



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2025 Prishtinassa

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Prishtinassa Kosovossa 11.-17.4.2025. Suomea edustivat Amelie Hao, Louna Kiuru, Julia Rintala ja Anni Tallavaara. Joukkueenjohtajana oli Anni Tapionlinna ja varajohtajana Aino Aulanko. Amelie ja Louna saivat kunniamaininnan. Amelie jäi itse asiassa vain yhden pisteen päähän pronssimitalista. Vähintään pronssimitalin saa suurin piirtein paras puolikas kilpailijoista.

Kiinan Yankuan Liu sai ainoana täydet pisteet, eli 42 pistettä. Toiseksikin tullut oli kiinalainen Yuxuan Meng. Paras eurooppalainen oli Puolan Magdalena Pudelko.

Tehtävät

Tehtävä 1. Positiiviselle kokonaisluvulle N , olkoot $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat pienempiä kuin N ja yhteistekijättömiä luvun N kanssa. Etsi kaikki $N \geq 3$, joille

$$\text{syty}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

kaikilla $1 \leq i \leq m - 1$.

Tässä $\text{syty}(a, b)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat a ja b . Kokonaisluvut a ja b ovat yhteistekijättömiä, jos $\text{syty}(a, b) = 1$.

Tehtävä 2. Sanotaan, että ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva kasvava lukujono $a_1 < a_2 <$

$a_3 < \dots$ on keskeinen, jos jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n , lukujonon ensimmäisten a_n luvun aritmeettinen keskiarvo on yhtä suuri kuin a_n . Osoita, että on olemassa ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva lukujono $b_1, b_2, b_3, \dots$, jolla jokaiselle keskeiselle lukujonolle $a_1, a_2, a_3, \dots$ on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n , joilla $a_n = b_n$.

Tehtävä 3. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Pisteet B, D, E ja C sijaitsevat tässä järjestyksessä samalla suoralla siten, että $BD = DE = EC$. Olkoot M ja N janojen AD ja AE keskipisteet vastaavasti. Oletetaan, että kolmio ADE on terävä ja olkoon H sen ortokeskus. Olkoot pisteet P ja Q suorilla BM ja CN , vastaavasti siten, että D, H, M sekä P sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret, ja E, H, N sekä Q sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret. Osoita, että pisteet P, Q, N sekä M sijaitsevat samalla ympyrällä.

Kolmion ortokeskus on sen korkeusjanojen leikkauspiste.

Tehtävä 4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I , ja $AB \neq AC$. Leikatko suoraa BI ja CI kolmion ABC ympärysympyrän pisteissä $P \neq B$ ja $Q \neq C$ vastaavasti. Tarkastellaan pisteitä R ja S , joille $AQRB$ ja $ACSP$ ovat suunnikkaita (eli $AQ \parallel RB, AB \parallel QR, AC \parallel SP$ ja $AP \parallel CS$). Olkoon T suorien RB ja SC leikkauspiste. Osoita, että pisteet R, S, T , ja I sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 5. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Asetelmas-

sa $n \times n$ laudalla jokaisessa n^2 ruudussa on nuoli, joka osoittaa joko ylös, alas, vasemmalle tai oikealle. Annetussa asetelmassa Turbo-etana aloittaa yhdestä laudan ruudusta ja kulkee ruudusta toiseen. Jokaisella siirrolla Turbo siirtyy yhden ruudun siihen suuntaan, mihin Turbon tämän hetkisen ruudun nuoli osoittaa (mahdollisesti poistuen laudalta). Jokaisen siirron jälkeen jokaisessa ruudussa oleva nuoli kääntyy 90° vastapäivään. Sanomme, että ruutu on hyvä, jos siitä ruudusta aloittaessaan Turbo käy kaikissa ruuduissa täsmälleen kerran, poistumatta laudalta ja palaa lopuksi aloitus-

ruutuunsa. Määritä suhteessa laudan kokoon n suurin hyvien ruutujen määrä, joka saavutetaan jossakin mahdollisessa asetelmassa.

Tehtävä 6. Jokaiseen ruutuun 2025×2025 ruudukossa on kirjoitettu epänegatiivinen reaaliluku siten, että jokaisen rivin summa on täsmälleen 1, ja jokaisen sarakkeen summa on täsmälleen 1. Määritellään r_i olemaan suurin arvo rivillä i , ja olkoon $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Vastaavasti määritellään c_i olemaan suurin arvo sarakkeessa i , ja olkoon $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$. Mikä on suurin mahdollinen arvo lausekkeelle $\frac{R}{C}$?