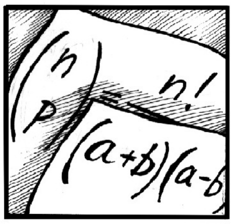


Solmun 2/2024 tehtävien ratkaisut

1. Frans jakoi suorakulmion yhdeksäksi neliöksi. Hän havaitsi, että yhden neliön pinta-ala on 64 cm^2, kahden neliön pinta-ala on 16 cm^2 ja muiden neliöiden pinta-ala on 4 cm^2. Mikä oli alkuperäisen suorakulmion piiri?

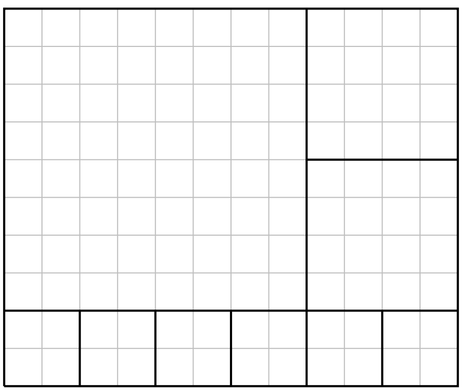
Ratkaisu. Alkuperäisen suorakulmion pinta-ala on yhtä suuri kuin neliöiden yhteispinta-ala, joka on

$$64 + 2 \cdot 16 + 6 \cdot 4 = 120\ (\text{cm}^2).$$

Neliöiden sivujen pituudet ovat 8, 4 ja 2 senttimetriä. Koska neliöiden sivujen pituudet ovat parillisia lukuja, niin myös suorakulmion sivujen pituudet ovat parillisia lukuja. Luku 120 voidaan esittää kahden parillisen luvun tulona neljällä eri tavalla:

$$120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12.$$

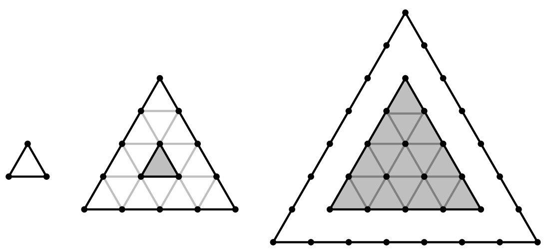
Näistä vain viimeinen tulo $10 \cdot 12$ on mahdollinen, koska suurimman neliön sivujen pituudet ovat 8 cm ja näin ollen suorakulmion molempien sivujen pituuksien on oltava vähintään 8 cm. Suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 10 cm ja 12 cm, voidaan jakaa vaadituiksi neliöiksi kuten alla olevassa kuvassa on esitetty.



Näin ollen suorakulmion piiri on

$$2 \cdot (10\ \text{cm} + 12\ \text{cm}) = 44\ \text{cm}.$$

2. Piirretään pieni tasasivuinen kolmio ja ympäröidään se yhdellä kerroksella samanlaisia pieniä kolmioita niin, että saadaan suurempi tasasivuinen kolmio alla olevan kuvan mukaisesti. Ympäröidään sitten saatu suurempi tasasivuinen kolmio vastaavasti yhdellä kerroksella pieniä kolmioita, jolloin saadaan vielä suurempi tasasivuinen kolmio (katso kuva), ja niin edelleen.



(a) Kuinka monta pientä kolmiota kolmannessa kolmiossa on? (Kolmas kolmio on kuvassa oikealla.)

(b) Kuinka monta pientä kolmiota kahdennessakymmenennessä kolmiossa on?

(c) Kuinka monta pientä kolmiota n. kolmiossa on?

Ratkaisu. Saadun suuremman kolmion sivun pituus kasvaa jokaisella askeleella $1 + 2 = 3$ pituusyksikköä edellisestä kolmiosta (katso kuva).

(a) Kolmannen kolmion sivun pituus on näin ollen $1 + 2 \cdot 3 = 7$, jonka voi tarkistaa kuvasta. Tämä on myös pikkukolmiorivien lukumäärä isossa kolmiossa. Alimmalla rivillä on $7+6=13$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $6+5=11$ pikkukolmiota, kolmannella rivillä on $5+4=9$ pikkukolmiota, neljännellä rivillä on $4+3=7$ pikkukolmiota, viidennellä rivillä on $3+2=5$ pikkukolmiota, kuudennella rivillä on $2+1=3$ pikkukolmiota ja ylimmällä seitsemännellä rivillä on 1 pikkukolmio. Näin ollen kolmiossa on pikkukolmioita yhteensä $13+11+9+7+5+3+1=49$.

(b) Kahdennenkymmenennen kolmion sivun pituus on $1+19\cdot 3=58$. Kohdan (a) ratkaisun ideaa seuraten havaitaan, että alimmalla rivillä on $58+57=115$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $57+56=113$ pikkukolmiota, jne. Isossa kolmiossa on näin ollen pikkukolmioita yhteensä

$$1+3+\cdots+115=\sum_{k=1}^{58}(2k-1)=\frac{58(1+115)}{2}=3\,364.$$

(c) Seuraten kohtien (a) ja (b) ratkaisuja saadaan, että n. kolmion sivun pituus on $1+(n-1)\cdot 3=3n-2$, joka on myös pikkukolmiorivien lukumäärä. Alimmalla rivillä on $(3n-2)+(3n-2-1)=6n-5$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $(3n-2-1)+(3n-2-2)=6n-7$ pikkukolmiota, jne. Isossa kolmiossa on näin ollen pikkukolmioita yhteensä

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(6n-7)+(6n-5)\\&=\sum_{k=1}^{3n-2}(2k-1)=\frac{(3n-2)(6n-4)}{2}=(3n-2)^2.\end{aligned}$$

3. Kimin piti ratkaista epäyhtälö

$$\frac{4}{x-2}>5,$$

mutta hän korvasi luvun 5 vahingossa toisella positiivisella kokonaisluvulla. Hän ratkaisi muuttuneen epäyhtälön oikein ja sai ratkaisuksi $2<x<4$. Millä positiivisella kokonaisluvulla hän oli korvannut epäyhtälössä luvun 5?

Ratkaisu. Kun epäyhtälössä luku 5 korvataan positiivisella kokonaisluvulla n, niin

$$\frac{4}{x-2}>n>0,$$

joten $x-2>0$. Näin ollen kertomalla epäyhtälö puolittain luvulla $x-2$ saadaan $4>nx-2n$, joten

$$\frac{4+2n}{n}>x.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{4+2n}{n}=4,$$

koska epäyhtälön ratkaisu on $2<x<4$. Saadaan yhtälö $4n=4+2n$, joten $n=2$. Epäyhtälön

$$\frac{4}{x-2}>2$$

ratkaisu on $2<x<4$.

4. Jaetaan positiivinen kokonaisluku n jokaisella lukua n pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla ja merkitään $f(n)$:llä saatujen jakojäännösten summaa. Esimerkiksi jaettaessa luku $n=5$ luvuilla 1, 2, 3 ja 4 saadaan jakojäännökset 0, 1, 2 ja 1, joten $f(5)=0+1+2+1=4$. Ratkaise yhtälö $f(n)=n$.

Ratkaisu. Havaitaan heti aluksi, että kun luku n jaetaan sen puolikasta suuremmilla luvuilla, niin jakojäännös ei ole 0.

Tarkastellaan ensin tapausta n on parillinen. Tällöin $n=2k$, missä $k\in\mathbb{N}$. Jaettaessa n luvuilla $k+1$, $k+2,\ldots,n-1$ saadaan jakojäännöksiksi luvut $k-1$, $k-2,\ldots,1$, joiden summa on

$$(k-1)+(k-2)+\cdots+1=\frac{k(k-1)}{2}.$$

Tälle summalle pätee

$$\frac{k(k-1)}{2}>n=2k\iff\frac{k(k-5)}{2}>0,$$

kun $k>5$. Näin ollen yhtälöllä $f(n)=n=2k$ ei ole ratkaisua, kun $n>10$.

Tarkastellaan sitten tapausta n on pariton. Tällöin $n=2k+1$, missä $k\in\mathbb{N}$. Jaettaessa n luvuilla $k+1$, $k+2,\ldots,n-1$ saadaan jakojäännöksiksi luvut k, $k-1$, $k-2,\ldots,1$, joiden summa on

$$k+(k-1)+(k-2)+\cdots+1=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Tälle summalle pätee

$$\begin{aligned}&\frac{k(k+1)}{2}>2k+2>n=2k+1\\&\iff\frac{(k-4)(k+1)}{2}>0,\end{aligned}$$

kun $k>4$. Näin ollen yhtälöllä $f(n)=n=2k+1$ ei ole ratkaisua, kun $n>9$.

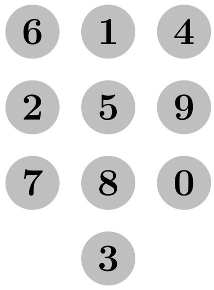
Tarkastelun perusteella yhtälöllä $f(n)=n$ ei ole ratkaisua, kun $n>10$, joten lasketaan $f(n)$:n arvot, kun $n=1,2,\ldots,10$. Saadaan seuraava taulukko:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0	0	1	1	4	3	8	8	12	13

Taulukosta havaitaan, että yhtälön $f(n)=n$ ainoa ratkaisu on $n=8$.

5. Älypuhelimella pankkisovellukseen kirjautuminen vaatii nelinumeroisen PIN-koodin. Turvallisuussyistä

numerot ilmestyvät eri kirjautumiskerroilla satunnaisesti puhelimen näytölle kohtiin, jotka näkyvät alla olevassa kuvassa. Jokaisen numeroiden 0–9 erilaisen sijoittelun todennäköisyys on sama. Alla olevassa kuvassa on esitetty yksi mahdollinen numeroiden sijoittelu. Kun PIN-koodi sisältää neljä eri numeroa, niin mikä on todennäköisyys, että kahdella peräkkäisellä kirjautumiskerralla käyttäjä jättää sormenjälkensä samoihin kohtiin puhelimen näytöllä?



Ratkaisu. PIN-koodin luvut ovat eri lukuja ja ne voivat sijoittua mihin tahansa kohtaan puhelimen näytöllä olevista paikoista. Näin ollen erilaisia mahdollisia lukujen sijoitteluja on $10! = 3\,628\,800$. Kun PIN-koodi syötetään ensimmäisen kerran, niin näytöllä olevista paikoista määräytyvät ne neljä kohtaa, joihin toisella kirjautumiskerralla PIN-koodin numeroiden pitää sijoittua. Erilaisia mahdollisuuksia PIN-koodin neljän numeron sijoittumiselle on $4! = 24$. Loput kuusi numeroa voivat sijoittua näytöllä jäljellä oleviin kuuteen paikkaan $6! = 720$ eri tavalla. Koska PIN-koodin neljän ja muiden kuuden luvun sijoittumiset ovat toisistaan riippumattomia, niin suotuisien tapausten lukumäärä on $24 \cdot 720 = 17\,280$. Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{17\,280}{3\,628\,800} = \frac{1}{210} \approx 0{,}00476.$$

6. Erään reaaliluvun ja sen käänteisluvun summan neliö on 5.

(a) Määritä kyseisen reaaliluvun neliön ja neliön käänteisluvun summa ratkaisematta itse reaalilukua.

(b) Määritä kyseisen reaaliluvun kuution ja kuution käänteisluvun summa ratkaisematta itse reaalilukua.

Ratkaisu. Merkitään kyseistä reaalilukua x:llä. Tarkistetaan ensin, että luku x on olemassa. Ehdosta $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5$ seuraa, että

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x + \frac{1}{x} = -\sqrt{5}.$$

Näin ollen

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

tai

$$x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0,$$

joilla molemmilla on reaalisia ratkaisuja, koska kummankin toisen asteen yhtälön diskriminantti $D = 5 - 4 = 1$ on positiivinen.

(a) Koska

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5,$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 - 2 = 3.$$

(b) Koska kohdan (a) perusteella

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3,$$

niin

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 2 = x^3 + \frac{1}{x^3},$$

joten

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = -2\sqrt{5}.$$

7. Annalla, Laurilla ja Tiinalla on jokaisella rahaa omalla pankkitilillään enemmän kuin 100 euroa. Laurilla on rahaa 35 prosenttia siitä mitä Annalla on ja Tiinalla on rahaa 12/7 siitä mitä Laurilla on. Kuinka paljon Annalla, Laurilla ja Tiinalla on yhteensä rahaa, kun Tiinalla on 1011 euroa enemmän kuin Laurilla?

Ratkaisu. Merkitään Annan rahamäärää x, Laurin rahamäärää y ja Tiinan rahamäärää z, jotka ovat kaikki suurempia kuin 100. Laurin ja Tiinan rahoja koskevien ehtojen perusteella

$$z = \frac{12}{7}y \quad \text{ja} \quad z = 1011 + y,$$

joten

$$\frac{12}{7}y = 1011 + y.$$

Tästä saadaan, että

$$y = 1011 \cdot \frac{7}{5} = 1\,415{,}40$$

ja edelleen $z = 1\,011{,}00 + 1\,415{,}40 = 2\,426{,}40$. Laurin ja Annan rahoja koskevan ehdon perusteella

$$0{,}35 \cdot x = y = 1\,415{,}40,$$

joten

$$x = \frac{1\,415{,}40}{0{,}35} = 4\,044{,}00.$$

Näin ollen kaikkien kolmen rahojen yhteismäärä on $4\,044{,}00 + 1\,415{,}40 + 2\,426{,}40 = 7\,885{,}80$ euroa.

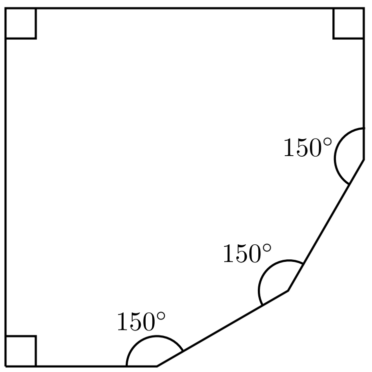
8. Mikä on suurin mahdollinen sivujen lukumäärä konveksissa monikulmiossa, jossa on täsmälleen kolme tylppää kulmaa? Anna esimerkki tällaisesta monikulmiosta. Monikulmio on konveksi, jos minkä tahansa kahden reunapisteen välinen jana on kokonaan monikulmion sisällä. Kulma on tylppä, jos se on suurempi kuin 90° ja pienempi kuin 180°. Vastaavasti kulma on terävä, jos se on pienempi kuin 90°.

Ratkaisu. Tiedetään, että konveksin n-kulmion sisäkulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$. Tehtävässä vaadittujen kolmen tylpän kulman summa on enemmän kuin $3 \cdot 90° = 270°$, mutta vähemmän kuin $3 \cdot 180° = 540°$. Koska n-kulmion loput $n-3$ kulmaa eivät ole tylppiä, niin ne ovat enintään 90°. Näin ollen

$$(n-2)\cdot 180° < 3 \cdot 180° + (n-3)\cdot 90°,$$

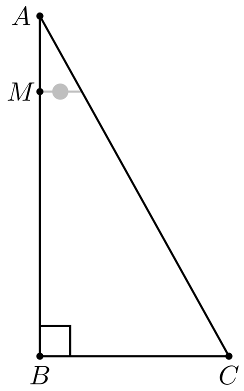
joten $2(n-2) < n-3+6 = n+3$, siis $n < 7$. Vaaditunlaisen konveksin monikulmion suurin kulmien ja näin ollen myös sivujen lukumäärä on täten 6.

Alla on esimerkki yhdestä tällaisesta konveksista kuusikulmiosta, jonka kolme kulmaa ovat 90° ja kolme tylppää kulmaa ovat 150°.



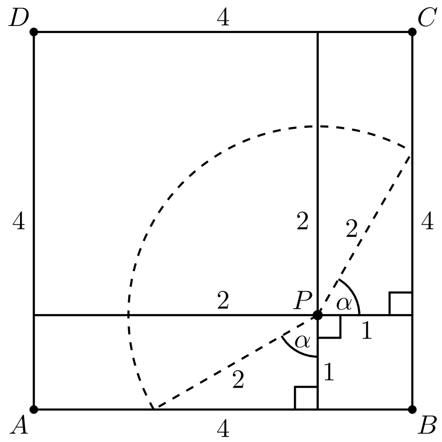
9. Suorakulmaisen kolmion muotoisen purjeen yläosassa on vaaleanharmaa merkki, joka kertoo veneluokan. Alla olevassa kuvassa $MA + AC = CB + BM$. Jos $BM = 7$ m ja $CB = 5$ m, niin mikä on harmaan merkin yläpuolelle jäävän kolmion korkeus?

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen perusteella $AB^2 + CB^2 = AC^2$, joten $(MA+7)^2 + 5^2 = AC^2$. Toisaalta $AC = (CB + BM) - MA = 12 - MA$, joten ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $(MA+7)^2 + 5^2 = (12 - MA)^2$. Näin ollen $MA^2 + 14MA + 49 + 25 = 144 - 24MA + MA^2$, josta saadaan $38MA = 70$ ja edelleen $MA = 70/38 \approx 1{,}84$ m.



10. Jussi sai joululahjaksi robotin, jonka toimintaa hän kokeilee neliönmuotoisella matolla. Neliön sivujen pituudet ovat 4 metriä ja sen kulmat ovat järjestyksessä A, B, C ja D. Neliön sisällä olevan pisteen P etäisyys sivuista AB ja BC on tasan 1 metri. Robotti lähtee liikkeelle pisteestä P ja kulkee 2 metriä suoraan satunnaiseen suuntaan pysähtyen paikalleen. Mikä on todennäköisyys, että robotti päätyy ulos matolta?

Ratkaisu. Piirretään tilanteesta kuva:



Jos robotti pysähtyy pisteestä P kahden metrin päähän kuvassa katkoviivalla piirretylle ympyränkaarelle, niin se pysyy matolla. Muihin suuntiin lähtiessään robotti päätyy ulos matolta. Lasketaan kuvassa α:lla merkittyjen kulmien suuruus. Kulmille pätee $\cos\alpha = 1/2$, joten $\alpha = 60°$. Näin ollen todennäköisyys, että robotti päätyy ulos matolta, on

$$\frac{2 \cdot 60° + 90°}{360°} = \frac{210°}{360°} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583.$$

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja