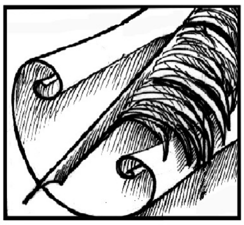

Selitykset ja järjestykset ratkaisuissa ja laskuissa

Pääkirjoitus

Some leimahtelee aina toisinaan erilaisista matematiikkaan liittyvistä aiheista. Toisinaan nämä pääsevät jopa isoihin sanomalehtiin. Somessa eräs yleinen aihe on laskujärjestykseen liittyvät kysymykset. Viittaan tällä siis erilaisiin kuvakaappauksiin, joissa on annettu joku lasku, ja lisäksi mahdollisesti kommentti siitä, miten moni ei osaa laskea laskua oikein. Laskujärjestyksen osaaminen on tärkeää. Se on eräs kommunikointitapa siitä, miten lauseke pitää tulkita, ja se on välttämätön sille, että lauseke on yksikäsitteinen ja että lauseke tulkitaan niin kuin haluamme sen tulkittavan. Ilman laskujärjestystä voisi esimerkiksi ajatella, että lauseke $5 - 3 \cdot 4$ pitää laskea vasemmalta oikealle, kuten Suomessa yleensä kirjojakin luetaan. Tällöin siis laskettaisiin ensin vähennyslasku, sitten kertolasku. Tämä ei kuitenkaan ole vakiintuneiden tapojen mukainen.

Keskustelut laskujärjestyksestä kuitenkin yleensä lähinnä häiritsevät minua. Silloin tuntuu siltä, että huomio on mennyt pois matematiikasta ja sen kauneudesta, ja tartutaan kiinni siihen, tulkitaanko lauseke samoin tai oikein. Mahdollisesti yritetään saada kiinni ne, jotka tekevät virheen. Vaikka laskujärjestyksen osaaminen on oleellista, ei tämä liity matemaattisen osaamisen syvyyteen tai päättelyketjujen loogisuuteen, vaan vain siihen, onko järjestys muistissa vai ei.

Alkeellisessa nelilaskimessa ei ole sisäänrakennettua laskujärjestystä, vaan laskijan on jotenkin mietittävä, mahdollisesti oman kirjanpidon avulla, miten lauseke syötetään ja miten sitä käytetään. Vastaavaa pohdintaa joutuu harrastamaan myös pinolaskinta käyttäessä. Pinolaskin on perinteikäs ohjelmoinnin harjoitustyö. Se ei tunne sulkuja, mutta se laskee yhteen-, kerto-, vähennys- ja jakolaskut käyttäjän haluamassa järjestyksessä, kunhan käyttäjä syöttää luvut ja operaatiot sopivaan pinoon, jota laskin vain voi lähteä purkamaan vasemmalta. Laskulauseke saattaa tällöin näyttää joskus melko epäintuitiiviselta, sillä käyttäjä joutuu miettimään nimenomaan sen, miten lauseke pitää kirjoittaa, jotta järjestys on oikea.

Viime aikojen ehkä eniten näkyvyyttä saanut kohu liittyi sekin järjestykseen. Kyse oli siitä, että lapsi oli kirjoittanut tulontekijät eri järjestykseen kuin oli ilmeisesti ajateltu, ja tästä oli vähennetty piste. Tehtävässä siis kysyttiin sitä, miten paljon rahaa jää jäljelle, jos alun perin on 140 euroa ja rahalla ostetaan 9 kappaletta 15 euron elokuvalippuja. Uutisoinnin perusteella odotettu vastaus oli $140 - 9 \cdot 15$, eikä $140 - 15 \cdot 9$.

Matemaattisesti nämä kaksi asiaa ovat aivan sama. Kuten monet kommentoijat ja monessa jutussa on todettu, on ihan sama asia, ostetaanko 9 kappaletta 15 euron elokuvalippuja vai 15 euron elokuvalippuja 9 kappaletta. Olen myös nähnyt ajatuksen siitä, että jälkimmäinen kirjoitusasu, siis $15 \cdot 9$ viittaisi siihen, että laskija kuvittelisi ostavansa 15 kappaletta 9 euron elokuvalippuja. Tämä tuntuisi minusta kovin kummalliselta ja kovin kaukaa haetulta tulkinnalta.

Näen itse tässä kaksi erilaista ulottuvuutta. Toinen on ratkaisujen selittämisen suuntaan, toinen joustavuuden suuntaan. Kumpikin näistä on merkittävä asia, mutta kumpikaan ei edisty sillä, että vaaditaan tarkkoja kirjoitusjärjestyksiä asioille, vaan kummallekin tuotetaan hallaa.

Matemaattisessa joustavuudessa on yksinkertaistetusti kyse siitä, että osataan erilaisia ratkaisustrategioita, ja valitaan tilanteeseen sopiva. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että yhtälön $3\left(x+\frac{3}{5}\right)+6\left(x+\frac{3}{5}\right)=12$ ratkaiseminen aloitettaisiin yhdistämällä vasemman puolen termit, jolloin saataisiin $9\left(x+\frac{3}{5}\right)=12$, jonka jälkeen yhtälön voisi jakaa puolittain luvulla 9, jonka jälkeen ratkaistavaksi tulisi $x+\frac{3}{5}=\frac{12}{9}$, josta saataisiin $x=\frac{12}{9}-\frac{3}{5}=\frac{11}{15}$. Tämä on näppärämpi ja vähemmän virheille altis strategia kuin ensin sulkujen avaaminen vasemmalta puolelta: $3x+\frac{9}{5}+6x+\frac{18}{5}=12$, tämän jälkeen vakiotermien oikealle siirtäminen ja vähennyslaskun tekeminen sekä x-termien yhdistäminen ja lopulta yhdeksällä jakaminen. Jälkimmäinen tapa on täysin pätevä tapa ratkaista yhtälö, mutta laskuvirheiden riski on suurempi ja työtä joutuu tekemään enemmän.

Mielekästä olisi se, että koululaiset oppisivat valitsemaan tilanteeseen sopivan ratkaisutavan. Tähän tuskin kannustaa se, jos joutuu tuijottamaan yksittäisten lukujen kertolaskun järjestystä ja miettimään, että se on oikea. Tällöin huomio menee vääriin asioihin. Lisäksi ennen kaikkea matematiikka alkaa vaikuttaa aihepiiriltä, jossa on vain yksi oikea ratkaisutapa, mikä on kovin kaukana sekä todellisuudesta että niistä tavoista, joilla matematiikkaa huomaamatta käyttää arjessa.

Olen hyvin iloisena lukenut yhdestä alakoulun matematiikan kirjasta yhteenlaskuun liittyviä tekstejä ja tehtäviä: niissä on ensin opetettu yksi menetelmä, sitten toinen, ja lopulta vielä laitettu koululainen itse pohtimaan, kummasta menetelmästä hän pitää enemmän. Tätä lisää, kiitos!

Erilaisten ratkaisujen tekeminen kannustaisi myös ratkaisujen selittämiseen. Selittäminen on tärkeää. Selitykset ratkaisuissa tekee ratkaisuista ymmärrettävämpiä ja kevyemmin luettavia. Selitykset ovat erityisen tärkeitä, jos lasku on hiukan pielessä. Kuitenkin jos oppilaita kannustetaan ratkaisemaan tehtävät tietyn sabluunan mukaan, termien järjestyksen huomioiden, ei tämä kannusta selitysten kirjoittamiseen, sillä tällaisessa tehtävässähän kuka tahansa ratkaisija saisi samanlaisen lausekkeen.

Liian suoraviivainen tehtävä ei välttämättä ole hyvä selitysten harjoitteluun, sillä vaikka toisaalta selityksiä eri laskuille on helppo keksiä, on motivaatio helposti kovin matala. Sopivasti vaikeahko tai sopivan avoin tai monella tavalla lähestyttävä tehtävä sen sijaan voisi olla hyvä harjoitteluun. Samalla tulisi mahdollisesti harjoiteltua myös ongelmanratkaisua tai sitä, että tehtävää voi lähestyä monella tavalla, tai joskus jopa joutuu hiukan testailemaan ennen kuin tietää, mitä tekee.

Vanhemman lapseni koulukirjassa oli yhtälöryhmä: neljä tuntematonta, neljä yhtälöä. Tästä on jo joitakin vuosia, mutta kyseessä oli muistaakseni ehkä 3. luokan oppikirja. Sen ikäisillä koululaisilla ei tietenkään ollut minkäänlaista muodollista koulutusta yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Kyseessä oli tehtävä, jossa oli x, y, z ja w korvattu erilaisilla palloilla, ja lisäksi yksi yhtälö sisälsi vain yhdenlaisia palloja, eli siitä ratkaisu oli helppo aloittaa. Saman sarjan kirjassa oli myös tehtäviä, joissa oli kerrottu kolmen kokonaisluvun pareittaiset tulot, ja piti selvittää kyseiset luvut. Yhtälönratkaisutaidoilla voi tietysti kirjoittaa kolmen yhtälön ryhmän ja ratkaista sen, mutta jälleen kyseessä oli pienten lasten koulukirja. Kyseessä oli siis mainio päättelytehtävä, jossa varmasti auttoi, jos muisti kertotaulut.

Yllä olevat tehtävät sopisivat mainiosti selittämisen harjoitteluun: sen sijaan, että vain kerrottaisiin, miksi luvut tai pallot ovat ne, mitä ne ovat, niin kerrottaisiin, miten tähän on päädytty, tai miksi on varmaa, että oma vastaus toimii. Tässä selitys toisi aitoa lisäinformaatiota. Lisäksi tulisi harjoiteltua matematiikan täsmällisyyttä: miten vakuutan myös toisen ihmisen siitä, että oma ratkaisuni on oikein?

Kuulisin itse todella mielelläni, miten monella tavalla esimerkiksi tehtävää

$$\begin{cases} w+w+w+z=9 \\ x+y+z=10 \\ x+y+y=8 \\ x+x+x+x=8 \end{cases}$$

tai tehtävää

$$\begin{cases} xy=35 \\ xz=20 \\ zy=28 \end{cases}$$

lähestyttäisiin. (Nämä ovat omia mukaelmiani koulukirjojen tehtävistä, esitystapani on kovin paljon tylsempi kuin mitä kirjoissa on, sillä en esimerkiksi piirrä raidallista palloa tai lukuja sisältävää taloa kovin nopeasti Latexilla.)

Tyypillinen tilanne, jossa kaipaisi selityksiä, on se, kun lukee jonkun toisen ratkaisua, ja siinä on jokin virhe, erityisesti, jos virhe on sellainen, että se voi olla vain pieni huolimattomuusvirhe, tai se voi olla merkki pahemmasta ymmärrysongelmasta. Joskus myös pienet virheet voivat tehdä ratkaisut aivan käsittämättömiksi, mutta selitysten ja laskujen yhdistelmä tekeekin niistä luettavia.

Selitysten etu ei kuitenkaan ole vain se, että vakuuttaa jonkun toisen ihmisen. Selitykset auttavat itseä silloin, jos omiin vanhoihin laskuihin pitää palata. Jostain syystä ne alun perin triviaalit yksityiskohdat ja kaiken läpäisevä selkeä logiikka eivät ole ihan niin triviaaleja ja selkeitä vähän myöhemmin. Niistä on myös hyötyä esimerkiksi laskuvirheiden etsimisessä. Pienissä osissa huolellisesti dokumentoitua laskua on helpompi seurata kuin valtavaa lauseketta tai hillitöntä kaavaviidakkoa vailla yhtään sanaa. Lisäksi selityksissä joutuu formalisoimaan hyvin selväsanaisesti myös itselle sen, mitä on tekemässä ja miksi, ja joskus tämäkin auttaa ajatusvirheiden bongaamisessa. Selityksistä hyötyvät kaikki. Niiden harjoitteleminen olisi hyvästä.

Palaan vielä elokuvalipputehtävään. Jos siinä ei olisi pyydettykään lauseketta, vaan tehtävä olisi pyydetty ratkaisemaan keinolla millä hyvänsä, ja selittämään oma ratkaisu lyhyesti opettajalle, naapurille tai vaikka vihkoon, niin olisi luultavasti nähty erilaisia ratkaisuja, eikä olisi tarvinnut pohtia sitä, ymmärtääkö koululainen, että $15 \cdot 9$ tarkoittaa 15 euron elokuvalippuja 9 kappaletta eikä 9 euron elokuvalippuja 15 kappaletta.

Oman mielenkiintoisen lisänsä koko vyyhteen tietenkin tuovat erilaiset laskusäännöt, joilla elämää voi helpottaa: Jos pitää laskea 16 % luvusta 25, on se sama kuin 25 % luvusta 16. Verkosta näitäkin löytyy. Käytännön laskutoimitusten kannalta nämä ovat erittäin hyödyllisiä. Näiden avulla voi laskea päässä monenlaisia asioita, joiden laskeminen päässä voisi muuten olla vähintäänkin työlästä. Toisaalta taas, jos perustelematta joku kirjoittaisi $0{,}25 \cdot 16$, kun tehtävänä olisi laskea 16 % luvusta 25, niin edes minun vapaamieliset tulkintani eivät venyisi tähän asti. Sen sijaan, jos olisi kirjoitettu $0{,}16 \cdot 25 = \frac{16 \cdot 25}{100} = \frac{1}{4} \cdot 16$, niin olisin hyvin onnellinen. Tämä ratkaisu onkin taas jo sellainen, mikä sisältää selityksen, vaikkakaan ei sanallista, mutta lukijalle on selvää, mitä tapahtuu.

Tämän periaatteen pitäisikin olla ensisijainen: pidetään lukija kartalla, on se sitten tekstillä, lausekkeilla tai niiden yhdistelmällä. Harvoin riittää vain teksti tai vain lausekkeet, mutta tietysti niitäkin tilanteita on.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen