SOLMU

MATEMATIIKKALEHTI 3/2024

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys

Pääkirjoitus: Selitykset ja järjestykset ratkaisuissa ja laskuissa (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) . . . 3

Pikatietä logiikan rajalle (Antti Valmari) . . . 6

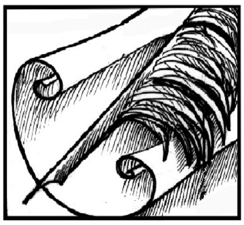
Solmun 2/2024 tehtävien ratkaisut . . . 12

Koagulaatio eli molekyylien kokoontumisajot (Petri Laarne) . . . 16

Matematiikkadiplomit vuonna 2024 (Marjatta Näätänen) . . . 20

Hypo- ja episykloidit (Pekka Alestalo) . . . 21

Transkendenttimitalle helppo arvio (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) . . . 25



Selitykset ja järjestykset ratkaisuissa ja laskuissa

Pääkirjoitus

Some leimahtelee aina toisinaan erilaisista matematiikkaan liittyvistä aiheista. Toisinaan nämä pääsevät jopa isoihin sanomalehtiin. Somessa eräs yleinen aihe on laskujärjestykseen liittyvät kysymykset. Viittaan tällä siis erilaisiin kuvakaappauksiin, joissa on annettu joku lasku, ja lisäksi mahdollisesti kommentti siitä, miten moni ei osaa laskea laskua oikein. Laskujärjestyksen osaaminen on tärkeää. Se on eräs kommunikointitapa siitä, miten lauseke pitää tulkita, ja se on välttämätön sille, että lauseke on yksikäsitteinen ja että lauseke tulkitaan niin kuin haluamme sen tulkittavan. Ilman laskujärjestystä voisi esimerkiksi ajatella, että lauseke $5 - 3 \cdot 4$ pitää laskea vasemmalta oikealle, kuten Suomessa yleensä kirjojakin luetaan. Tällöin siis laskettaisiin ensin vähennyslasku, sitten kertolasku. Tämä ei kuitenkaan ole vakiintuneiden tapojen mukainen.

Keskustelut laskujärjestyksestä kuitenkin yleensä lähinnä häiritsevät minua. Silloin tuntuu siltä, että huomio on mennyt pois matematiikasta ja sen kauneudesta, ja tartutaan kiinni siihen, tulkitaanko lauseke samoin tai oikein. Mahdollisesti yritetään saada kiinni ne, jotka tekevät virheen. Vaikka laskujärjestyksen osaaminen on oleellista, ei tämä liity matemaattisen osaamisen syvyyteen tai päättelyketjujen loogisuuteen, vaan vain siihen, onko järjestys muistissa vai ei.

Alkeellisessa nelilaskimessa ei ole sisäänrakennettua laskujärjestystä, vaan laskijan on jotenkin mietittävä, mahdollisesti oman kirjanpidon avulla, miten lauseke syötetään ja miten sitä käytetään. Vastaavaa pohdintaa joutuu harrastamaan myös pinolaskinta käyttäessä. Pinolaskin on perinteikäs ohjelmoinnin harjoitustyö. Se ei tunne sulkuja, mutta se laskee yhteen-, kerto-, vähennys- ja jakolaskut käyttäjän haluamassa järjestyksessä, kunhan käyttäjä syöttää luvut ja operaatiot sopivaan pinoon, jota laskin vain voi lähteä purkamaan vasemmalta. Laskulauseke saattaa tällöin näyttää joskus melko epäintuitiiviselta, sillä käyttäjä joutuu miettimään nimenomaan sen, miten lauseke pitää kirjoittaa, jotta järjestys on oikea.

Viime aikojen ehkä eniten näkyvyyttä saanut kohu liittyi sekin järjestykseen. Kyse oli siitä, että lapsi oli kirjoittanut tulontekijät eri järjestykseen kuin oli ilmeisesti ajateltu, ja tästä oli vähennetty piste. Tehtävässä siis kysyttiin sitä, miten paljon rahaa jää jäljelle, jos alun perin on 140 euroa ja rahalla ostetaan 9 kappaletta 15 euron elokuvalippuja. Uutisoinnin perusteella odotettu vastaus oli $140 - 9 \cdot 15$, eikä $140 - 15 \cdot 9$.

Matemaattisesti nämä kaksi asiaa ovat aivan sama. Kuten monet kommentoijat ja monessa jutussa on todettu, on ihan sama asia, ostetaanko 9 kappaletta 15 euron elokuvalippuja vai 15 euron elokuvalippuja 9 kappaletta. Olen myös nähnyt ajatuksen siitä, että jälkimmäinen kirjoitusasu, siis $15 \cdot 9$ viittaisi siihen, että laskija kuvittelisi ostavansa 15 kappaletta 9 euron elokuvalippuja. Tämä tuntuisi minusta kovin kummalliselta ja kovin kaukaa haetulta tulkinnalta.

Näen itse tässä kaksi erilaista ulottuvuutta. Toinen on ratkaisujen selittämisen suuntaan, toinen joustavuuden suuntaan. Kumpikin näistä on merkittävä asia, mutta kumpikaan ei edisty sillä, että vaaditaan tarkkoja kirjoitusjärjestyksiä asioille, vaan kummallekin tuotetaan hallaa.

Matemaattisessa joustavuudessa on yksinkertaistetusti kyse siitä, että osataan erilaisia ratkaisustrategioita, ja valitaan tilanteeseen sopiva. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että yhtälön $3\left(x+\frac{3}{5}\right)+6\left(x+\frac{3}{5}\right)=12$ ratkaiseminen aloitettaisiin yhdistämällä vasemman puolen termit, jolloin saataisiin $9\left(x+\frac{3}{5}\right)=12$, jonka jälkeen yhtälön voisi jakaa puolittain luvulla 9, jonka jälkeen ratkaistavaksi tulisi $x+\frac{3}{5}=\frac{12}{9}$, josta saataisiin $x=\frac{12}{9}-\frac{3}{5}=\frac{11}{15}$. Tämä on näppärämpi ja vähemmän virheille altis strategia kuin ensin sulkujen avaaminen vasemmalta puolelta: $3x+\frac{9}{5}+6x+\frac{18}{5}=12$, tämän jälkeen vakiotermien oikealle siirtäminen ja vähennyslaskun tekeminen sekä x-termien yhdistäminen ja lopulta yhdeksällä jakaminen. Jälkimmäinen tapa on täysin pätevä tapa ratkaista yhtälö, mutta laskuvirheiden riski on suurempi ja työtä joutuu tekemään enemmän.

Mielekästä olisi se, että koululaiset oppisivat valitsemaan tilanteeseen sopivan ratkaisutavan. Tähän tuskin kannustaa se, jos joutuu tuijottamaan yksittäisten lukujen kertolaskun järjestystä ja miettimään, että se on oikea. Tällöin huomio menee vääriin asioihin. Lisäksi ennen kaikkea matematiikka alkaa vaikuttaa aihepiiriltä, jossa on vain yksi oikea ratkaisutapa, mikä on kovin kaukana sekä todellisuudesta että niistä tavoista, joilla matematiikkaa huomaamatta käyttää arjessa.

Olen hyvin iloisena lukenut yhdestä alakoulun matematiikan kirjasta yhteenlaskuun liittyviä tekstejä ja tehtäviä: niissä on ensin opetettu yksi menetelmä, sitten toinen, ja lopulta vielä laitettu koululainen itse pohtimaan, kummasta menetelmästä hän pitää enemmän. Tätä lisää, kiitos!

Erilaisten ratkaisujen tekeminen kannustaisi myös ratkaisujen selittämiseen. Selittäminen on tärkeää. Selitykset ratkaisuissa tekee ratkaisuista ymmärrettävämpiä ja kevyemmin luettavia. Selitykset ovat erityisen tärkeitä, jos lasku on hiukan pielessä. Kuitenkin jos oppilaita kannustetaan ratkaisemaan tehtävät tietyn sabluunan mukaan, termien järjestyksen huomioiden, ei tämä kannusta selitysten kirjoittamiseen, sillä tällaisessa tehtävässähän kuka tahansa ratkaisija saisi samanlaisen lausekkeen.

Liian suoraviivainen tehtävä ei välttämättä ole hyvä selitysten harjoitteluun, sillä vaikka toisaalta selityksiä eri laskuille on helppo keksiä, on motivaatio helposti kovin matala. Sopivasti vaikeahko tai sopivan avoin tai monella tavalla lähestyttävä tehtävä sen sijaan voisi olla hyvä harjoitteluun. Samalla tulisi mahdollisesti harjoiteltua myös ongelmanratkaisua tai sitä, että tehtävää voi lähestyä monella tavalla, tai joskus jopa joutuu hiukan testailemaan ennen kuin tietää, mitä tekee.

Vanhemman lapseni koulukirjassa oli yhtälöryhmä: neljä tuntematonta, neljä yhtälöä. Tästä on jo joitakin vuosia, mutta kyseessä oli muistaakseni ehkä 3. luokan oppikirja. Sen ikäisillä koululaisilla ei tietenkään ollut minkäänlaista muodollista koulutusta yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Kyseessä oli tehtävä, jossa oli x, y, z ja w korvattu erilaisilla palloilla, ja lisäksi yksi yhtälö sisälsi vain yhdenlaisia palloja, eli siitä ratkaisu oli helppo aloittaa. Saman sarjan kirjassa oli myös tehtäviä, joissa oli kerrottu kolmen kokonaisluvun pareittaiset tulot, ja piti selvittää kyseiset luvut. Yhtälönratkaisutaidoilla voi tietysti kirjoittaa kolmen yhtälön ryhmän ja ratkaista sen, mutta jälleen kyseessä oli pienten lasten koulukirja. Kyseessä oli siis mainio päättelytehtävä, jossa varmasti auttoi, jos muisti kertotaulut.

Yllä olevat tehtävät sopisivat mainiosti selittämisen harjoitteluun: sen sijaan, että vain kerrottaisiin, miksi luvut tai pallot ovat ne, mitä ne ovat, niin kerrottaisiin, miten tähän on päädytty, tai miksi on varmaa, että oma vastaus toimii. Tässä selitys toisi aitoa lisäinformaatiota. Lisäksi tulisi harjoiteltua matematiikan täsmällisyyttä: miten vakuutan myös toisen ihmisen siitä, että oma ratkaisuni on oikein?

Kuulisin itse todella mielelläni, miten monella tavalla esimerkiksi tehtävää

$$\begin{cases} w+w+w+z=9 \\ x+y+z=10 \\ x+y+y=8 \\ x+x+x+x=8 \end{cases}$$

tai tehtävää

$$\begin{cases} xy=35 \\ xz=20 \\ zy=28 \end{cases}$$

lähestyttäisiin. (Nämä ovat omia mukaelmiani koulukirjojen tehtävistä, esitystapani on kovin paljon tylsempi kuin mitä kirjoissa on, sillä en esimerkiksi piirrä raidallista palloa tai lukuja sisältävää taloa kovin nopeasti Latexilla.)

Tyypillinen tilanne, jossa kaipaisi selityksiä, on se, kun lukee jonkun toisen ratkaisua, ja siinä on jokin virhe, erityisesti, jos virhe on sellainen, että se voi olla vain pieni huolimattomuusvirhe, tai se voi olla merkki pahemmasta ymmärrysongelmasta. Joskus myös pienet virheet voivat tehdä ratkaisut aivan käsittämättömiksi, mutta selitysten ja laskujen yhdistelmä tekeekin niistä luettavia.

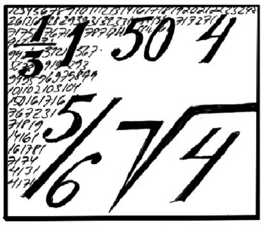
Selitysten etu ei kuitenkaan ole vain se, että vakuuttaa jonkun toisen ihmisen. Selitykset auttavat itseä silloin, jos omiin vanhoihin laskuihin pitää palata. Jostain syystä ne alun perin triviaalit yksityiskohdat ja kaiken läpäisevä selkeä logiikka eivät ole ihan niin triviaaleja ja selkeitä vähän myöhemmin. Niistä on myös hyötyä esimerkiksi laskuvirheiden etsimisessä. Pienissä osissa huolellisesti dokumentoitua laskua on helpompi seurata kuin valtavaa lauseketta tai hillitöntä kaavaviidakkoa vailla yhtään sanaa. Lisäksi selityksissä joutuu formalisoimaan hyvin selväsanaisesti myös itselle sen, mitä on tekemässä ja miksi, ja joskus tämäkin auttaa ajatusvirheiden bongaamisessa. Selityksistä hyötyvät kaikki. Niiden harjoitteleminen olisi hyvästä.

Palaan vielä elokuvalipputehtävään. Jos siinä ei olisi pyydettykään lauseketta, vaan tehtävä olisi pyydetty ratkaisemaan keinolla millä hyvänsä, ja selittämään oma ratkaisu lyhyesti opettajalle, naapurille tai vaikka vihkoon, niin olisi luultavasti nähty erilaisia ratkaisuja, eikä olisi tarvinnut pohtia sitä, ymmärtääkö koululainen, että $15 \cdot 9$ tarkoittaa 15 euron elokuvalippuja 9 kappaletta eikä 9 euron elokuvalippuja 15 kappaletta.

Oman mielenkiintoisen lisänsä koko vyyhteen tietenkin tuovat erilaiset laskusäännöt, joilla elämää voi helpottaa: Jos pitää laskea 16 % luvusta 25, on se sama kuin 25 % luvusta 16. Verkosta näitäkin löytyy. Käytännön laskutoimitusten kannalta nämä ovat erittäin hyödyllisiä. Näiden avulla voi laskea päässä monenlaisia asioita, joiden laskeminen päässä voisi muuten olla vähintäänkin työlästä. Toisaalta taas, jos perustelematta joku kirjoittaisi $0{,}25 \cdot 16$, kun tehtävänä olisi laskea 16 % luvusta 25, niin edes minun vapaamieliset tulkintani eivät venyisi tähän asti. Sen sijaan, jos olisi kirjoitettu $0{,}16 \cdot 25 = \frac{16 \cdot 25}{100} = \frac{1}{4} \cdot 16$, niin olisin hyvin onnellinen. Tämä ratkaisu onkin taas jo sellainen, mikä sisältää selityksen, vaikkakaan ei sanallista, mutta lukijalle on selvää, mitä tapahtuu.

Tämän periaatteen pitäisikin olla ensisijainen: pidetään lukija kartalla, on se sitten tekstillä, lausekkeilla tai niiden yhdistelmällä. Harvoin riittää vain teksti tai vain lausekkeet, mutta tietysti niitäkin tilanteita on.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Pikatietä logiikan rajalle

Antti Valmari
Jyväskylän yliopisto
antti.valmari@jyu.fi

Johdanto

Tämän kirjoituksen tavoitteena on esitellä joitakin logiikan keskeisiä käsitteitä kuten looginen seuraus, ja sen jälkeen osoittaa eräs varsin voimakas ja yleispätevä mutta poikkeuksellisen helppotajuinen rajoitus koskien mahdollisuuksia ilmaista ja todistaa väitteitä.

Vuoden 1900 tienoilla logiikan tutkimus edistyi valtavaa vauhtia. Silloin toivottiin, että logiikan avulla löytyisi yleispätevä menetelmä tarkastaa matemaattisten väitteiden pätevyyksiä. Monien matemaatikkojen suureksi pettymykseksi 1930-luvulla paljastui, että sellaista menetelmää ei voi olla olemassa. Itse asiassa jo lukujen 0, 1, 2, 3, ... yhteenlasku ja kertolasku käyttäytyvät niin monimutkaisesti, että vaikka rajoittauduttaisiin niihin, ei täydellistä totuustarkastinta voi olla olemassa.

Tämä tulos tunnetaan Gödelin ensimmäisenä epätäydellisyyslauseena. (Jos ollaan aivan tarkkoja, ne eivät ole sama asia, vaan ovat vain hyvin läheistä sukua toisilleen.) Sillä oli valtava merkitys. Sitä on kansantajuistettu moneen kertaan. Ikävä kyllä tuloksen todistus sisältää suuren määrän teknisiä yksityiskohtia, joita ei voida kansantajuistuksissa käydä läpi. Siksi kansantajuistukset jättävät tuloksen jossain määrin mysteeriksi.

Logiikan periaatteellisiin rajoituksiin on kuitenkin olemassa muitakin reittejä. Tässä kirjoituksessa esitellään ja todistetaan rajoitus, joka liittyy saavutettavuuden käsitteeseen. Saavutettavuus on arkikokemukselle tuttu esimerkiksi maantiekartoista: paikkakunta on saavutettavissa toisesta, jos ja vain jos ensin mainitusta pääsee jälkimmäiseen maanteitä pitkin. Esimerkiksi Lappeenranta on saavutettavissa Turusta, mutta Maarianhamina ei ole, koska Maarianhamina sijaitsee meren takana niin että välissä ei ole siltaa eikä tunnelia.

On olemassa vahvuudeltaan erilaisia logiikoita. Joissakin niistä on rajoitteita siinä mitä kaavojen avulla voidaan ilmaista, mutta todistamisen osalta tilanne on ihanteellinen: jokainen pätevä kaava voidaan todistaa, ja mitään epäpätevää kaavaa ei voi todistaa. (Luvussa ”Looginen seuraus” selviää, mitä ”pätevä” tarkoittaa tässä yhteydessä, ja miksi se, toisin kuin ”tosi”, on tähän oikea käsite.) Joissakin muissa ilmaisuvoima on suurempi, mutta vastaavasti todistamiskyky jää rajallisemmaksi: on olemassa päteviä kaavoja, joita ei voi todistaa päteviksi.

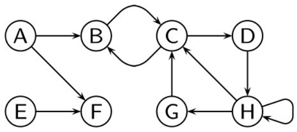
Tässä kirjoituksessa käsiteltävä tulos sanoo, että jokaisessa logiikassa, jossa saavutettavuus voidaan ilmaista kaavana, jää todistamiskyky vajaaksi. Ei ole olemassa, ei voi olla olemassa, sellaista logiikkaa, että siinä pystytään puhumaan saavutettavuudesta ongelmitta, ja todistamaan kaikki ne väitteet joiden pitäisi olla todistettavissa!

Tämä tulos voidaan johtaa lyhyellä päättelyllä suoraan peruskäsitteistä, ilman pitkiä monimutkaisia konstruktioita ja ilman juuri minkäänlaisia taustatietoja matematiikasta tai logiikasta. Toki täytyy tietää mitä saavutettavuus, todistaminen, looginen seuraus ja muutama muu peruskäsite tarkoittavat, mutta ne kerrotaan tässä kirjoituksessa. Itse asiassa suurin osa tästä kirjoituksesta esittelee ja havainnollistaa peruskäsitteitä, ja ”suuren” tuloksemme todistusta on selvästi alle puolet.

Sille ei voi mitään, että tämän kirjoituksen lukeminen vaatii halua ja kykyä huolelliseen abstraktiin ajatteluun. Mutta se lienee hyväksyttävää, ottaen huomioon, että tämä lehti on Matematiikkalehti Solmu.

Suunnatut graafit ja niiden kaavat

Suunnattu graafi on matemaattinen rakenne, joka voi edustaa vaikkapa maantiekarttaa. Siinä on kahdenlaisia osia: *solmuja* ja *kaaria*. Solmut piirretään tavallisesti ympyröinä ja kaaret nuolina. Kukin kaari alkaa jostakin solmusta ja päättyy johonkin solmuun. Alla olevassa kuvassa on suunnattu graafi, jossa on kahdeksan solmua ja yksitoista kaarta.



Jos samasta solmusta alkaa monta kaarta, niin kunkin niistä täytyy päättyä eri solmuun kuin muut. Siis ei saa olla esimerkiksi kahta eri kaarta, joista molemmat alkavat solmusta A ja molemmat päättyvät solmuun B.

Maantiekarttasovelluksessa solmut edustavat risteyksiä ja kaaret risteysten välisiä yksisuuntaisia tienpätkiä. Kaksisuuntainen tienpätkä esitetään piirtämällä solmujen välille kaari kumpaankin suuntaan. Kuvassa solmujen B ja C välillä on kaari kumpaankin suuntaan.

Jotta voisimme puhua suunnatun graafin ominaisuuksista logiikan kaavoilla, otamme käyttöön merkinnän $u \to v$ tarkoittamaan, että solmusta u on kaari solmuun v. Kuvan esimerkissä $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ on tosi, mutta $\mathsf{A} \to \mathsf{E}$ ei ole tosi. Sen, että jokin kaava ei ole tosi, voi väittää lisäämällä kaavan eteen ”$\neg$”. Alkuperäisen kaavan ympärille voidaan laittaa sulkeet ”(” ja ”)” varmistamaan, että täydennetyn kaavan rakenne tulee ymmärretyksi oikein. Kuvan tapauksessa $\neg(\mathsf{A} \to \mathsf{E})$ on tosi.

Kahden kaavan yhdistelmä $kaava_1 \wedge kaava_2$ väittää, että sekä $kaava_1$ että $kaava_2$ on tosi. Nytkin kaavan osien ympärille voi laittaa sulkeet helpottamaan kaavan lukemista. Esimerkiksi $(\mathsf{A} \to \mathsf{F}) \wedge (\mathsf{E} \to \mathsf{F})$ on kuvassa tosi. Vastaavasti $kaava_1 \vee kaava_2$ väittää, että $kaava_1$ tai $kaava_2$ tai molemmat on tosi. Kuvassa $(\mathsf{G} \to \mathsf{H}) \vee (\mathsf{H} \to \mathsf{G})$ on tosi ja $(\mathsf{B} \to \mathsf{C}) \vee (\mathsf{C} \to \mathsf{B})$ on tosi, mutta $(\mathsf{B} \to \mathsf{D}) \vee (\mathsf{D} \to \mathsf{B})$ ei ole tosi.

Kaava $u = v$ väittää, että u ja v ovat sama solmu, ja $u \neq v$ väittää, että ne eivät ole sama solmu. Niinpä $u \neq v$ tarkoittaa täsmälleen samaa kuin $\neg(u = v)$.

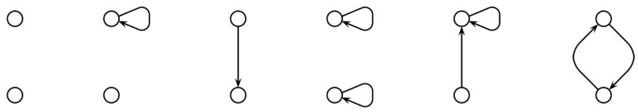
Ilmaus $\exists u : kaava$ väittää, että on olemassa ainakin yksi solmu, jolle *kaava* on tosi. Esimerkiksi $\exists u : (\mathsf{F} \to u)$ väittää, että F:stä lähtee ainakin yksi kaari. Se ei ole tosi kuvan esimerkissä. Kaava $\exists v_1 : \exists v_2 : (u \to v_1) \wedge (u \to v_2) \wedge v_1 \neq v_2$ väittää, että solmusta u lähtee ainakin kaksi kaarta. Se on tosi jos u:ksi valitaan kuvan solmu A, mutta ei ole tosi jos u:ksi valitaan B. Ilmaus $\forall u : kaava$ väittää, että *kaava* on tosi jokaisella solmulla. Esimerkiksi $\forall u : \exists v : (u \to v)$ väittää, että jokaisesta solmusta lähtee ainakin yksi kaari. Se ei ole kuvassa tosi, koska F:stä ei lähde yhtään kaarta.

Alla oleva kaava sanoo, että mistään solmusta ei lähde enempää kuin yksi kaari. Tulemme tarvitsemaan sitä myöhemmin, joten annamme sille (tylsän) nimen (1).

$$\neg\exists u : \exists v_1 : \exists v_2 : (u \to v_1) \wedge (u \to v_2) \wedge v_1 \neq v_2 \qquad (1)$$

Looginen seuraus

Suunnattuja graafeja voi käyttää sekä siten, että solmuilla on nimet, että siten, että nimiä ei ole. Maantiekartan tapauksessa nimet ovat tärkeitä — on eri asia ajaa Tampereelta Jyväskylän kautta Kuopioon kuin Rovaniemeltä Kajaanin kautta Joensuuhun. Mutta kun tutkitaan, millaisia rakenteeltaan erilaisia suunnattuja graafeja on olemassa, eivät nimet ole tärkeitä. Alla on näytetty jokainen suunnattu graafi, jossa on kaksi solmua, ja kustakin solmusta lähtee enintään yksi kaari.



Kuvan graafeista ensimmäinen on ainoa, jossa ei ole yhtään kaarta, eli jolle $\neg\exists u : \exists v : (u \to v)$ on tosi. Kaava $\exists u : (u \to u)$ on tosi toiselle, neljännelle ja viidennelle graafille, mutta ei muille. Sen, että solmuja on täsmälleen kaksi, voi sanoa kaavalla $\exists u : \exists v : u \neq v \wedge \forall w : w = u \vee w = v$. Mille tahansa kuvan graafeista voi jonkin aikaa miettimällä keksiä sellaisen joukon kaavoja, että valittu graafi toteuttaa niistä jokaisen, mutta jokainen muu suunnattu graafi jättää toteuttamatta ainakin yhden.

Kun on valittu joukko kaavoja, niin on kolme mahdollisuutta. Voi olla, että on olemassa monta suunnattua graafia, joille jokainen joukon kaavoista on tosi. Voi olla, että sellaisia suunnattuja graafeja on täsmälleen yksi. Ja voi olla, että niitä ei ole yhtään. Esimerkiksi jos joukon kaavat sanovat, että solmuja on enintään kaksi, kustakin solmusta lähtee enintään yksi kaari, ja johonkin solmuun päättyy kolme kaarta, niin mikään suunnattu graafi ei toteuta niitä kaikkia. Nimittäin jos solmuja on enintään kaksi ja kustakin lähtee enintään yksi kaari, niin kaaria on kaikkiaan enintään kaksi, joten mihinkään solmuun ei voi päättyä kolmea.

Kaava on *looginen seuraus* joukolle kaavoja, jos ja vain jos jokainen suunnattu graafi, joka toteuttaa joukon jokaisen kaavan, toteuttaa myös ensin mainitun kaavan.

Hyvin yksinkertainen esimerkki on, että $\neg\exists u : (u \to u)$ on looginen seuraus kaavasta $\neg\exists u : \exists v : (u \to v)$. Ensimmäinen sanoo, että ei ole kaarta, joka päättyy samaan solmuun kuin mistä se alkaa, ja jälkimmäinen sanoo, että kaaria ei ole lainkaan. Nimittäin jos kaaria ei ole lainkaan, niin ei ole sellaista kaarta, joka päättyy samaan solmuun kuin mistä se alkaa.

Monimutkaisempi esimerkki on, että $\exists u : (u \to u)$ on looginen seuraus kaavoista, jotka sanovat, että solmuja on enintään kaksi ja kaaria on ainakin kolme. Nimittäin edellä sanottiin, että jos samasta solmusta alkaa monta kaarta, niin kunkin niistä täytyy päättyä eri solmuun kuin muut. Niinpä jos kahden solmun tapauksessa halutaan piirtää mahdollisimman monta kaarta ilman että mikään päättyy siihen solmuun josta se alkaa, niin mahdollisuudet loppuvat, kun on piirretty kaari solmusta toiseen ja kaari takaisinpäin.

Loogisen seurauksen määritelmällä on sellainen ehkä kummalliselta tuntuva ominaisuus, että jos mikään suunnattu graafi ei toteuta joukon jokaista kaavaa, niin mikä tahansa kaava on joukon looginen seuraus. Tällöin myös kaikki aina epätodet kaavat, kuten $\exists u : u \neq u$, ovat loogisia seurauksia.

Sen ei kannata antaa häiritä. Aina epätosien kaavojen ilmaantuminen seurauksiin ei tarkoita, että logiikassa olisi vikaa, vaan se on vain merkki siitä, että asetetut lähtökohdat ovat mahdottomat. Saadut omituiset seuraukset eivät voi oikeasti toteutua, koska ne ovat seurauksia lähtökohdista, jotka eivät voi oikeasti toteutua.

Päättelemiselle on tavallista, että jos lähtökohdat ovat ristiriitaiset, niin pätevät päättelysäännöt voivat tuottaa mitä tahansa. On esimerkiksi oikein päätellä, että jos $x = 0$, niin kertomalla molemmat puolet viitosella saadaan $5x = 0$. Samaan tapaan saadaan $3x = 0$. Niistä yhdessä voi päätellä $5x = 3x$. Mutta jos lähtökohtiin kuuluu myös $x = 1$, niin se ja $5x = 3x$ tuottavat yhdessä $5 = 3$!

Hullu lopputulos $5 = 3$ ei ole merkki siitä, että olisi tehty päättelyvirhe, vaan siitä, että lähtökohdat $x = 0$ ja $x = 1$ ovat ristiriitaiset. Tästä syystä (ja muista syistä) on etu eikä haitta, että loogisen seurauksen käsite on määritelty siten, että jos lähtökohdat ovat ristiriitaiset, niin mikä tahansa kaava on looginen seuraus.

On mahdollista, että kaava ei ole looginen seuraus, mutta myöskään sen vastakohdan ilmaiseva kaava ei ole looginen seuraus. Esimerkiksi $\exists u : (u \to u)$ ei ole looginen seuraus mutta myöskään $\neg\exists u : (u \to u)$ ei ole looginen seuraus kaavoista, jotka sanovat että solmuja on kaksi ja kustakin lähtee enintään yksi kaari. Tämän tietää siitä, että edellä olleessa kuvassa on sekä suunnattu graafi, jossa on solmu, josta on kaari itseensä, että suunnattu graafi, jossa ei ole sellaista solmua.

Siis kaava on lähtökohtien looginen seuraus, jos ja vain jos kaava on tosi joka ikisessä rakennelmassa, joka toteuttaa kaikki lähtökohdat. Voi olla, että lähtökohdissa ei ole riittävästi informaatiota määräämään jostakin kaavasta, onko se tosi vai eikö ole. Siinä tapauksessa kaava ei ole lähtökohtien looginen seuraus, mutta myöskään vastakkainen kaava, joka saadaan lisäämällä eteen ”ei”, ei ole lähtökohtien looginen seuraus.

Lähtökohdaksi annettu joukko kaavoja voi olla joko äärellinen tai ääretön. Esimerkiksi alakoulussa opitut yhteenlaskujen tulokset muodostavat äärettömän joukon kaavoja: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $25 + 17 = 42$, $123 + 456 = 579$, $\ldots$.

Äärellinen lähtökohtien joukko voidaan ilmoittaa kirjoittamalla jokainen kaava erikseen. Mutta äärettömän joukon tapauksessa se ei ole mahdollista. Siksi äärettömän joukon tapauksessa vaaditaan, että on olemassa jokin menetelmä, jolla mistä tahansa kaavasta voi testata, onko se mukana lähtökohdissa vai eikö ole. Kokonaislukujen yhteenlaskun tapauksessa sellainen menetelmä on olemassa. Esimerkiksi kaavan $23975896 + 6532746 = 30408642$ voi testata laskemalla yhteenlaskun $23975896 + 6532746$ kynällä ja paperilla, ja tarkastamalla, tuliko tulokseksi 30408642.

Saavutettavuus

Suunnatun graafin solmu v on *saavutettavissa* solmusta u, jos ja vain jos u:sta pääsee v:hen nollaa tai useampaa kaarta pitkin. Tässä määritelmässä kaaria saa kulkea vain niiden suuntaisesti (siis esimerkiksi A:sta B:hen mutta ei toisinpäin), ensimmäisenä kuljetun kaaren pitää alkaa u:sta, seuraavan kaaren pitää alkaa siitä mihin edellinen päättyy, ja viimeisen kaaren pitää päättyä v:hen. Esimerkkikuvassamme D on saavutettavissa A:sta, mutta ei toisinpäin. Toisaalta D on saavutettavissa B:stä ja B on saavutettavissa D:stä.

Koska saavutettavuuden määritelmä sallii myös nolla kaarta, on jokainen solmu saavutettavissa itsestään. (Mistä tahansa pääsee itseensä pysymällä paikallaan.) Jos v on saavutettavissa u:sta ja $v \to w$, niin myös w on saavutettavissa u:sta — jollei muuta kautta, niin ainakin siten, että mennään ensin u:sta v:hen ja jatketaan siitä kulkemalla kaari v:stä w:hen.

Sen, että u:sta on kaari w:hen ja sieltä edelleen v:hen voi väittää kaavalla $(u \to w) \wedge (w \to v)$. Tällaisen kaavan saa kirjoittaa lyhyemmässä muodossa $u \to w \to v$.

Tähänastisilla keinoillamme voidaan väittää esimerkiksi, että v on saavutettavissa u:sta enintään neljällä kaarella. Se onnistuu vaikka seuraavalla kaavalla:

$$\begin{array}{ll} & u = v \\ \vee & (u \to v) \\ \vee & (\exists w_1 : (u \to w_1 \to v)) \\ \vee & (\exists w_1 : \exists w_2 : (u \to w_1 \to w_2 \to v)) \\ \vee & (\exists w_1 : \exists w_2 : \exists w_3 : (u \to w_1 \to w_2 \to w_3 \to v)) \end{array}$$

Samalla tavalla voi ilmaista saavutettavuuden millä tahansa ennalta asetetulla kaarten määrän ylärajalla, jos jaksaa kirjoittaa tarpeeksi pitkän kaavan. Mutta tällä tavalla ei voi ilmaista edellä määriteltyä saavutettavuutta. Ne eivät ole sama asia, koska edellä määritellyssä ei ole ylärajaa kaarten määrälle.

On olemassa niin sanotut ensimmäisen kertaluvun logiikka ja toisen kertaluvun logiikka. Toisen kertaluvun logiikka on ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennos, eli siinä on käytettävissä kaikki samat ilmaisukeinot kuin ensimmäisessäkin kertaluvussa, ja lisäksi muuta. Tähän asti olemme käyttäneet ensimmäisen kertaluvun logiikkaa. Näytämme seuraavaksi, että ottamalla käyttöön toisen kertaluvun tarjoaman keinon, voi saavutettavuuden ilmaista asettamatta kaarten määrälle ylärajaa.

Toisen kertaluvun logiikassa $\exists$:lla ja $\forall$:lla voi luoda paitsi muuttujan kuten edellä, myös symbolin, joka ottaa solmun ja tuottaa totuusarvon. Sellainen edustaa jotakin joukkoa solmuja. Esimerkiksi $\exists P : P(u) \wedge \neg P(v)$ sanoo, että on olemassa sellainen joukko solmuja, että u kuuluu siihen mutta v ei kuulu. Jos u on eri solmu kuin v, niin se on totta, sillä esimerksi u yksinään muodostaa sellaisen joukon. Toisaalta jos u on sama solmu kuin v, niin $\exists P : P(u) \wedge \neg P(v)$ ei ole totta, koska se väittää, että on olemssa sellainen joukko solmuja, johon u samanaikaisesti kuuluu ja ei kuulu.

Kaava $\exists x : \exists y : P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$ sanoo, että jokin kaari vie P:n edustaman joukon sisältä ulos. Perustelemme kohta, että seuraava kaava on tosi jos ja vain jos v on saavutettavissa u:sta:

$$\begin{array}{l} \forall P : \neg P(u) \vee P(v) \vee \\ \qquad \exists x : \exists y : P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y) \end{array} \tag{2}$$

Oletamme ensin, että v ei ole saavutettavissa u:sta. Osoitamme, että (2) ei toteudu antamalla esimerkin sellaisesta P, että se ei toteuta $\neg P(u)$ eikä $P(v)$ eikä $\exists x : \exists y : P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$.

Valitsemme P:ksi täsmälleen ne solmut, jotka ovat saavutettavissa u:sta. Oletuksemme vuoksi v ei kuulu niihin, eli $P(v)$ ei ole tosi. Koska u on saavutettavissa itsestään kulkemalla nolla kaarta, on $P(u)$ tosi, joten $\neg P(u)$ ei ole tosi. Jos x on saavutettavissa u:sta ja x:stä on kaari y:hyn, niin y on saavutettavissa u:sta kulkemalla ensin x:ään ja sitten mainittua kaarta pitkin y:hyn. Ei siis ole olemassa sellaisia solmuja x ja y, että $P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$ on tosi. Toisin sanoen, $\exists x : \exists y : P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$ ei ole tosi.

Vielä tarvitsee osoittaa, että jos v on saavutettavissa u:sta, niin (2) toteutuu. On tarkasteltava jokainen joukko solmuja. Jos tarkasteltava joukko sisältää v:n, niin $P(v)$ on sille tosi. Jos se ei sisällä u:ta, niin $\neg P(u)$ on sille tosi. Muussa tapauksessa se sisältää u:n muttei v:tä. Koska v on saavutettavissa u:sta, niin on olemassa reitti u:sta v:hen. Koska joukko sisältää u:n mutta ei v:tä, on tällä reitillä kohta, jossa solmu kuuluu joukkoon mutta reitin seuraava solmu ei kuulu. Sille $P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$ on tosi. Niinpä $\exists x : \exists y : P(x) \wedge (x \to y) \wedge \neg P(y)$ on tosi.

Päätteleminen

Jotta voitaisiin päätellä, lähtökohtina käytettävien kaavojen lisäksi tarvitaan *päättelysääntöjä*. Päättelysääntöjen kokoelma riippuu käytössä olevasta logiikasta (kuten edellä todettiin, ei ole olemassa vain yhtä logiikkaa, vaan monta erilaista). Samallekin logiikalle se voidaan muodostaa monilla eri tavoilla.

Kunnolliset päättelysääntöjen kokoelmat ovat liian monimutkaisia tässä esitettäviksi. Toisaalta tämä kirjoitus ei tarvitse päättelysääntöjen yksityiskohtia, vaan hyvin karkea yleiskäsitys riittää. Siksi tyydymme pariin pieneen esimerkkiin päättelysääntöjen käyttämisestä. Ne eivät liity suunnattuihin graafeihin.

> Jos on päätelty että aurinko paistaa ja on päätelty että linnut laulavat, niin saa päätellä (aurinko paistaa) $\wedge$ (linnut laulavat).
>
> Jos on päätelty, että jokainen ihminen on laulun arvoinen, niin saa päätellä, että sinä olet laulun arvoinen.

Kaavan *todistaminen* tarkoittaa askel askeleelta etenevää päättelyä, joka nojautuu vain lähtökohdiksi annettuihin kaavoihin sekä valittuun kokoelmaan kuuluviin päättelysääntöihin, ja tuottaa todistettavan kaavan lopputuloksekseen.

Päättely voi koostua vain äärellisestä määrästä päättelyaskelia, koska muutoin se kestäisi äärettömän kauan eli ei loppuisi koskaan. Kukin päättelyaskel voi käyttää vain äärellistä määrää lähtökohdiksi asetettuja kaavoja, koska on mahdotonta käsitellä yhtäaikaa ääretöntä määrää informaatiota.

Näistä seuraa, että vaikka lähtökohdiksi annettuja kaavoja voi olla äärettömän monta, kukin yksittäinen päättely käyttää niistä vain äärellistä määrää. Päättely voi esimerkiksi käyttää *mitä tahansa* kokonaislukujen yhteenlaskujen tuloksia ja toinen päättely joitakin muita, mutta mikään *yksi* päättely ei voi käyttää niitä kaikkia.

Logiikan rajoista kertova tulos

Nyt meillä on kaikki tarvittavat käsitteet, jotta voimme lausua logiikan rajoista kertovan tuloksemme. Sen, että tulos pitää paikkansa, perustelemme seuraavassa luvussa.

> Tulos koskee jokaista logiikkaa, joka pystyy ilmaisemaan kaavana käsitteen ”saavutettavuus”. Jokainen päättelyjärjestelmä sille logiikalle joko todistaa jonkin epäpätevän kaavan, tai jättää todistamatta jonkin pätevän kaavan. (Tässä yhteydessä ”pätevä” tarkoittaa, että kaava on lähtökohtien looginen seuraus.)

Saavutettavuus ilmaistiin edellä toisen kertaluvun logiikan kaavana (2). Siksi tuloksesta seuraa, että toisen kertaluvun logiikalle ei ole olemassa päättelyjärjestelmää, joka pystyy todistamaan kaiken sen mitä pitääkin mutta ei todista mitään liikaa. (Toisen kertaluvun logiikkaa käytetään vähemmän kuin ensimmäisen kertaluvun. Tämä on yksi syy siihen.)

Tuloksen perustelu

Perustelemme edellisen luvun tuloksen seuraavasti. Oletamme, että käytettävissä oleva logiikka pystyy ilmaisemaan käsitteen ”saavutettavuus” kaavana, ja että päättelyjärjestelmä todistaa kaikki lähtökohtien loogiset seuraukset. Osoitamme, että se todistaa myös ainakin yhden kaavan, joka ei ole lähtökohtien looginen seuraus.

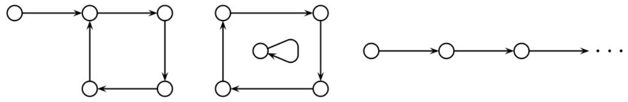
Oletamme siis, että käytettävissä on kaava, joka sanoo, että solmu v on saavutettavissa solmusta u. Se voi olla (2) tai se voi olla jokin muu. Emme ota kantaa miltä se oikeasti näyttää, mutta jotta voisimme puhua siitä, meidän täytyy merkitä sitä jotenkin. Merkitsemme sitä $u \to^* v$.

Otamme tässä vaiheessa lähtökohdiksi seuraavat kaavat (myöhemmin jätämme osan pois):

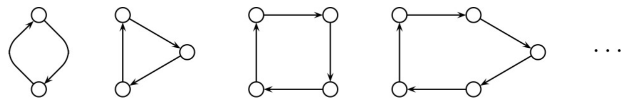
- $\forall u : \forall v : u \to^* v$ (jokainen solmu on saavutettavissa jokaisesta solmusta)
- kaava (1) (kustakin solmusta lähtee enintään yksi kaari)
- $\exists v_1 : \exists v_2 : v_1 \neq v_2$ (solmuja on ainakin kaksi)
- $\exists v_1 : \exists v_2 : \exists v_3 : v_1 \neq v_2 \land v_1 \neq v_3 \land v_2 \neq v_3$ (solmuja on ainakin kolme)
- $\exists v_1 : \exists v_2 : \exists v_3 : \exists v_4 : v_1 \neq v_2 \land v_1 \neq v_3 \land v_1 \neq v_4 \land v_2 \neq v_3 \land v_2 \neq v_4 \land v_3 \neq v_4$ (solmuja on ainakin neljä)
- … (solmuja on ainakin viisi, solmuja on ainakin kuusi, …)

Viimeisen pompulan kohdalla olevat kolme pistettä edustavat äärettömän montaa kaavaa. On helppo keksiä, miten kukin niistä kirjoitetaan. Siksi mistä tahansa kaavasta voi testata, kuuluuko se lähtökohdiksi asettamiimme kaavoihin. Niinpä luvun ”Looginen seuraus” lopussa asetettu vaatimus toteutuu.

Kolme ensimmäistä kaavaa sulkee pois suuren joukon suunnattuja graafeja. Alla olevassa kuvassa on pois suljetuista kolme esimerkkiä. Niissä ensimmäinen kaava ei toteudu, mutta toinen ja kolmas toteutuvat. Kolmannessa esimerkissä on äärettömän monta solmua ja kaarta.



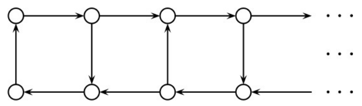
Kolme ensimmäistä kaavaa jättää jäljelle vain alla olevassa kuvassa näytetyt suunnatut graafit, eli silmukat, jotka koostuvat 2, 3, 4, … solmusta ja kaaresta. On helppo tarkastaa, että jokainen sellainen suunnattu graafi toteuttaa kolme ensimmäistä kaavaa. Perustelemme kuvan jälkeen, että mikään muu suunnattu graafi ei toteuta.



Jos suunnatussa graafissa on alle kaksi solmua, niin se ei toteuta kolmatta kaavaa. Jos siinä on ainakin kaksi solmua ja jos jostakin solmusta ei lähde yhtään kaarta, niin siitä solmusta ei pääse muihin solmuihin, joten ensimmäinen kaava ei toteudu. Jos jostakin solmusta lähtee monta kaarta, niin toinen kaava ei ole tosi.

Tarkastamatta on enää suunnatut graafit, joissa on ainakin kaksi solmua ja jokaisesta solmusta lähtee täsmälleen yksi kaari. Valitaan jokin solmu ja kuljetaan siitä alkaen kaaria. Jos lopulta tullaan takaisin siihen solmuun, josta aloitettiin, ja jos matkan varrella käytiin jokaisessa solmussa, niin graafi on kuvan mukainen. Jos matkan varrella ei käyty jokaisessa solmussa, niin käymättä jääneet eivät ole saavutettavissa aloitussolmusta. Jos ei tulla takaisin siihen solmuun, josta aloitettiin, niin aloitussolmu ei ole saavutettavissa reitin muista solmuista. Kummassakaan tapauksessa ensimmäinen kaava ei ole tosi. (Tällaisista oli esimerkkejä aikaisemmassa kuvassa.)

Loput lähtökohtakaavat sanovat, että solmuja täytyy olla ainakin kolme, solmuja täytyy olla ainakin neljä, solmuja täyty olla ainakin viisi, … . Jos ne kaikki toteutuvat, niin solmuja on äärettömän monta. Se ei itsessään ole mahdotonta. Alla on esimerkki suunnatusta graafista, jossa on äärettömän monta solmua ja jossa jokainen solmu on saavutettavissa jokaisesta.



Mutta on mahdotonta, että solmuja on äärettömän monta, kustakin lähtee enintään yksi kaari, ja jokainen on saavutettavissa jokaisesta. Kun jostakin solmusta lähdetään kulkemaan kaaria pitkin, niin jos ei koskaan tulla takaisin siihen solmuun josta aloitettiin, niin aloitussolmu ei ole saavutettavissa reitin muista solmuista. Jos tullaan takaisin siihen solmuun josta aloitettiin, niin kuljettiin vain äärellinen määrä solmuja. Siinä tapauksessa reitin ulkopuolelle jäi äärettömän monta solmua. Ne eivät ole saavutettavissa aloitussolmusta.

Ei siis ole olemassa suunnattua graafia, joka toteuttaa jokaisen lähtökohdaksi asettamamme kaavan. Luvussa ”Looginen seuraus” todettiin, että aina epätosi kaava $\exists u : u \neq u$ on tällöin lähtökohtien looginen seuraus. Päättelyjärjestelmä pystyy todistamaan sen, koska tämän luvun alussa rajoituimme sellaisiin päättelyjärjestelmiin, jotka pystyvät todistamaan kaikki loogiset seuraukset.

Luvussa ”Päätteleminen” kerrottiin, että kukin päättely käyttää vain äärellistä määrää lähtökohdiksi annettuja kaavoja. Siksi on olemassa jokin sellainen luku n, että se päättely, joka todistaa $\exists u : u \neq u$, ei käytä mitään kaavoista ”solmuja on ainakin $n+1$”, ”solmuja on ainakin $n+2$”, $\ldots$. (Luvuksi n kelpaa suurin, joka löytyy niistä kaavoista ”solmuja on ainakin n”, joita päättely käyttää. Jollei päättely käytä mitään niistä, voidaan valita $n = 1$.)

Seuraavaksi tarkastelemme, mitä tapahtuu, jos poistamme käyttämättä jääneet kaavat lähtökohdistamme. Mainittu päättely menee edelleen läpi, koska se ei käytä poistettuja kaavoja. Toisaalta silmukka, jossa on n solmua ja n kaarta, toteuttaa kaikki jäljelle jääneet lähtökohtakaavat. Mutta $\exists u : u \neq u$ ei päde sille. Niinpä päättelyjärjestelmä todistaa jäljelle jääneistä lähtökohdista kaavan $\exists u : u \neq u$, joka ei ole jäljelle jääneiden lähtökohtien looginen seuraus.

Loppuhuomautuksia

Totesimme luvussa ”Logiikan rajoista kertova tulos”, että tuloksestamme seuraa, että toisen kertaluvun logiikalle ei ole olemassa päättelyjärjestelmää, joka pystyy todistamaan kaiken sen mitä pitääkin mutta ei todista mitään liikaa. Suurella vaivalla voidaan todistaa, että ensimmäisen kertaluvun logiikalle on olemassa sellainen päättelyjärjestelmä. Se ja tuloksemme yhdessä kertovat, että ensimmäisen kertaluvun logiikalla ei voi ilmaista kaavana käsitettä ”saavutettavuus”. Niinpä logiikassakin pätee sananlasku ”suo siellä, vetelä täällä”.

Tässä kirjoituksessa esitelty tulos ei ole ensimmäinen logiikan rajoja koskeva tulos. Ensimmäinen oli 1930-luvulla suurella vaivalla todistettu tulos, joka on liian monimutkainen tässä kerrottavaksi. Mutta sillä on seuraus, joka voidaan kertoa tässä: ei voi olla olemassa menetelmää, joka pystyy selvittämään mistä tahansa kaavasta, joka noudattaa kohta kerrottavia rajoitteita, onko se tosi. Kaava puhuu luonnollisista luvuista (eli luvuista 0, 1, 2, $\ldots$). Siinä ei saa esiintyä muuta kuin lukuvakioita kuten 0 ja 1, yhteenlaskuja ”$+$”, kertolaskuja ”$\cdot$”, yhtäsuuruuden vertailuja ”$=$” sekä ensimmäisen kertaluvun logiikan symboleita.

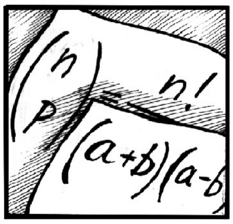
Koska luonnolliset luvut ovat monen muun matemaattisen järjestelmän taustalla, seuraa tästä tuloksesta, että monella muullakaan matematiikan alalla ei voi olla olemassa menetelmää selvittää mistä tahansa sen alan kaavasta, onko se tosi.

Koska ensimmäisen kertaluvun logiikalle on olemassa edellä kerrotunlainen päättelyjärjestelmä, seuraa tuloksesta myös, että luonnollisten lukujen ominaisuuksia ei voi esittää kattavasti asettamalla lähtökohdaksi joukko ensimmäisen kertaluvun kaavoja, joka täyttää luvun ”Looginen seuraus” lopussa mainitun menetelmäehdon.

Luonnollisten lukujen ominaisuudet voi esittää kattavasti toisen kertaluvun kaavoilla. Samaan tapaan kuin edellä saavutettavuuden käsitteen avulla, myös tätä kautta pääsee siihen johtopäätökseen, että toisen kertaluvun logiikalle ei ole olemassa päättelyjärjestelmää, joka todistaa kaiken sen mitä pitääkin eikä yhtään enempää.

Vuoden 1900 tienoilla matematiikka oli kriisissä. Matematiikka oli laajentunut uusille alueille ja vanhoilla alueilla saavutettiin entistä mahtavampia tuloksia, mutta samalla törmättiin ristiriitoihin, jotka kertoivat, että jotakin on pielessä. Kriisi ratkesi vähän kerrassaan vuoteen 1950 mennessä. Logiikalla oli suuri merkitys pielessä olleiden asioiden tunnistamisessa ja korjaamisessa, ja toisaalta kriisi vauhditti logiikan tutkimusta.

Näistä asioista kertoo vuonna 2009 ilmestynyt sarjakuvaromaani ”Logicomix: Nerouden ja hulluuden rajalla” (Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos ja Annie Di Donna). Siinä on pikkuisen otettu taiteilijan vapauksia historiallisten tosiseikkojen suhteen, ja myös matematiikan osalta on jouduttu jonkin verran vetämään mutkia suoriksi. Siitä huolimatta se on erittäin suositeltavaa lukemista. Se on ylivoimaisesti kiehtovin johdatus tähän aihepiiriin mitä löytää voi!



Solmun 2/2024 tehtävien ratkaisut

1. Frans jakoi suorakulmion yhdeksäksi neliöksi. Hän havaitsi, että yhden neliön pinta-ala on 64 cm^2, kahden neliön pinta-ala on 16 cm^2 ja muiden neliöiden pinta-ala on 4 cm^2. Mikä oli alkuperäisen suorakulmion piiri?

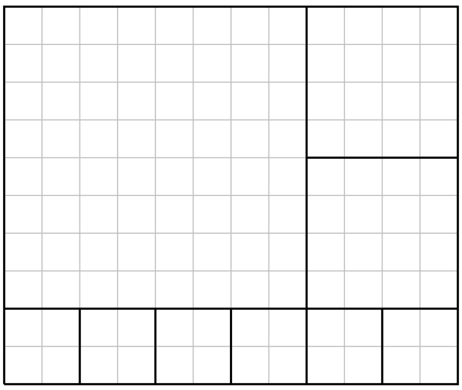
Ratkaisu. Alkuperäisen suorakulmion pinta-ala on yhtä suuri kuin neliöiden yhteispinta-ala, joka on

$$64 + 2 \cdot 16 + 6 \cdot 4 = 120 \ (\text{cm}^2).$$

Neliöiden sivujen pituudet ovat 8, 4 ja 2 senttimetriä. Koska neliöiden sivujen pituudet ovat parillisia lukuja, niin myös suorakulmion sivujen pituudet ovat parillisia lukuja. Luku 120 voidaan esittää kahden parillisen luvun tulona neljällä eri tavalla:

$$120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12.$$

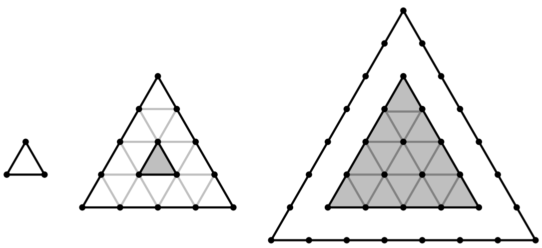
Näistä vain viimeinen tulo $10 \cdot 12$ on mahdollinen, koska suurimman neliön sivujen pituudet ovat 8 cm ja näin ollen suorakulmion molempien sivujen pituuksien on oltava vähintään 8 cm. Suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 10 cm ja 12 cm, voidaan jakaa vaadituiksi neliöiksi kuten alla olevassa kuvassa on esitetty.



Näin ollen suorakulmion piiri on

$$2 \cdot (10 \text{ cm} + 12 \text{ cm}) = 44 \text{ cm}.$$

2. Piirretään pieni tasasivuinen kolmio ja ympäröidään se yhdellä kerroksella samanlaisia pieniä kolmioita niin, että saadaan suurempi tasasivuinen kolmio alla olevan kuvan mukaisesti. Ympäröidään sitten saatu suurempi tasasivuinen kolmio vastaavasti yhdellä kerroksella pieniä kolmioita, jolloin saadaan vielä suurempi tasasivuinen kolmio (katso kuva), ja niin edelleen.



(a) Kuinka monta pientä kolmiota kolmannessa kolmiossa on? (Kolmas kolmio on kuvassa oikealla.)

(b) Kuinka monta pientä kolmiota kahdennessakymmenennessä kolmiossa on?

(c) Kuinka monta pientä kolmiota n. kolmiossa on?

Ratkaisu. Saadun suuremman kolmion sivun pituus kasvaa jokaisella askeleella $1 + 2 = 3$ pituusyksikköä edellisestä kolmiosta (katso kuva).

(a) Kolmannen kolmion sivun pituus on näin ollen $1 + 2 \cdot 3 = 7$, jonka voi tarkistaa kuvasta. Tämä on myös pikkukolmiorivien lukumäärä isossa kolmiossa. Alimmalla rivillä on $7+6=13$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $6+5=11$ pikkukolmiota, kolmannella rivillä on $5+4=9$ pikkukolmiota, neljännellä rivillä on $4+3=7$ pikkukolmiota, viidennellä rivillä on $3+2=5$ pikkukolmiota, kuudennella rivillä on $2+1=3$ pikkukolmiota ja ylimmällä seitsemännellä rivillä on 1 pikkukolmio. Näin ollen kolmiossa on pikkukolmioita yhteensä $13+11+9+7+5+3+1=49$.

(b) Kahdennenkymmenennen kolmion sivun pituus on $1+19\cdot 3=58$. Kohdan (a) ratkaisun ideaa seuraten havaitaan, että alimmalla rivillä on $58+57=115$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $57+56=113$ pikkukolmiota, jne. Isossa kolmiossa on näin ollen pikkukolmioita yhteensä

$$1+3+\cdots+115=\sum_{k=1}^{58}(2k-1)=\frac{58(1+115)}{2}=3\,364.$$

(c) Seuraten kohtien (a) ja (b) ratkaisuja saadaan, että n. kolmion sivun pituus on $1+(n-1)\cdot 3=3n-2$, joka on myös pikkukolmiorivien lukumäärä. Alimmalla rivillä on $(3n-2)+(3n-2-1)=6n-5$ pikkukolmiota, toisella rivillä on $(3n-2-1)+(3n-2-2)=6n-7$ pikkukolmiota, jne. Isossa kolmiossa on näin ollen pikkukolmioita yhteensä

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(6n-7)+(6n-5)\\ &=\sum_{k=1}^{3n-2}(2k-1)=\frac{(3n-2)(6n-4)}{2}=(3n-2)^2.\end{aligned}$$

3. Kimin piti ratkaista epäyhtälö

$$\frac{4}{x-2}>5,$$

mutta hän korvasi luvun 5 vahingossa toisella positiivisella kokonaisluvulla. Hän ratkaisi muuttuneen epäyhtälön oikein ja sai ratkaisuksi $2<x<4$. Millä positiivisella kokonaisluvulla hän oli korvannut epäyhtälössä luvun 5?

Ratkaisu. Kun epäyhtälössä luku 5 korvataan positiivisella kokonaisluvulla n, niin

$$\frac{4}{x-2}>n>0,$$

joten $x-2>0$. Näin ollen kertomalla epäyhtälö puolittain luvulla $x-2$ saadaan $4>nx-2n$, joten

$$\frac{4+2n}{n}>x.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{4+2n}{n}=4,$$

koska epäyhtälön ratkaisu on $2<x<4$. Saadaan yhtälö $4n=4+2n$, joten $n=2$. Epäyhtälön

$$\frac{4}{x-2}>2$$

ratkaisu on $2<x<4$.

4. Jaetaan positiivinen kokonaisluku n jokaisella lukua n pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla ja merkitään $f(n)$:llä saatujen jakojäännösten summaa. Esimerkiksi jaettaessa luku $n=5$ luvuilla 1, 2, 3 ja 4 saadaan jakojäännökset 0, 1, 2 ja 1, joten $f(5)=0+1+2+1=4$. Ratkaise yhtälö $f(n)=n$.

Ratkaisu. Havaitaan heti aluksi, että kun luku n jaetaan sen puolikasta suuremmilla luvuilla, niin jakojäännös ei ole 0.

Tarkastellaan ensin tapausta n on parillinen. Tällöin $n=2k$, missä $k\in\mathbb{N}$. Jaettaessa n luvuilla $k+1$, $k+2,\ldots,n-1$ saadaan jakojäännöksiksi luvut $k-1$, $k-2,\ldots,1$, joiden summa on

$$(k-1)+(k-2)+\cdots+1=\frac{k(k-1)}{2}.$$

Tälle summalle pätee

$$\frac{k(k-1)}{2}>n=2k \iff \frac{k(k-5)}{2}>0,$$

kun $k>5$. Näin ollen yhtälöllä $f(n)=n=2k$ ei ole ratkaisua, kun $n>10$.

Tarkastellaan sitten tapausta n on pariton. Tällöin $n=2k+1$, missä $k\in\mathbb{N}$. Jaettaessa n luvuilla $k+1$, $k+2,\ldots,n-1$ saadaan jakojäännöksiksi luvut k, $k-1$, $k-2,\ldots,1$, joiden summa on

$$k+(k-1)+(k-2)+\cdots+1=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Tälle summalle pätee

$$\begin{aligned}&\frac{k(k+1)}{2}>2k+2>n=2k+1\\ \iff &\frac{(k-4)(k+1)}{2}>0,\end{aligned}$$

kun $k>4$. Näin ollen yhtälöllä $f(n)=n=2k+1$ ei ole ratkaisua, kun $n>9$.

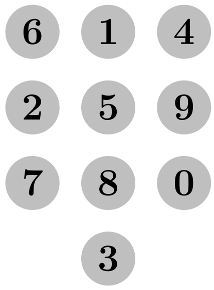
Tarkastelun perusteella yhtälöllä $f(n)=n$ ei ole ratkaisua, kun $n>10$, joten lasketaan $f(n)$:n arvot, kun $n=1,2,\ldots,10$. Saadaan seuraava taulukko:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0	0	1	1	4	3	8	8	12	13

Taulukosta havaitaan, että yhtälön $f(n)=n$ ainoa ratkaisu on $n=8$.

5. Älypuhelimella pankkisovellukseen kirjautuminen vaatii nelinumeroisen PIN-koodin. Turvallisuussyistä

numerot ilmestyvät eri kirjautumiskerroilla satunnaisesti puhelimen näytölle kohtiin, jotka näkyvät alla olevassa kuvassa. Jokaisen numeroiden 0–9 erilaisen sijoittelun todennäköisyys on sama. Alla olevassa kuvassa on esitetty yksi mahdollinen numeroiden sijoittelu. Kun PIN-koodi sisältää neljä eri numeroa, niin mikä on todennäköisyys, että kahdella peräkkäisellä kirjautumiskerralla käyttäjä jättää sormenjälkensä samoihin kohtiin puhelimen näytöllä?



Ratkaisu. PIN-koodin luvut ovat eri lukuja ja ne voivat sijoittua mihin tahansa kohtaan puhelimen näytöllä olevista paikoista. Näin ollen erilaisia mahdollisia lukujen sijoitteluja on $10! = 3\,628\,800$. Kun PIN-koodi syötetään ensimmäisen kerran, niin näytöllä olevista paikoista määräytyvät ne neljä kohtaa, joihin toisella kirjautumiskerralla PIN-koodin numeroiden pitää sijoittua. Erilaisia mahdollisuuksia PIN-koodin neljän numeron sijoittumiselle on $4! = 24$. Loput kuusi numeroa voivat sijoittua näytöllä jäljellä oleviin kuuteen paikkaan $6! = 720$ eri tavalla. Koska PIN-koodin neljän ja muiden kuuden luvun sijoittumiset ovat toisistaan riippumattomia, niin suotuisien tapausten lukumäärä on $24 \cdot 720 = 17\,280$. Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{17\,280}{3\,628\,800} = \frac{1}{210} \approx 0{,}00476.$$

6. Erään reaaliluvun ja sen käänteisluvun summan neliö on 5.

(a) Määritä kyseisen reaaliluvun neliön ja neliön käänteisluvun summa ratkaisematta itse reaalilukua.

(b) Määritä kyseisen reaaliluvun kuution ja kuution käänteisluvun summa ratkaisematta itse reaalilukua.

Ratkaisu. Merkitään kyseistä reaalilukua x:llä. Tarkistetaan ensin, että luku x on olemassa. Ehdosta $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 5$ seuraa, että

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x + \frac{1}{x} = -\sqrt{5}.$$

Näin ollen

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

tai

$$x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0,$$

joilla molemmilla on reaalisia ratkaisuja, koska kummankin toisen asteen yhtälön diskriminantti $D = 5 - 4 = 1$ on positiivinen.

(a) Koska

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5,$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 - 2 = 3.$$

(b) Koska kohdan (a) perusteella

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3,$$

niin

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot 3 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot 2 = x^3 + \frac{1}{x^3},$$

joten

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = -2\sqrt{5}.$$

7. Annalla, Laurilla ja Tiinalla on jokaisella rahaa omalla pankkitilillään enemmän kuin 100 euroa. Laurilla on rahaa 35 prosenttia siitä mitä Annalla on ja Tiinalla on rahaa 12/7 siitä mitä Laurilla on. Kuinka paljon Annalla, Laurilla ja Tiinalla on yhteensä rahaa, kun Tiinalla on 1011 euroa enemmän kuin Laurilla?

Ratkaisu. Merkitään Annan rahamäärää x, Laurin rahamäärää y ja Tiinan rahamäärää z, jotka ovat kaikki suurempia kuin 100. Laurin ja Tiinan rahoja koskevien ehtojen perusteella

$$z = \frac{12}{7}y \quad \text{ja} \quad z = 1011 + y,$$

joten

$$\frac{12}{7}y = 1011 + y.$$

Tästä saadaan, että

$$y = 1011 \cdot \frac{7}{5} = 1\,415{,}40$$

ja edelleen $z = 1\,011{,}00 + 1\,415{,}40 = 2\,426{,}40$. Laurin ja Annan rahoja koskevan ehdon perusteella

$$0{,}35 \cdot x = y = 1\,415{,}40,$$

joten

$$x = \frac{1\,415{,}40}{0{,}35} = 4\,044{,}00.$$

Näin ollen kaikkien kolmen rahojen yhteismäärä on $4\,044{,}00 + 1\,415{,}40 + 2\,426{,}40 = 7\,885{,}80$ euroa.

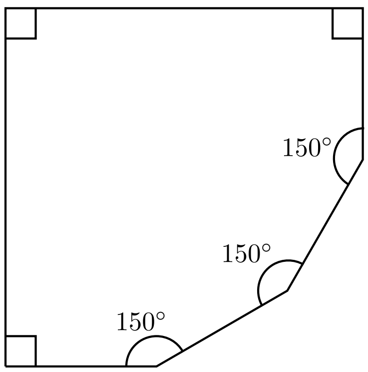
8. Mikä on suurin mahdollinen sivujen lukumäärä konveksissa monikulmiossa, jossa on täsmälleen kolme tylppää kulmaa? Anna esimerkki tällaisesta monikulmiosta. Monikulmio on konveksi, jos minkä tahansa kahden reunapisteen välinen jana on kokonaan monikulmion sisällä. Kulma on tylppä, jos se on suurempi kuin 90° ja pienempi kuin 180°. Vastaavasti kulma on terävä, jos se on pienempi kuin 90°.

Ratkaisu. Tiedetään, että konveksin n-kulmion sisäkulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$. Tehtävässä vaadittujen kolmen tylpän kulman summa on enemmän kuin $3\cdot 90° = 270°$, mutta vähemmän kuin $3\cdot 180° = 540°$. Koska n-kulmion loput $n-3$ kulmaa eivät ole tylppiä, niin ne ovat enintään 90°. Näin ollen

$$(n-2)\cdot 180° < 3\cdot 180° + (n-3)\cdot 90°,$$

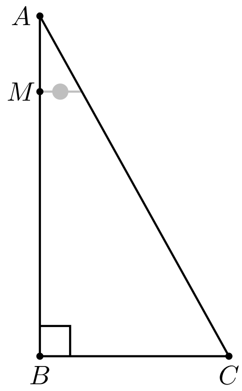
joten $2(n-2) < n-3+6 = n+3$, siis $n < 7$. Vaaditunlaisen konveksin monikulmion suurin kulmien ja näin ollen myös sivujen lukumäärä on täten 6.

Alla on esimerkki yhdestä tällaisesta konveksista kuusikulmiosta, jonka kolme kulmaa ovat 90° ja kolme tylppää kulmaa ovat 150°.



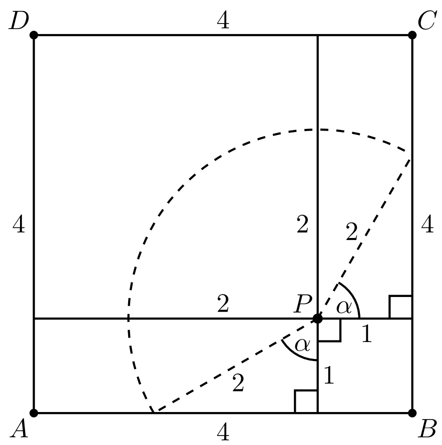
9. Suorakulmaisen kolmion muotoisen purjeen yläosassa on vaaleanharmaa merkki, joka kertoo veneluokan. Alla olevassa kuvassa $MA + AC = CB + BM$. Jos $BM = 7$ m ja $CB = 5$ m, niin mikä on harmaan merkin yläpuolelle jäävän kolmion korkeus?

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen perusteella $AB^2 + CB^2 = AC^2$, joten $(MA+7)^2 + 5^2 = AC^2$. Toisaalta $AC = (CB+BM) - MA = 12 - MA$, joten ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $(MA+7)^2 + 5^2 = (12-MA)^2$. Näin ollen $MA^2 + 14MA + 49 + 25 = 144 - 24MA + MA^2$, josta saadaan $38MA = 70$ ja edelleen $MA = 70/38 \approx 1{,}84$ m.



10. Jussi sai joululahjaksi robotin, jonka toimintaa hän kokeilee neliönmuotoisella matolla. Neliön sivujen pituudet ovat 4 metriä ja sen kulmat ovat järjestyksessä A, B, C ja D. Neliön sisällä olevan pisteen P etäisyys sivuista AB ja BC on tasan 1 metri. Robotti lähtee liikkeelle pisteestä P ja kulkee 2 metriä suoraan satunnaiseen suuntaan pysähtyen paikalleen. Mikä on todennäköisyys, että robotti päätyy ulos matolta?

Ratkaisu. Piirretään tilanteesta kuva:

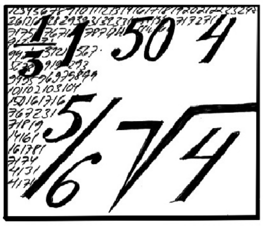


Jos robotti pysähtyy pisteestä P kahden metrin päähän kuvassa katkoviivalla piirretylle ympyränkaarelle, niin se pysyy matolla. Muihin suuntiin lähtiessään robotti päätyy ulos matolta. Lasketaan kuvassa α:lla merkittyjen kulmien suuruus. Kulmille pätee $\cos\alpha = 1/2$, joten $\alpha = 60°$. Näin ollen todennäköisyys, että robotti päätyy ulos matolta, on

$$\frac{2\cdot 60° + 90°}{360°} = \frac{210°}{360°} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583.$$

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja



Koagulaatio eli molekyylien kokoontumisajot

Petri Laarne
Väitöskirjatutkija, Helsingin yliopisto
`https://www.nollakohta.fi`

Kesäaamun ensimmäiset säteet lankeavat havumetsän ylle. Lyyrisempi henkilö intoutuu kuvailemaan pyörteilevässä usvassa leijuvaa metsän tuoksua. Kemisti työntää nanometriluokan mittalaitteensa sumuun ja toteaa, ettei metsän tuoksussa ole romantiikkaa vaan monoterpeenejä. Ja sitten matemaatikko kirjoittaa yhtälön, joka punoo molekyylit runoksi.

Klimppejä ilmakehässä

Vaikka edeltävät henkilöt ovatkin kuvitteellisia ja kaukaa haettuja, on tilanne tosi. Puiden uloshengityksessä vapautuu hapen lisäksi pieniä orgaanisia molekyylejä. Ne paitsi luovat metsän tuoksun, myös törmäilevät toisiinsa ja reagoivat auringonvalon kanssa.

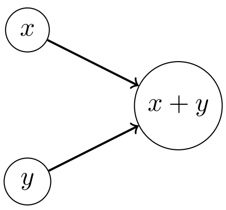
Osa näistä molekyyleistä kasautuu yhteen isommiksi klimpeiksi, joiden ympärille voi tiivistyä vesipisara. Puhdas vesihöyry ei nimittäin tiivisty kovin helposti vaan tarvitsee jonkin epäpuhtauden, jonka ympärille kerääntyä. Osa pisaroista kohoaa muodostamaan pilviä, jotka heijastavat auringon valoa avaruuteen.

Ei ole vielä sataprosenttisen selvää, miten suuri kokonaisvaikutus juuri puista peräisin olevilla molekyyleilla on ilmastoon. Rooli on vaikeasti tutkittava muttei merkityksetön. Siinä selvitystyössä suomalaiset ilmakehätutkijat ovat kuitenkin olleet jo vuosikymmeniä maailman huippua. Mai Allon kirja [1] kertoo kohokohdat siitä tarinasta.

Tämä ei kuitenkaan ole *Fysiikkalehti Solmu* eikä *Ilmakemialehti Solmu*. Miten matemaatikko alkaisi tutkia puiden tuoksun klimppiytymistä? Mikä olisi yksinkertaisin malli, jossa jo nähtäisiin kiinnostavia ilmiöitä? Pyörteilevät ilmavirtaukset ja kemialliset reaktiot kuuluvat vasta seuraavaan tai sitä seuraavaan versioon.

Kokoontumisen yhtälö

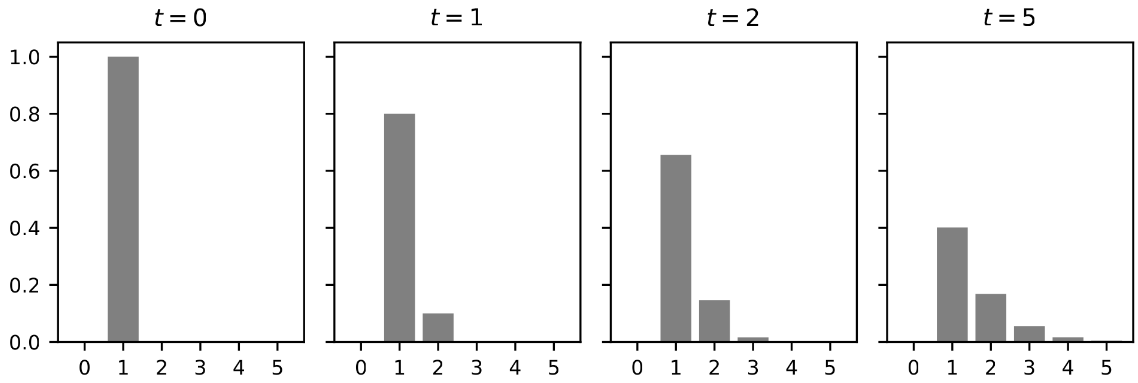
Seuraavaa mallia yksinkertaisemmaksi on paha pistää: molekyylit ovat palleroita, joiden kokoa kuvaa luku x. Jokaisella ajanhetkellä on jokin todennäköisyys sille, että kokoja x ja y olevat pallerot yhdistyvät kokoa $x+y$ olevaksi palleroksi.



Tätä todennäköisyyttä merkitään luvulla K. Tehtävänä olisi ratkaista $f(x,t)$: funktio, joka kertoo kokoa x olevien pallojen lukumäärän ajanhetkellä t. Jätetään tässä määrittelemättä kokojen, lukumäärien ja aikojen yksiköt – tulkinta olkoon fyysikoiden ongelma.

Funktio f toteuttaa yhtälön

$$f(x,t+1) = f(x,t) + \text{muutos}.$$



Kuva 1: Simulaatio, jossa $K = 0{,}1$ ja alkutila koostuu 1 yksiköstä kokoa 1 olevia hiukkasia. Hiukkasten lukumäärä vähenee ajan kuluessa, mutta kokonaismassa pysyy samana.

Muutostermi koostuu kahdesta osasta. Ensinnäkin kokoa x olevia palleroita *muodostuu*, kun kokoa z ja $x-z$ olevat pallot yhdistyvät toisiinsa:

$$\sum_{z=1}^{x-1} Kf(z,t)f(x-z,t).$$

Tässä siis käydään läpi kaikki mahdolliset koot z väliltä $1\ldots(x-1)$ ja katsotaan, kuinka monta yhdistymistä tapahtuu. Se riippuu sekä luvusta K että z- ja $(x-z)$-kokoisten pallojen määrästä edeltävällä ajanhetkellä.

Lisäksi tarvitaan termi palleroiden *häviämiselle*. Kokoa x olevia palloja katoaa, kun $(x+w)$-kokoisia palloja syntyy. Summataan kaikkien tällaisten tapahtumien yli:

$$-\sum_{w=1}^{\infty} Kf(x,t)f(w,t).$$

Tämä termi pitää vielä *kertoa kahdella*, koska yhden pallon syntyminen vaatii kahden pallon häviämisen. (Häviämistermissä on toinenkin summa, jossa x ja w vain ovat toisin päin. Muuttujien nimet eivät vaikuta summan arvoon, joten riittää kertoa kahdella.)

Kaiken kaikkiaan yhtälöksi saadaan siis

$$\begin{aligned} f(x,t+1) = f(x,t) &+ \sum_{z=1}^{x-1} Kf(z,t)f(x-z,t) \\ &- 2f(x,t)\sum_{w=1}^{\infty} Kf(w,t). \end{aligned}$$

Tämä on näppärä muoto yhtälölle, koska se on kuin luotu simulaation ohjelmointiin. Tehdään taulukko kokoa $1,\ldots,N$ olevien hiukkasten lukumäärille ja kirjataan siihen alkutilanne. Sitten yllä olevalla kaavalla voidaan luoda uusi taulukko seuraavan ajanhetken tilasta, ja niin edelleen. Esimerkki tästä löytyy kuvasta 1.

Harjoitustehtävä ohjelmointitaitoiselle. Tässä kohtaa voit pysähtyä tekemään oman simulaatiosi.

Kuvasta 1 näkyy hyvin, kuinka hiukkasten kokonaismäärä alkaa pienentyä. Niiden kokonaismassa kuitenkin säilyy koko ajan samana... tiettyyn rajaan asti. Ennen pitkää osa syntyvistä hiukkasista on suurempia kuin N, ja siinä kohtaa ne eivät enää tallennu taulukkoon. Kyseessä on siis simulaatiosta aiheutuva virhe.

Tämä ei kuitenkaan ole käytännössä ongelma. Fysiikan lait pitävät huolen siitä, että ilmakehässä ei pahemmin leijaile kahden tonnin painoisia hiukkasia. Painovoimasta aiheutuva luonnollinen poistuma pitäisi lisätä yhtälöön, mutta simulaatioon se tulee itsestään "kaupan päälle".

Lisää hiukkasia!

Kesäaamuna tuoksuaan sumuttavat puut sen sijaan puuttuvat vielä. Lisätään yhtälöön funktio $h(x)$, joka kertoo montako x-kokoista hiukkasta lisätään simulaatioon aikayksikköä kohden. Yhtälö on siis

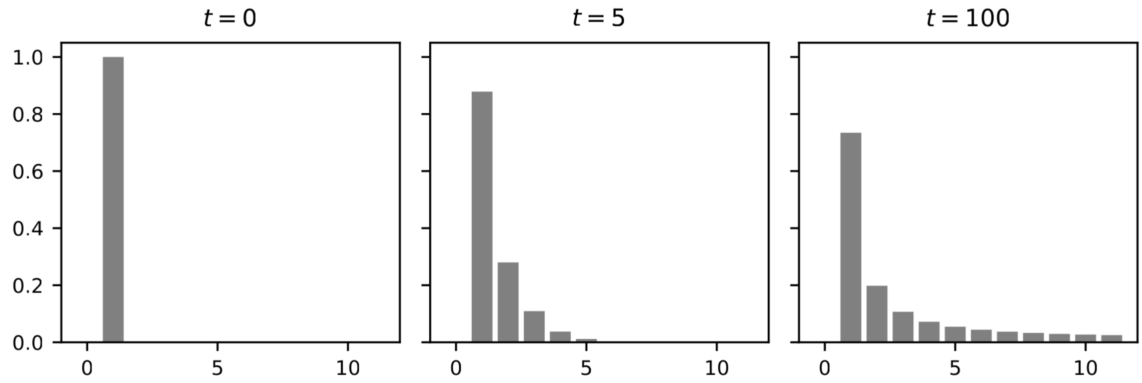
$$\begin{aligned} f(x,t+1) =& f(x,t) + \sum_{z=1}^{x-1} Kf(z,t)f(x-z,t) \\ &- 2f(x,t)\sum_{w=1}^{\infty} Kf(w,t) + h(x). \end{aligned}$$

Kuvassa 2 on muokattu kuvan 1 simulaatiota niin, että 1-kokoisia hiukkasia syntyy koko ajan hieman lisää.

Harjoitustehtävä. Lisää simulaatioosi lähdetermi. Osapuilleen kuinka monen aika-askelen jälkeen simulaatio on lähellä tasapainoa?

Jatkuvaa toimintaa

On vielä yksi pieni hienosäätö, joka kannattaa tehdä. Todellisuudessa molekyylit eivät vahtaa kelloa ja sulaudu täsmälleen viisarin värähtäessä. Prosessi on jatkuva, mikä tarkoittaa derivaatoista puhumista. Päättelyketju



Kuva 2: Edelliseen simulaatioon on lisätty lähdetermi $h(1) = 0{,}2$ ja $h(x) = 0$ muulloin. Pitkän ajan kuluessa hiukkasten syntyminen ja yhdistyminen saavuttavat tasapainon, jossa kuvaaja ei enää muutu.

pysyy samana, mutta funktiolle f saadaan niin sanottu differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_t f(x,t) &= \sum_{z=1}^{x-1} K f(z,t) f(x-z,t) \\ &\quad - 2f(x,t) \sum_{w=1}^{\infty} K f(w,t) + h(x),\end{aligned}$$

jossa derivaatta otetaan muuttujan t suhteen.

Tällä on suuri vaikutus tuloksiin. Kuvan 1 kohdassa $t = 1$ kaikki hiukkaset ovat joko kokoa 1 tai 2, sillä yhdessä aikahypyssä ehtii tapahtua vain yksi sulautuminen. Derivaatan myötä ilmestyy muitakin kokoja: voi käydä vaikka niin, että tapahtuu kaksi $1 + 1 \to 2$ -sulautumista ajanhetkillä $t = 0{,}23$ ja $t = 0{,}59$, ja sitten saadaankin jo $2 + 2 \to 4$ -sulautuminen, kun $t = 0{,}92$.

Simulaation kirjoittajalle derivaattoihin siirtyminen tarkoittaa, että laskukaavaan tehdään pieni muutos:

$$f(x; t + 0{,}01) = f(x; t) + 0{,}01 \cdot \text{muutostermit}.$$

Tässä siis arvioidaan derivaattaa sekantin kulmakertoimella. Mitä pienemmällä luvulla 0,01 korvataan, sitä tarkempi simulaatio saadaan, mutta tarvitaan enemmän laskukierroksia yhtä aikayksikköä kohti.

Laskutapaa kutsutaan *Eulerin menetelmäksi*, ja se on helpoin numeerinen tapa ratkoa differentiaaliyhtälöitä. Joissakin tapauksissa se on kuitenkin epätarkka, koska derivaatan arvioinnista syntyvät virheet alkavat kertyä ja kasvaa korkoa. (Liian pienillä luvuilla tietokoneen tarkkuus ei kuitenkaan riitä laskuihin, joten tässä täytyy löytää hyvä tasapaino.)

Hieman (epä)realismia peliin

Näiden parannusten myötä kasassa on simulaatio, joka… on edelleen hyvin kaukana todellisuudesta. Klimppiytymistahdin kuvaaminen luvulla K nimittäin on tässä yhteydessä liian suuri helpotus. Se väittää, että pienet molekyylit kokevat törmäyksiä ihan yhtä usein kuin suuret. Oikeasti koolla on kuitenkin väliä.

Pikkaisen parempi idea olisi ottaa esimerkiksi

$$K(x,y) = x + y \text{ tai } K(x,y) = xy.$$

Tällöin klimppejä muodostuu sitä herkemmin, mitä isompia osapuolet x ja y ovat.

Tällä on valtava vaikutus tasapainotilaan (Kuva 3). Etenkin xy-funktio tarkoittaa, että $2 + 2 \to 4$ -yhdistymisiä tapahtuu neljä kertaa niin usein kuin $1 + 1 \to 2$ -yhdistymisiä. Jos neljällä ykköskoon hiukkasella menee sekunti yhdistyä kahdeksi kakkoskoon hiukkaseksi, niin nämä kaksi yhdistyvät edelleen puolessa sekunnissa. Jokainen askel tapahtuu edeltävää nopeammin, ja käy kuin ydinräjähdyksessä.

Simulaatiossa oli vikana, että isot hiukkaset katoavat simulaation ulkopuolelle. Mutta xy-funktion kohdalla niin tapahtuu ilmankin simulaatiota. Lyhyellä mutta teknisellä laskulla nähdään, että jonkin ajan kuluttua massaa alkaa kadota osaksi yhtä "äärettömän suurta" hiukkasta.

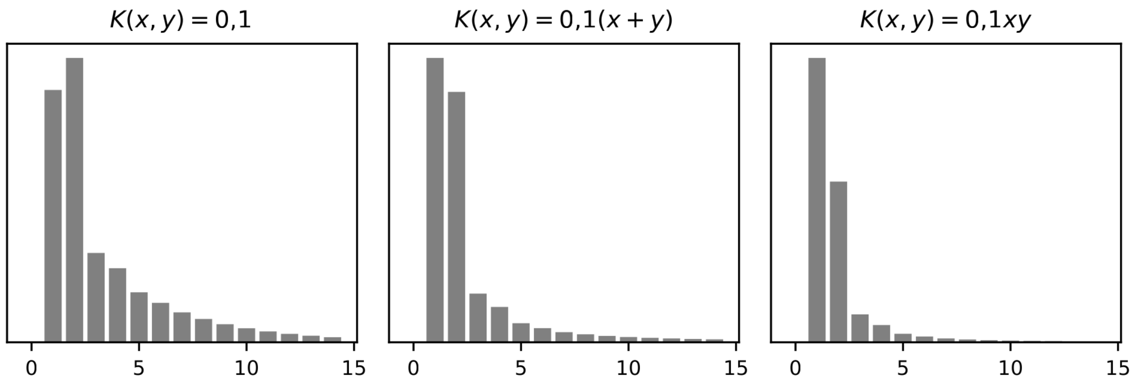
Fysiikan kannalta tämä on tietenkin järjetöntä. Matemaattinen malli sanoo, että vaikkapa 0,0004328 hiukkasta painaa tonnin. Näin äärimmäisessä mallissa sillä alkaa olla väliä, että oikeasti hiukkasten lukumäärä on kokonaisluku.

Mitä siis opitaan? Malli $K = 1$ on toimiva mutta epärealistinen. Malli $K = xy$ hajottaa jopa matemaattisen teorian. Totuuden täytyy olla jossakin näiden välissä.

Ilmakehän fysiikan kannalta realistinen malli on esimerkiksi

$$K(x,y) = (x^{-1/3} + y^{-1/3})(x^{1/3} + y^{1/3}).$$

Tämän valinnan perustelua ei ole ihan niin yksinkertaista selittää, mutta ideana on ajatella molekyyleja



Kuva 3: Näissä tasapainotiloissa lähdetermi on $h(x) = 0{,}2$ kun $x = 1$ tai 2 ja muulloin $h(x) = 0$. Funktio K vaikuttaa siihen, kuinka jyrkästi hiukkasmäärä laskee koon funktiona. Vasemmassa kuvassa pääosa massasta on pienissä hiukkasissa. Oikeanpuoleisessa taas massaa on hyvin raskaissa hiukkasissa, joita on vähemmän. Kuvien y-akselit ovat eri asteikoilla, jotta muotojen ero näkyisi selvemmin.

– nyt konkreettisesti – palloina, jotka liikkuvat satunnaisiin suuntiin. Kaava perustuu arvioon sille, kuinka usein eri kokoiset pallot törmäävät toisiinsa.

Harjoitustehtävä. Miten simulaatiosi tuottama tasapainotila muuttuu, kun valitaan $K(x, y) = (xy)^\alpha$ erilaisille luvuille α?

Kohti seuraavaa versiota

Tutkimamme yhtälö on nimetty puolalaisen fyysikko Marian Smoluchowskin (1872–1917) mukaan. Hän oli Einsteinin ja muiden ohella rakentamassa modernin fysiikan perusteoriaa.

Hieno juttu yhtälössä on, että se ei ole mitenkään sidottu ilmakehässä tapahtuviin juttuihin. Funktiota K vaihtamalla voidaan mallintaa monenlaisia ilmiöitä: yhtenä esimerkkinä vaikkapa kalaparvia.

Mitä yhtälöön pitäisi lisätä seuraavaksi?

Simulaatioon tuli kaupan päälle isojen hiukkasten poistuminen pelistä. Oikeasti ilmakehätieteissä tätä mallinnetaan painovoimalla: kaikenkokoisia hiukkasia putoaa maahan, mutta isot hiukkaset putoavat nopeammin.

Toinen tärkeä lisäys on, että hiukkaset voivat sulautumisen lisäksi hajota. Halkeamiset voidaan lisätä yhtälöön samanlaisella päättelyllä kuin sulautumiset, ja se muuttaa tasapainotilaa merkittävästi.

Puiden hengitys noudattaa vuorokausirytmiä, joten lähdetermi saattaa vaihdella ajan mukaan. Miten nyt edes määritellään "tasapaino" ja miten yöllinen tauko vaikuttaa hiukkasten kokojakaumaan?

Entä jos molekyylit eivät olekaan palloja? Eräät tuttuni Bonnin yliopistossa Saksassa ovat tutkineet malleja, joissa molekyylit klimppiytyvät ketjuiksi. Nämä ketjut laskostuvat pikku hiljaa lähemmäs pallon muotoa. Törmäysten määrä riippuu molekyylin pinta-alasta, joten ketjut törmäilevät toisiinsa useammin kuin pallot.

Teimme alussa myös oletuksen, että kaikki pallot koostuvat vain yhdestä aineesta. Oikeasti toki niin ei ole. Mitä jos eri aineita vapautuu ilmakehään eri suhteissa? Kuinka suuri osa klimpeistä poikkeaa koostumukseltaan keskimääräisestä? Tähän kysymykseen saatiin matemaattinen vastaus vasta muutama vuosi sitten, ja projektissa oli mukana myös helsinkiläisiä tutkijoita.

Saattaa kuulostaa oudolta, että näinkin yksinkertaiset kysymykset ovat yhä aktiivisen tutkimuksen kohteena. Syitä on kaksi: Smoluchowskin yhtälö on aika kapea-alainen, joten melko harva matemaatikko työskentelee sen parissa. Toisekseen on helppoa kirjoittaa koodinpätkä, joka simuloi yhtä erityistapausta. Fyysikoille se usein riittääkin.

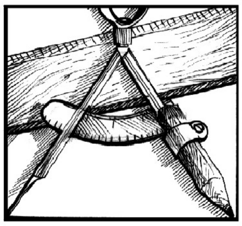
Mutta miten *todistaa* jotain, joka pätee *koko joukolle* K-funktioita? Millä oletuksilla funktion valintaa pitää rajoittaa, jotta saadaan järkeviä tuloksia? Matikka antaa rajat sille, miten pitkälle fysikaalista teoriaa voi turvallisesti venyttää.

Yksinkertaistetut simulaatiot auttavat ymmärtämään, miten monimutkaiset systeemit toimivat. Sen jälkeen matemaatikot voidaan päästää irti.

Kirjoittaja kiittää Aleksis Vuoksenmaata kommenteista mutta pitää kunnian mahdollisista virheistä itsellään.

Viitteet

[1] Mai Allo (2021). *Uusiin sfääreihin.* Gaudeamus. Laajennettu versio kirjasta *Yhdessä ilmakehässä* (Suomalaisen kirjallisuuden seura, 2016).



Matematiikkadiplomit vuonna 2024

Marjatta Näätänen

Vuonna 2024 diplomeihin tuli suunnilleen sama määrä vastauspyyntöjä kuin vuonna 2023, 379 vastauspyyntöä 99 paikkakunnalta, jotka olivat:

Akaa, Asikkala, Bryssel (Belgia), Espoo, Forssa, Haapajärvi, Haapavesi, Halsua, Hamina, Heinola, Helsinki, Hollola, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Ilmajoki, Inkoo, Janakkala, Joensuu, Jokioinen, Joutsa, Jyväskylä, Jämsä, Järvenpää, Kaarina, Kajaani, Kangasala, Kauhajoki, Kauniainen, Kaustinen, Kempele, Kerava, Kirkkonummi, Kittilä, Kokkola, KoskiTI, Kouvola, Kuopio, Lahti, Lapinlahti, Lappajärvi, Lappeenranta, Lapua, Laukaa, Lempäälä, Lieto, Liminka, Liperi, Lohja, Loimaa, Lumijoki, Malaga (Espanja), Mikkeli, Muonio, Mustasaari, Muurame, Mäntsälä, Mänttä-Vilppula, Naantali, Nakkila, Nivala, Nokia, Nurmijärvi, Orimattila, Oulu, Pieksämäki, Pirkkala, Pornainen, Porvoo, Pudasjärvi, Pälkäne, Raahe, Raisio, Rauma, Riihimäki, Rovaniemi, Ruokolahti, Sastamala, Savitaipale, Savonlinna, Siikajoki, Siilinjärvi, Sodankylä, Somero, Sotkamo, Tampere, Toholampi, Turku, Tuusula, Tyrnävä, Ulvila, Upplands Väsby (Ruotsi), Vaasa, Valkeakoski, Vantaa, Varkaus, Vihti, Ylivieska, Ylöjärvi.

Laaja-alaisiin tehtäväpaketteihin tuli kolme vastauspyyntöä näiltä paikkakunnilta: Janakkala, Oulu, Turku.

Sitä, miten moni oppilas tekee diplomitehtäviä, nämä luvut eivät kerro. Koululla voi olla entuudestaan jollain opettajalla ratkaisuja, eikä uusia tarvitse pyytää, tai samalta koululta voivat useammat opettajat pyytää ratkaisuja. Opettajat myös käyttävät diplomeja eri tavoin: Tehtäviä voi käyttää koko luokalla, kerhossa, kotitehtävinä, joidenkin oppilaiden ylöspäin eriyttämiseen tai aikaisemman kertaamiseen.

Runsaan kuvituksen, pienen sanaston ja Solmusta löytyvän englantia käyttävän sanakirjan avulla diplomeista voi olla kotimaassa apua niille, joiden on tarpeen oppia ja harjoittaa suomea.

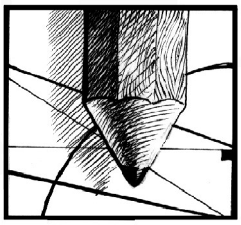
Vastauspyynnöistä näkyy, että tieto diplomeista on levinnyt suomalaisiin kouluihin ulkomailla:

- Eurooppalainen koulu Brussels II (Woluwe), opetusta yhdeksällä kielellä, joista yksi on suomi (Belgia)

- Aurinkorannikon suomalainen koulu (Espanja)

- Sverigefinska skolan i Upplands Väsby (Ruotsi)

Palautetta olen tänä vuonna saanut tuttavilta. 7-vuotias poika innostui tehtävät ratkaistuaan riemuun asti ja pari vuotta vanhempi veli, joka on suhtautunut läksyihin varsin torjuvasti, on vastahakoisesti myöntänyt alkaneensa tuntea jopa kiinnostusta matematiikan tehtävien tarjoamaan älylliseen ponnisteluun.



Hypo- ja episykloidit

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Johdanto

Tämä kirjoitus on jatkoa aikaisemmin Solmu-lehdessä ilmestyneeseen kirjoitukseeni [1] sykloidista. Siinä esitettyjä asioita ei juurikaan tarvita tässä, mutta tietysti helpomman tapauksen käsittely taustoittaa ja motivoi hankalampia tutkimuksia.

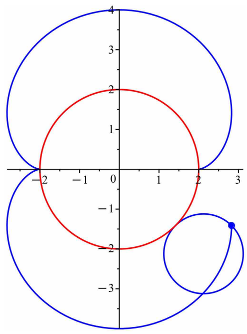
SAT eli Scholastic Aptitude Test on eräs tunnetuimmista tasokokeista, koska sitä käytetään laajasti college-valintakokeena Yhdysvalloissa. Vuoden 1982 matematiikan kokeessa oli tehtävä, joka lyhennettynä kuuluu näin:

Tehtävä 1. Kuinka monta kierrosta 1-säteinen kolikko tekee, kun sitä vieritetään yhden kerran 3-säteisen kolikon ympäri?

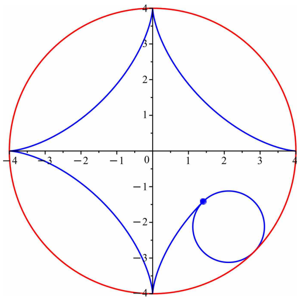
Vastausvaihtoehdot olivat 3/2, 3, 6, 9/2 ja 9. Lukija voinee pysähtyä hetkeksi miettimään, mikä vastauksista on oikea, tai kokeilemaan asiaa sopivankokoisilla ympärälevyillä; valitettavasti euro-kolikoista ei saada vastaavaa säteiden suhdetta 3 : 1. Tähän kysymykseen palataan kirjoituksen lopussa.

Sykloidit

Tavallisessa sykloidissa ympyrä vierii suoraa pitkin ja sen kehällä oleva piste piirtää sykloidin. Hyposykloidissa ympyrä vierii suuremman ympyrän sisäpuolta pitkin ja episykloidissa ulkopuolta pitkin kuten kuvissa. Molempia (tai ainakin kulmat pyöristäviä approksimaatioita) voi piirtää myös käsin paperille Spirograph-nimisellä laitteella.



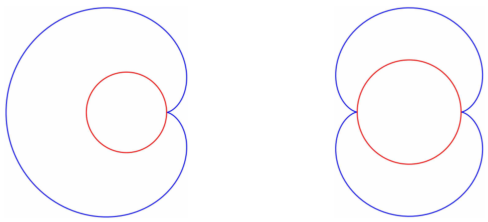
Keskeneräinen neproidi



Keskeneräinen astroidi

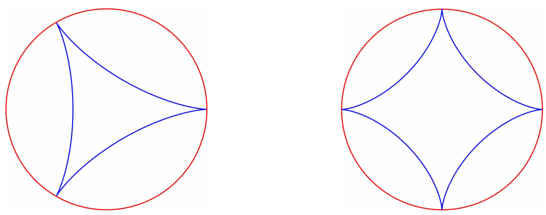
Animaatioihin voi tutustua Wikipedian sivuilla [2] ja [3].

Yksinkertaisimmat episykloidit ovat nimeltään kardioidi ja neproidi (munuaiskäyrä), joissa säteiden suhteet (alla R/r) ovat $1:1$ ja $2:1$. Kardioidi on erityisen mielenkiintoinen sen vuoksi, että se esiintyy ns. Mandelbrotin joukon keskiosassa, katso esimerkiksi [4].

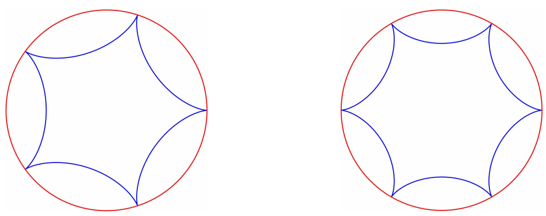


kardioidi ja neproidi

Vastaavasti hyposykloideja ovat deltoidi, astroidi, pentoidi ja eksoidi[1], joissa säteiden suhde kasvaa arvosta 3 arvoon 6. Suhteen arvolla $1:1$ pyöriminen ei onnistu sisäpuolella ja $2:1$ on hyposykloidin (mielenkiintoinen) erikoistapaus, joka surkastuu pelkäksi janaksi (Cardanon ympyrä).



deltoidi ja asteroidi

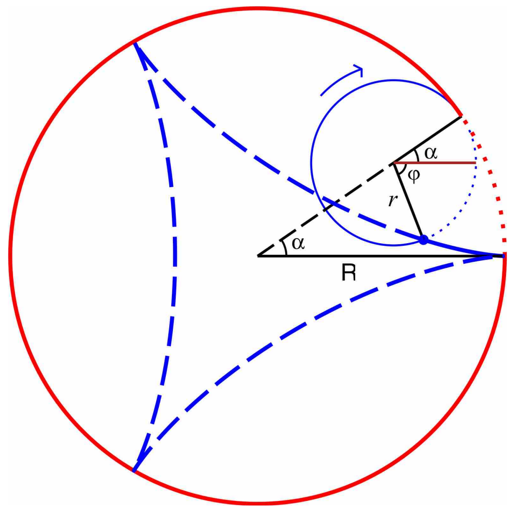


pentoidi ja eksoidi

Hyposykloidin kaavat

Seuraavassa käsitellään tarkemmin vain hyposykloideja; episykloidit ovat matemaattisesti hyvin samanlaisia.

Tarkastellaan siis tilannetta, jossa R-säteisen origokeskisen ympyrän sisällä on pienempi r-säteinen ympyrä. Alkutilanteessa ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(R, 0)$ ja pieni ympyrä alkaa vieriä suuremman kehää pitkin niin, että sivuamispiste liikkuu vastapäivään. Hyposykloidin piirtää se pienen ympyrän piste, joka oli aluksi pisteessä $(R, 0)$.



Hyposykloidin konstruktio.

Kuvassa hyposykloidin piirtävä piste on merkitty sinisellä. Punaisen ja sinisen pisteviivan pituudet ovat vierimisehdon perusteella yhtäsuuret ja sininen katkoviiva esittää sitä hyposykloidin osaa, joka on vielä piirtämättä.

Valitaan muuttujaksi kuvaan merkityn ison ympyrän sektorin keskuskulma α, jota rajoittavat alkutilaan ja uuteen sivuamispisteeseen piirretyt säteet. Pienen ympyrän keskipiste on silloin kohdassa

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha \\ y = (R-r)\sin\alpha. \end{cases}$$

Kulma α ei ole kuitenkaan sama kuin pienen ympyrän kiertymiskulma keskipisteensä suhteen[2], vaan oikea kiertokulma on kuvioon merkitty φ. Vierimisehdon perusteella pisteviivoitetut ympyrän kaaret ovat yhtä pitkät, joten

$$\alpha R = (\varphi + \alpha) r.$$

Näin ollen pienen ympyrän kiertokulma sen keskipisteen ympäri on

$$\varphi = \frac{R-r}{r}\alpha. \tag{1}$$

Koska pieni ympyrä kiertyy myötäpäivään, saadaan sinisen pisteen koordinaateiksi (pienen ympyrän keskipisteen suhteen)

$$\begin{cases} x = r\cos(-\varphi) = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(-\varphi) = -r\sin(\varphi). \end{cases}$$

Yhdistämällä keskipisteen liike ja pyöriminen toisiinsa (eli laskemalla koordinaatit yhteen) sekä käyttämällä kulmien välistä yhteyttä (1) saadaan sinisen pisteen paikka origon suhteen:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right) \\ y = (R-r)\sin\alpha - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right). \end{cases}$$

[1] Kaksi viimeistä ovat kirjoittajan omia käännöksiä. Englannin 'exoid' voisi olla myös heksoidi.

[2] Kulma α on pienen ympyrän kiertokulma, jos kyseessä olisi liukuminen eikä vieriminen.

Kun valitaan $r = 1$ ja merkitään $R = n$, saadaan hieman tavallisemmat ja mukavamman näköiset kaavat

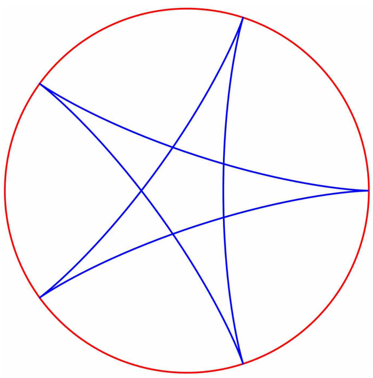
$$\begin{cases} x = (n-1)\cos\alpha + \cos((n-1)\alpha) \\ y = (n-1)\sin\alpha - \sin((n-1)\alpha). \end{cases} \tag{2}$$

Tämä on hyposykloidin parametriesitys, jota käyttämällä kaikki tämän kirjoituksen hyposykloidikuvat on piirretty (Maple-ohjelman avulla).

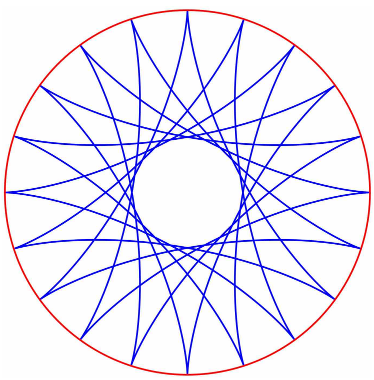
Muut parametrit ja jaksollisuus

Ympyröiden säteiden suhteen merkintä $n = R/r > 0$ viittaa kokonaislukuun, joka onkin tilanne kaikissa aikaisemmissa kuvissa. Tällöin sininen piste palaa yhden kierroksen $0 \le \alpha \le 2\pi$ jälkeen alkukohtaansa $(n, 0)$ ja sen liike on jaksollista. Näissä hyposykloideissa on täsmälleen n kappletta teräviä kulmia, joissa sininen piste koskettaa isoa ympyrää. Toisaalta ainoa välttämätön vaatimus on se, että suhde $n > 1$ on reaaliluku. Tällöin tulee vastaan kaksi erilaista tapausta, joiden tutkiminen jätetään harjoitustehtäviksi.

Tehtävä 2. Oletetaan, että $n = p/q > 1$ on supistetussa muodossa oleva rationaaliluku, muttei kokonaisluku. Osoita, että vastaava hyposykloidi on jaksollinen ja selvitä sen kärkien lukumäärän ja jakson pituuden (kulman α suhteen) riippuvuus luvuista p ja q.

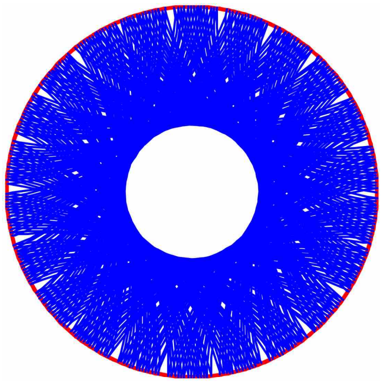


Hyposykloidi tapauksessa $n = 5/3$.



Hyposykloidi tapauksessa $n = 20/7$.

Tehtävä 3. a) Oletetaan, että $n > 1$ on irrationaaliluku. Osoita, ettei vastaava hyposykloidi ole jaksollinen. b) (Vaikea tai mahdoton pelkillä lukiotiedoilla?) Osoita, että a-kohdan tapauksessa vastaava hyposykloidi täyttää n- ja $(n-1)$-säteisten ymyröiden välisen rengasalueen seuraavassa mielessä: Jos valitaan mikä tahansa rengasalueen piste P ja luku $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen hyposykloidin piste H, jonka etäisyys pisteestä P on pienempi kuin ε. (Huomaa: Tämä ei tarkoita sitä, että hyposykloidi kulkee jokaisen rengasalueen pisteen kautta.)



Sata hyposykloidin kierrosta parametrin arvolla $n = \pi$.

Käytännön sovellus

Total Recall -elokuvan uudelleenfilmatisoinnissa (v. 2012) matkustetaan Maan läpi kaivettua tunnelia pitkin pelkästään painovoiman avulla [5]. Jos reitin päätepisteet ovat Maan vastakkaisilla puolilla (antipodipisteet), niin nopein tunneli kulkee suoraan Maan keskipisteen kautta. Muissa tapauksissa nopein tunneli on sopivan hyposykloidin kaari Maan keskipisteen kautta kulkevassa tasossa. Hyposykloidi ratkaisee siis pallolla saman minimointiongelman kuin tavallinen sykloidi homogeenisessa painovoimakentässä (katso viitteen [1] loppuosa).

Viitteessä [6] on joitakin asiaan liittyviä selityksiä, mutta perustelut menevät kauas lukiomatematiikan ulkopuolelle.

Episykloidin kaavat

Mainitaan vielä, että episykloidin kaavat eroavat hyposykloidin kaavoista (2) vain muutamilla etumerkkien vaihdoilla:

$$\begin{cases} x = (n+1)\cos\alpha - \cos((n+1)\alpha) \\ y = (n+1)\sin\alpha - \sin((n+1)\alpha). \end{cases} \tag{3}$$

Tästä päästäänkin lopuksi SAT-tehtävään, vaikkei sen ratkaisussa mitään kaavoja tarvitakaan.

Tehtävän 1 vastaus

Alussa mainittu SAT-tehtävä tuli kuuluisaksi siitä, että mikään annetuista vaihtoehdoista ei ole oikea. Osa kokeeseen osallistujista huomasi tämän, muttei pystynyt vastaamaan puuttuvaa oikeaa vaihtoehtoa, joka on 4. Yleisin vastaus oli 3, johon päätyy ajattelemalla ympyrän kaarenpituuden kaavaa $p = 2\pi\cdot$ säde; ts. kaarenpituus on suoraan verrannollinen säteeseen. Tehtävää ei voi kuitenkaan ratkaista pelkkiä kaarenpituuksia vertaamalla, koska vierimisalusta ei ole suoraviivainen: isompi ympyrä "kaareutuu alta pois" ja sen vuoksi vierimiseen tarvitaan yksi pienen ympyrän kierros enemmän! Asialle voi (ainakin jälkikäteen...) keksiä useita intuitiivisia selityksiä ja helpoin kokeilu on kahdella samankokoisella kolikolla eli kardioidin tapauksessa[3]: vierimiseen tarvitaan kaksi kierrosta yhden sijaan. Yllä mainituissa episykloidin kaavoissa kertoimen $n + 1$ osa $+1$ liittyy juuri tähän ilmiöön. Vastaavasti hyposykloidin pyörimiseen tarvitaan yksi kierros vähemmän vastaan kaareutuvan alustan vuoksi. Tämäkin näkyy kaavojen kertoimissa $n - 1$.

Aiheesta lisää viitteessä [7] ja erinomaisella YouTube-videolla [8]. Sen loppupuolella selitetään myös, miten tämä tehtävä liittyy tähti- ja aurinkovuorokausien pituuksiin [9].

Viitteet

[1] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/2/sykloidi.pdf

[2] https://fi.wikipedia.org/wiki/Episykloidi

[3] https://fi.wikipedia.org/wiki/Hyposykloidi

[4] https://fi.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotin_joukko

[5] https://fi.wikipedia.org/wiki/Total_Recall_(vuoden_2012_elokuva)

[6] https://mathworld.wolfram.com/SpherewithTunnel.html

[7] https://www.scientificamerican.com/article/the-sat-problem-that-everybody-got-wrong/

[8] https://www.youtube.com/watch?v=FUHkTs-Ipfg

[9] https://fi.wikipedia.org/wiki/Vuorokausi

Korjaus: Edelliseen sykloidia käsitelleeseen kirjoitukseeni [1] oli jäänyt ikävä painovirhe. Toisen sivun oikean palstan ylhäällä olevassa kaavassa

$$\begin{cases} x = R\cos(-(vt/R - \pi/2)) = -R\sin(vt/R) \\ y = R\sin(-(vt/R - \pi/2)) = -R\cos(vt/R) \end{cases}$$

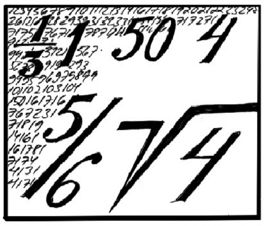
ei pidä olla sulkuja sinin ja kosinin sisällä, vaan oikeat lausekkeet ovat

$$\begin{cases} x = R\cos(-vt/R - \pi/2) = -R\sin(vt/R) \\ y = R\sin(-vt/R - \pi/2) = -R\cos(vt/R). \end{cases}$$

Alkuperäisen mukaan hetkellä $t = 0$ kulman arvoksi saadaan $-(-\pi/2) = \pi/2$, joka vastaa ympyrän ylintä kohtaa, vaikka tarkoitus on lähteä liikkeelle alhaalta.

Kiitokset korjauksesta eräälle Aalto-yliopiston opiskelijalle, joka huomautti asiasta luentoesimerkin yhteydessä.

[3] Pahvista leikattujen ympyrälevyjen välillä on kolikoita suurempi kitka ja koe on helpompi toteuttaa.



Transkendenttimitalle helppo arvio

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Helsingin yliopisto

Lukua kutsutaan algebralliseksi, jos se on jonkun kokonaislukukertoimisen polynomin juuri. Esimerkiksi siis $\sqrt{2}$ on irrationaalinen, mutta algebrallinen, sillä se toteuttaa yhtälön $x^2-2=0$. Lukua kutsutaan transkendenttiseksi, jos se ei ole minkään kokonaislukukertoimisen polynomin juuri. Esimerkiksi e ja π ovat transkendenttisia. Yleisesti ottaen luvun osoittaminen transkendenttiseksi on haastavaa. Tähän on joitakin poikkeuksia: Liuoville luku ℓ on suoraviivainen osoittaa transkendenttiseksi. Menetelmää voi varioida myös muiden samankaltaisten lukujen käsittelemiseen. Tätä on käsitelty aiemmin esimerkiksi Solmussa [1]. Aiheesta löytyy myös monista muista lähteistä.

Kuitenkin jos jonkun luvun ξ tiedetään olevan transkendenttinen, niin tiedetään varmasti, että jos λ_0, λ_1, $\ldots, \lambda_n$ ovat kokonaislukuja, joista kaikki eivät ole nollia, niin

$$\left|\lambda_n\xi^n+\lambda_{n-1}\xi^{n-1}+\cdots+\lambda_1\xi+\lambda_0\right|\neq 0.$$

Hyvä kysymys onkin: miten lähelle nollaa voidaan päästä? Tämän kysymyksen avulla saadaan transkendenttimitta. Kirjoitetaan aluksi:

$$\left|\lambda_n\xi^n+\lambda_{n-1}\xi^{n-1}+\cdots+\lambda_1\xi+\lambda_0\right|>\frac{1}{H^r},$$

missä $H\geq\max\{|\lambda_i|:1\leq i\leq n\}$. Huomaa, että luvun H määritelmästä on suljettu pois kerroin λ_0. Nyt kysymys on siis siitä, miten suuri tai pieni r voi olla.

Nopeasti juolahtaa mieleen, että luvun r koon on riiputtava ainakin luvusta n.

Mitä tahansa funktiota, joka on suurempi kuin luvun r infimum, kutsutaan luvun ξ transkendenttimitaksi. Tämä funktio riippuu parametreista n ja H.

Tämän tekstin tarkoitus ei ole antaa erityisen tarkkaa arviota transkendenttimitalle, vaan todistaa laatikkoperiaatteen avulla yksinkertainen arvio, joka kertoo sen, miten lähelle nollaa varmasti ainakin päästään.

Yläraja transkendenttimitalle

Tässä osiossa on tarkoitus osoittaa lausekkeelle tietty yläraja, eli ainakin osoittaa, miten lähelle nollaa voi helposti päästä.

Lause Kun H ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin on varmasti olemassa kokonaislukukertoimet $|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\leq H$ ja kokonaisluku λ_0, jolla

$$\left|\lambda_n\xi^n+\lambda_{n-1}\xi^{n-1}+\cdots+\lambda_1\xi+\lambda_0\right|<\frac{1}{H^n}.$$

Todistus Käytetään laatikkoperiaatetta. Tarkastellaan kaikkia polynomeja $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$, jotka toteuttavat ehdon $0\leq a_1,a_2,\ldots a_n\leq H$. Lasketaan näiden polynomien arvo pisteessä ξ ja asetetaan vakiotermi polynomiin niin, että arvo saadaan välille $(0,1)$. Näiden laskujen seurauksena on saatu $(1+H)^n>H^n+1$ eri arvoa, kaikki välillä $(0,1)$. Laatikkoperiaatteen nojalla joidenkin kahden arvon erotus toisistaan on korkeintaan $\frac{1}{H^n}$. Olkoon Q näiden kahden polynomin erotus. Tällöin

$$|Q(\xi)| < \frac{1}{H^n}$$

ja lisäksi Q toteuttaa lauseen ehdot.

Arvion hyvyyden arviointi

Yllä oleva arvio kertoo siis sen, että jos haluaa etsiä transkendenttimittoja, polynomin aste n on hyvä lähtökohta. Joissakin tapauksissa tämä on melko lähelläkin totuutta. Kun mietitään, miten hyvä arvio tämä on, ei voida antaa yleistä vastausta.

Tilanne on täysin erilainen, jos tarkastellaan esimerkiksi Liouvillen lukua, jolle on valtavan hyviä rationaaliapproksimaatioita, kuin jos tarkastellaan jotain kovin toisenlaista transkendenttilukua, kuten lukua e.

Luvulle e on todistettu valtavasti erilaisia transkendenttimittoja. Mielenkiintoista kyllä, niissä päätermiä on täsmälleen polynomin aste, eli tämä alkeellinen arvio antaa suuruusluokan, joka on yllättävän lähellä totuutta. Lisäksi Hata [3] on osoittanut, että $n\frac{\ln(H+1)}{\ln H}$ on alaraja transkendenttimitalle. Arvioidaan

$$n\frac{\ln(H+1)}{\ln H} = n + \frac{\ln(H+1) - \ln H}{\ln H} \approx n + \frac{1}{H \ln H}.$$

Toisaalta tämänhetkinen paras tulos [2] kertoo, että yläraja transkendenttimitan parhaalle mahdolliselle arvolle on $n + \frac{c_n n^2 \log n}{\ln\ln H}$, missä c_n on annettu vakio. Kovin lähellä lukua n ollaan nytkin.

Viitteet

[1] A.-M. Ernvall-Hytönen: Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia. Solmu 3 (2014). `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/irrationaalisuus_pohjassa.pdf`

[2] A.-M. Ernvall-Hytönen, T. Matala-aho ja L. Seppälä: On Mahler's transcendence measure for e. Constructive approximation, 19, Issue 1, 2018, 1–40.

[3] M. Hata: Remarks on Mahler's Transcendence Measure for e, Journal of Number Theory 54 (1995), 81–92.

Solmu 3/2024

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Julkaisija:
Suomen matemaattinen yhdistys ry
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

Päätoimittaja:
Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:
Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:
toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

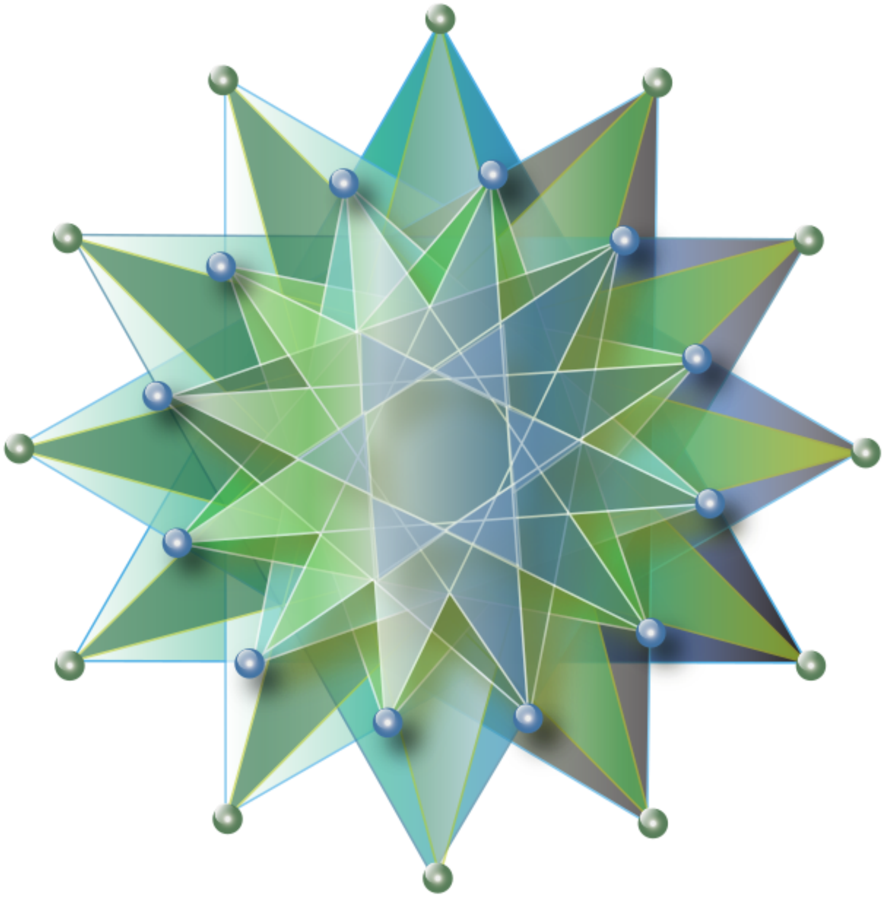
Verkkosivu:
matematiikkalehtisolmu.fi

Kansikuva:
Noora Isoeskeli

Painopaikka:
Painosalama Oy

Numeroon 1/2025 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.3.2025 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI