Transkendenttimitalle helppo arvio

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Helsingin yliopisto

Lukua kutsutaan algebralliseksi, jos se on jonkun kokonaislukukertoimisen polynomin juuri. Esimerkiksi siis $\sqrt{2}$ on irrationaalinen, mutta algebrallinen, sillä se toteuttaa yhtälön $x^2 - 2 = 0$. Lukua kutsutaan transkendenttiseksi, jos se ei ole minkään kokonaislukukertoimisen polynomin juuri. Esimerkiksi e ja π ovat transkendenttisia. Yleisesti ottaen luvun osoittaminen transkendenttiseksi on haastavaa. Tähän on joitakin poikkeuksia: Liuoville luku ℓ on suoraviivainen osoittaa transkendenttiseksi. Menetelmää voi varioida myös muiden samankaltaisten lukujen käsittelemiseen. Tätä on käsitelty aiemmin esimerkiksi Solmussa [1]. Aiheesta löytyy myös monista muista lähteistä.

Kuitenkin jos jonkun luvun ξ tiedetään olevan transkendenttinen, niin tiedetään varmasti, että jos λ_0, λ_1, $\ldots, \lambda_n$ ovat kokonaislukuja, joista kaikki eivät ole nollia, niin

$$\left|\lambda_n \xi^n + \lambda_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \xi + \lambda_0\right| \neq 0.$$

Hyvä kysymys onkin: miten lähelle nollaa voidaan päästä? Tämän kysymyksen avulla saadaan transkendenttimitta. Kirjoitetaan aluksi:

$$\left|\lambda_n \xi^n + \lambda_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \xi + \lambda_0\right| > \frac{1}{H^r},$$

missä $H \geq \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Huomaa, että luvun H määritelmästä on suljettu pois kerroin λ_0. Nyt kysymys on siis siitä, miten suuri tai pieni r voi olla.

Nopeasti juolahtaa mieleen, että luvun r koon on riiputtava ainakin luvusta n.

Mitä tahansa funktiota, joka on suurempi kuin luvun r infimum, kutsutaan luvun ξ transkendenttimitaksi. Tämä funktio riippuu parametreista n ja H.

Tämän tekstin tarkoitus ei ole antaa erityisen tarkkaa arviota transkendenttimitalle, vaan todistaa laatikkoperiaatteen avulla yksinkertainen arvio, joka kertoo sen, miten lähelle nollaa varmasti ainakin päästään.

Yläraja transkendenttimitalle

Tässä osiossa on tarkoitus osoittaa lausekkeelle tietty yläraja, eli ainakin osoittaa, miten lähelle nollaa voi helposti päästä.

Lause Kun H ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin on varmasti olemassa kokonaislukukertoimet $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n| \leq H$ ja kokonaisluku λ_0, jolla

$$\left|\lambda_n \xi^n + \lambda_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \xi + \lambda_0\right| < \frac{1}{H^n}.$$

Todistus Käytetään laatikkoperiaatetta. Tarkastellaan kaikkia polynomeja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x$, jotka toteuttavat ehdon $0 \leq a_1, a_2, \ldots a_n \leq H$. Lasketaan näiden polynomien arvo pisteessä ξ ja asetetaan vakiotermi polynomiin niin, että arvo saadaan välille $(0,1)$. Näiden laskujen seurauksena on saatu $(1+H)^n > H^n + 1$ eri arvoa, kaikki välillä $(0,1)$. Laatikkoperiaatteen nojalla joidenkin kahden arvon erotus toisistaan on korkeintaan $\frac{1}{H^n}$. Olkoon Q näiden kahden polynomin erotus. Tällöin

$$|Q(\xi)| < \frac{1}{H^n}$$

ja lisäksi Q toteuttaa lauseen ehdot.

Arvion hyvyyden arviointi

Yllä oleva arvio kertoo siis sen, että jos haluaa etsiä transkendenttimittoja, polynomin aste n on hyvä lähtökohta. Joissakin tapauksissa tämä on melko lähelläkin totuutta. Kun mietitään, miten hyvä arvio tämä on, ei voida antaa yleistä vastausta.

Tilanne on täysin erilainen, jos tarkastellaan esimerkiksi Liouvillen lukua, jolle on valtavan hyviä rationaaliapproksimaatioita, kuin jos tarkastellaan jotain kovin toisenlaista transkendenttilukua, kuten lukua e.

Luvulle e on todistettu valtavasti erilaisia transkendenttimittoja. Mielenkiintoista kyllä, niissä pääterminä on täsmälleen polynomin aste, eli tämä alkeellinen arvio antaa suuruusluokan, joka on yllättävän lähellä totuutta. Lisäksi Hata [3] on osoittanut, että $n\frac{\ln(H+1)}{\ln H}$ on alaraja transkendenttimitalle. Arvioidaan

$$n\frac{\ln(H+1)}{\ln H} = n + \frac{\ln(H+1) - \ln H}{\ln H} \approx n + \frac{1}{H \ln H}.$$

Toisaalta tämänhetkinen paras tulos [2] kertoo, että yläraja transkendenttimitan parhaalle mahdolliselle arvolle on $n + \frac{c_n n^2 \log n}{\ln \ln H}$, missä c_n on annettu vakio. Kovin lähellä lukua n ollaan nytkin.

Viitteet

[1] A.-M. Ernvall-Hytönen: Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia. Solmu 3 (2014). `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/irrationaalisuus_pohjassa.pdf`

[2] A.-M. Ernvall-Hytönen, T. Matala-aho ja L. Seppälä: On Mahler's transcendence measure for e. Constructive approximation, 19, Issue 1, 2018, 1–40.

[3] M. Hata: Remarks on Mahler's Transcendence Measure for e, Journal of Number Theory 54 (1995), 81–92.