiosta, joka ei ole tavallinen. Olkoon

$$H(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x/h) + \frac{1}{2},$$

missä h on tosipieni ja positiivinen. Jos x on kohtuullinen ja positiivinen, niin $H(x) \simeq 1$, ja jos x on kohtuullinen ja negatiivinen, niin $H(x) \simeq 0$. Metalauseen mukaan H on analyyttinen; voitaisiin siis sanoa, että H on ”analyyttinen askelfunktio”. Koska H on analyyttinen, niin kaikki derivaatat ovat olemassa, ja on tapana sanoa, että $H' = \delta$ on Diracin delta. Tämä avaa uudenlaisia mahdollisuuksia tutkia funktioita, jotka eivät tavallisessa mielessä ole derivoituvia. Perinteinen tapa käsitellä tätä on Schwartzin distribuutioteoria [13]. Huomaa esimerkiksi, että δ^2 on hyvin määritelty, koska δ on analyyttinen funktio, kun taas δ^2 ei ole määritelty distribuutioteoriassa.

Lopuksi

Kirjan [2] esipuheessa L’Hospital tarkastelee matemaatiikan historiaa; ajanjaksoa antiikin ajasta Descartesiin hän arvioi näin:

On ne sçauroit assés s’étonner [...] que par une admiration presque superstitieuse pour leur ouvrages, ils se soient contentés de les lire & de les commenter, [...] sans oser commettre le crime de penser quelques fois par eux-mêmes. [...] Les livres se multiplioient, & cependant rien n’avançoit.

Ei voi kuin ihmetellä [...] miten lähes taikauskoinen ihailu antiikin matemaatikoita kohtaan aiheutti sen, että vanhoja töitä luettiin ja kommentoitiin, [...] mutta kukaan ei uskaltanut tehdä sellaista rikosta, että olisi edes joskus ajatellut ihan itsenäisesti. [...] Kirjoja kirjoitettiin, mutta mikään ei edistynyt.

Kuten tästä lainauksesta voi päätellä, niin L'Hospital oli täysin vakuuttunut siitä, että lopulta yli 1500 vuoden pysähtyneisyyden ajan jälkeen differentiaalilaskenta aiheuttaa suuren mullistuksen matematiikassa. Täsähän hän oli aivan oikeassa. Esipuhe päättyy seuraavasti:

Les deux suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité [...] me paroissent si évidentes, que je ne croy pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit de Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la manière des Anciens.

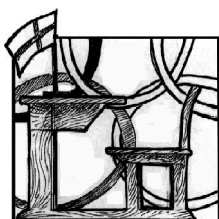
Kaksi oletusta [oletukset (O1) ja (O2)], joihin tämä teos perustuu, ovat mielestäni niin selkeitä, etten usko, että tarkkaavaiselle lukijalle jää mitään epäilyksiä niitten suhteen. Olisin voinut jopa helposti todistaa ne vanhaan tapaan.

Tässä taas L'Hospital on niin väärässä, että koko kapale kuulostaa vitsiltä. Lisäksi on täysin epäselvää, mitä L'Hospital tarkoitti *todistamisella vanhaan tapaan* tässä yhteydessä.

Epästandardia analyysiä ei käytetä kovin laajasti, vaan se on jäänyt varsin pienen piirin harrastukseksi. Kuitenkin voisi sanoa, että esimerkiksi lauseen 4 jatkuvuuden karakterisointi on intuitiivisesti selkeämpi kuin perinteinen ε - δ -määritelmä. Periaatteessa epästandardia analyysiä voisi siis käyttää myös differentiaalilaskennan perusopetuksessa; näin ei ole käynyt, mutta ehkäpä joskus tulevaisuudessa tilanne voi muuttua.

Viitteet

- [1] Jacob Bernoulli, *The art of conjecturing*, Johns Hopkins University Press, 2006, Translation of *Ars conjectandi*, 1713, with an introduction and notes by Edith Dudley Sylla.
- [2] Johann Bernoulli and G. L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, ACL-éditions, Paris, 1988, réimpression de l'édition originale de 1696, suivi des *Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits* par P. Varignon, 1725.
- [3] P. Davis, R. Hersh, and E. Marchisotto, *The mathematical experience, study edition*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.
- [4] F. Diener and M. Diener, *Nonstandard analysis in practice*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] F. Diener and G. Reeb, *Analyse non standard*, Collection Enseignement des Sciences, vol. 40, Hermann, Paris, 1989.
- [6] L. Euler, *Foundations of differential calculus*, Springer-Verlag, New York, 2000, kirjan Institutiones calculi differentialis, 1755, 1. osan käännös.
- [7] K. Jänich, *Vector analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
- [8] J.-L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques: contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, Imprimerie de la République, Paris, 1797.
- [9] C. Lobry, *Et pourtant... ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$* , Aléas, 1989.
- [10] E. Nelson, *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 6, 1165–1198.
- [11] ———, *Radically elementary probability theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 117, Princeton University Press, 1987.
- [12] A. Robinson, *Non-standard analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 1996, Reprint of the second (1974) edition, With a foreword by W. A. J. Luxemburg.
- [13] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, vol. IX-X, Hermann, Paris, 1966, Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée.
- [14] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, 3rd ed., Publish or Perish, 1999.
- [15] C. Truesdell, *The new Bernoulli edition*, Isis **49** (1958), 54–62.



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2025 Prishtinassa

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Prishtinassa Kosovossa 11.-17.4.2025. Suomea edustivat Amelie Hao, Louna Kiuru, Julia Rintala ja Anni Tallavaara. Joukkueenjohtajana oli Anni Tapionlinna ja varajohtajana Aino Aulanko. Amelie ja Louna saivat kunniamaininnan. Amelie jäi itse asiassa vain yhden pisteen päähän pronssimitalista. Vähintään pronssimitalin saa suurin piirtein paras puolikas kilpailijoista.

Kiinan Yankuan Liu sai ainoana täydet pisteet, eli 42 pistettä. Toiseksikin tullut oli kiinalainen Yuxuan Meng. Paras eurooppalainen oli Puolan Magdalena Pudelko.

Tehtävät

Tehtävä 1. Positiiviselle kokonaisluvulle N , olkoot $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat pienempiä kuin N ja yhteistekijättömiä luvun N kanssa. Etsi kaikki $N \geq 3$, joille

$$\text{syt}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

kaikilla $1 \leq i \leq m - 1$.

Tässä $\text{syt}(a, b)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat a ja b . Kokonaisluvut a ja b ovat yhteistekijättömiä, jos $\text{syt}(a, b) = 1$.

Tehtävä 2. Sanotaan, että ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva kasvava lukujono $a_1 < a_2 <$

$a_3 < \dots$ on keskeinen, jos jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n , lukujonon ensimmäisten a_n luvun aritmeettinen keskiarvo on yhtä suuri kuin a_n . Osoita, että on olemassa ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva lukujono $b_1, b_2, b_3, \dots$, jolla jokaiselle keskeiselle lukujonolle $a_1, a_2, a_3, \dots$ on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n , joilla $a_n = b_n$.

Tehtävä 3. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Pisteet B, D, E ja C sijaitsevat tässä järjestyksessä samalla suoralla siten, että $BD = DE = EC$. Olkoot M ja N janojen AD ja AE keskipisteet vastaavasti. Oletetaan, että kolmio ADE on terävä ja olkoon H sen ortokeskus. Olkoot pisteet P ja Q suorilla BM ja CN , vastaavasti siten, että D, H, M sekä P sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret, ja E, H, N sekä Q sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret. Osoita, että pisteet P, Q, N sekä M sijaitsevat samalla ympyrällä.

Kolmion ortokeskus on sen korkeusjanojen leikkauspiste.

Tehtävä 4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I , ja $AB \neq AC$. Leikatko suoraa BI ja CI kolmion ABC ympärysympyrän pisteissä $P \neq B$ ja $Q \neq C$ vastaavasti. Tarkastellaan pisteitä R ja S , joille $AQRB$ ja $ACSP$ ovat suunnikkaita (eli $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ ja $AP \parallel CS$). Olkoon T suorien RB ja SC leikkauspiste. Osoita, että pisteet R, S, T , ja I sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 5. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Asetelmas-

sa $n \times n$ laudalla jokaisessa n^2 ruudussa on nuoli, joka osoittaa joko ylös, alas, vasemmalle tai oikealle. Annetussa asetelmassa Turbo-etana aloittaa yhdestä laudan ruudusta ja kulkee ruudusta toiseen. Jokaisella siirrolla Turbo siirtyy yhden ruudun siihen suuntaan, mihin Turbon tämän hetkisen ruudun nuoli osoittaa (mahdollisesti poistuen laudalta). Jokaisen siirron jälkeen jokaisessa ruudussa oleva nuoli kääntyy 90° vastapäivään. Sanomme, että ruutu on hyvä, jos siitä ruudusta aloittaessaan Turbo käy kaikissa ruuduissa täsmälleen kerran, poistumatta laudalta ja palaa lopuksi aloitus-

ruutuunsa. Määritä suhteessa laudan kokoon n suurin hyvien ruutujen määrä, joka saavutetaan jossakin mahdollisessa asetelmassa.

Tehtävä 6. Jokaiseen ruutuun 2025×2025 ruudukossa on kirjoitettu epänegatiivinen reaaliluku siten, että jokaisen rivin summa on täsmälleen 1, ja jokaisen sarakkeen summa on täsmälleen 1. Määritellään r_i olemaan suurin arvo rivillä i , ja olkoon $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Vastaavasti määritellään c_i olemaan suurin arvo sarakkeessa i , ja olkoon $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$. Mikä on suurin mahdollinen arvo lausekkeelle $\frac{R}{C}$?

Solmu 1/2025

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Julkaisija:

Suomen matemaattinen yhdistys ry

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Verkkosivu:

matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, jatko-opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Tietotekniikan yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, yliopistonlehtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 2/2025 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.10.2025 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkalehti Solmun matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Eri aihepiireihin liittyviä matematiikan tehtäviä ratkomalla oppilaat huomaavat, että matematiikan osaamista tarvitaan monissa eri yhteyksissä. Matematiikan kumuloituva rakenne vaatii ennen matemaattisten työkalujen käyttöä aineen sisäistä (eli vertikaalista) eheyttämistä, vasta tämän jälkeen voidaan pyrkiä eri oppiaineiden väliseen (horisontaaliseen) eheyttämiseen. Tarvittavien matematiikan sisältöjen on siis oltava hallinnassa ennen niiden käyttöä. Opettajan ratkaistavaksi jää eri oppiaineiden erilainen etenemistähti, esimerkiksi käsite mittakaava voi tulla esille maantiedossa eri luokka-asteella kuin matematiikassa.

Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia. Alla annetaan neljästä paketista esimerkkejä niiden sisälloistä. Tehtävät voi tulostaa Matematiikkalehti Solmun (matematiikkalehtisolmu.fi) Matematiikkadiplomi-sivulta ja pyytää vastaukset osoitteesta [juha.ruokolainen\(at\)yahoo.com](mailto:juha.ruokolainen(at)yahoo.com)

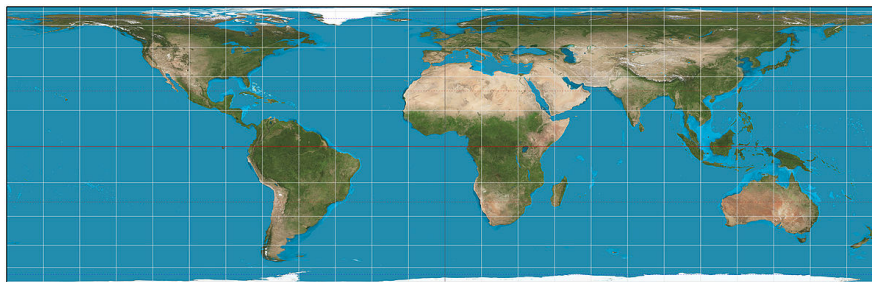
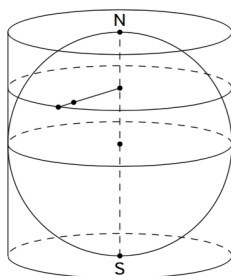
Koululle ei aiheudu muita kuin mahdollisia monistus/tulostuskustannuksia.

Tehtäväpaketit

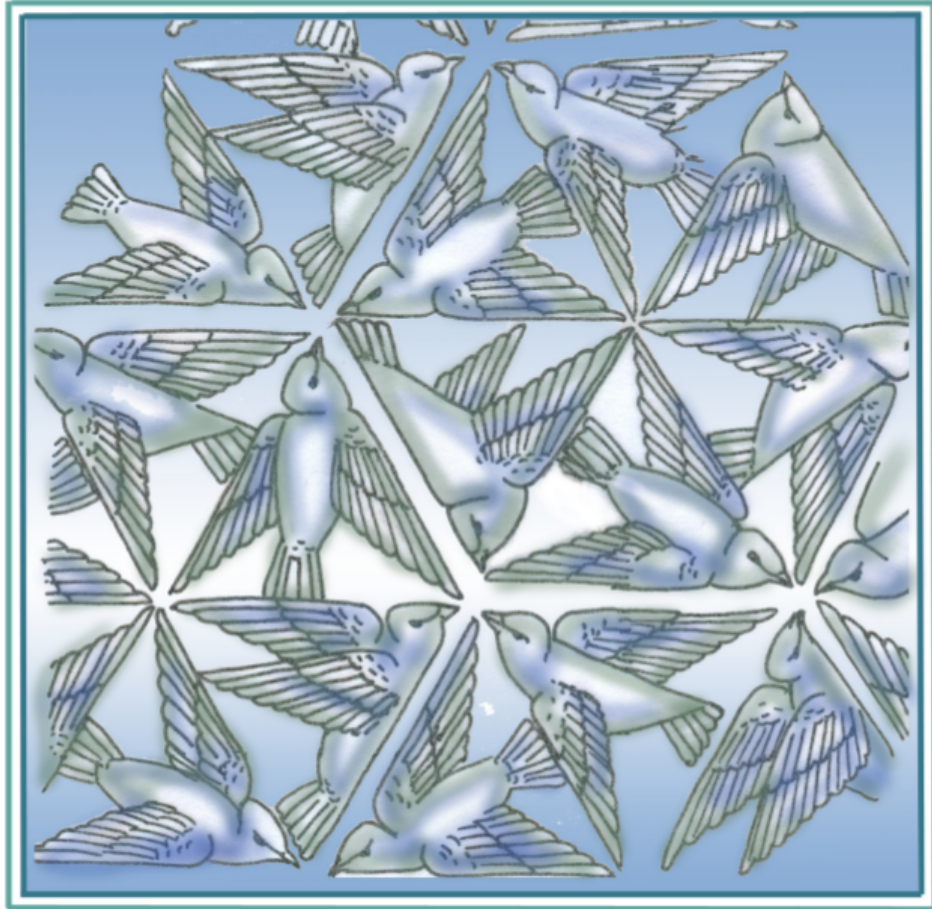
Peruskoulu, ehkä osittain myös lukiota, varten koottujen tehtäväpakettien aiheet ovat:

- **Maapallo** (Sisältöjä: maapallo, etäisyyksiä luonnossa ja kartalla, tasokartta, ihminen Auringon ja vetyatomien välissä. Matemaattisia sisältöjä: suuruussuhteet, mittakaava, etäisyydet, myös pallolla, maapallon pyöriminen, projektio, suuret luvut.)
- **Suomen historia** (Sisältöjä: väkiluvun kehitys keskiajalta, kaupungit, kansakoulu, tytöt ja pojat opetuksessa, taiteilijoita, radioaktiivinen hajoaminen, Pisa-tulokset. Matemaattisia sisältöjä: ajan yksiköt, prosenttilaskenta ja prosenttipisteet, kaavioiden laatiminen ja tulkitseminen, lineaarinen approksimaatio, murtoluvut, päättely.)
- **Terveys ja ravinto** (Matemaattisia ym. sisältöjä: suhteet, prosentit, perusaineenvaihdunta, liikkuminen, painoindeksi, energian tarve, kalorit, ajankäyttö, lääkeannostus, alkoholi ja hormonit)
- **Talous** (Sisältöjä: kauppa- ja hinnanalennuslaskuja, remonttikustannuslaskuja, brutto- ja nettopalkka, verotus, korot, pörssi, valtion budjetti, luonnonvarojen tuottavuus eri EU-maissa)
- **Todennäköisyys**
- **Matematiikka ja taide** (2 tasoa)
- **Mittaaminen** (2 tasoa)
- **Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus**, jossa on eri vaihtoehtoja tutkivia tehtäviä.

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.



Kuva: Strebe (Oma teos) [CC BY-SA 3.0], lähde: Wikimedia Commons



 **SOLMU**
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi