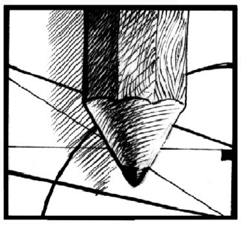


Hypo- ja episykloidit

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Johdanto

Tämä kirjoitus on jatkoa aikaisemmin Solmu-lehdessä ilmestyneeseen kirjoitukseeni [1] sykloidista. Siinä esitettyjä asioita ei juurikaan tarvita tässä, mutta tietysti helpomman tapauksen käsittely taustoittaa ja motivoi hankalampia tutkimuksia.

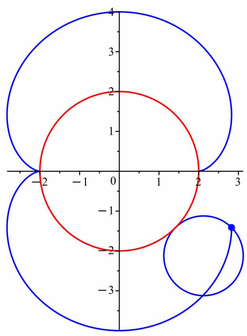
SAT eli Scholastic Aptitude Test on eräs tunnetuimmista tasokokeista, koska sitä käytetään laajasti college-valintakokeena Yhdysvalloissa. Vuoden 1982 matematiikan kokeessa oli tehtävä, joka lyhennettynä kuuluu näin:

Tehtävä 1. Kuinka monta kierrosta 1-säteinen kolikko tekee, kun sitä vieritetään yhden kerran 3-säteisen kolikon ympäri?

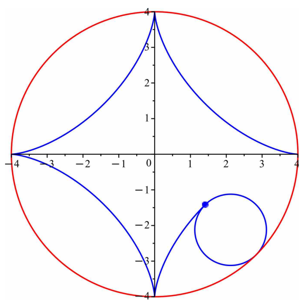
Vastausvaihtoehdot olivat 3/2, 3, 6, 9/2 ja 9. Lukija voinee pysähtyä hetkeksi miettimään, mikä vastauksista on oikea, tai kokeilemaan asiaa sopivankokoisilla ympärälevyillä; valitettavasti euro-kolikoista ei saada vastaavaa säteiden suhdetta 3 : 1. Tähän kysymykseen palataan kirjoituksen lopussa.

Sykloidit

Tavallisessa sykloidissa ympyrä vierii suoraa pitkin ja sen kehällä oleva piste piirtää sykloidin. Hyposykloidissa ympyrä vierii suuremman ympyrän sisäpuolta pitkin ja episykloidissa ulkopuolta pitkin kuten kuvissa. Molempia (tai ainakin kulmat pyöristäviä approksimaatioita) voi piirtää myös käsin paperille Spirograph-nimisellä laitteella.



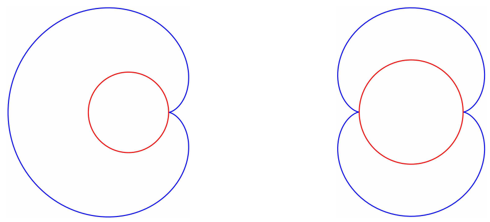
Keskeneräinen neproidi



Keskeneräinen astroidi

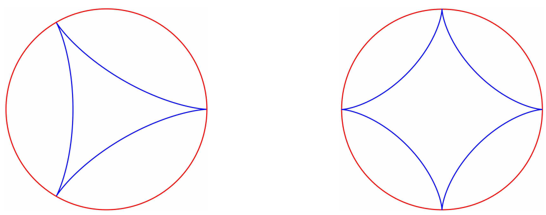
Animaatioihin voi tutustua Wikipedian sivuilla [2] ja [3].

Yksinkertaisimmat episykloidit ovat nimeltään kardioidi ja neproidi (munuaiskäyrä), joissa säteiden suhteet (alla R/r) ovat $1:1$ ja $2:1$. Kardioidi on erityisen mielenkiintoinen sen vuoksi, että se esiintyy ns. Mandelbrotin joukon keskiosassa, katso esimerkiksi [4].

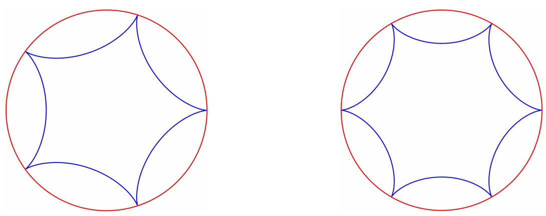


kardioidi ja neproidi

Vastaavasti hyposykloideja ovat deltoidi, astroidi, pentoidi ja eksoidi[1], joissa säteiden suhde kasvaa arvosta 3 arvoon 6. Suhteen arvolla $1:1$ pyöriminen ei onnistu sisäpuolella ja $2:1$ on hyposykloidin (mielenkiintoinen) erikoistapaus, joka surkastuu pelkäksi janaksi (Cardanon ympyrä).



deltoidi ja asteroidi

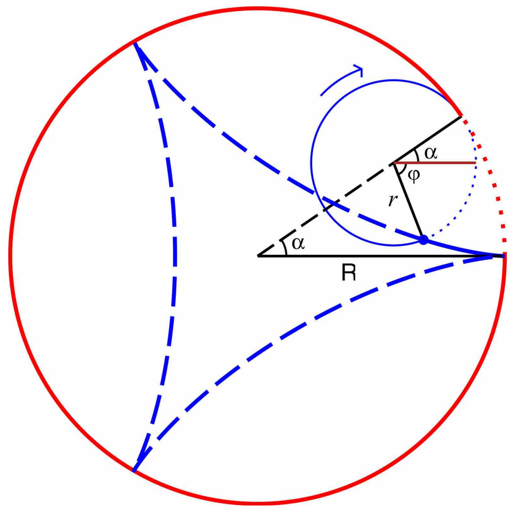


pentoidi ja eksoidi

Hyposykloidin kaavat

Seuraavassa käsitellään tarkemmin vain hyposykloideja; episykloidit ovat matemaattisesti hyvin samanlaisia.

Tarkastellaan siis tilannetta, jossa R-säteisen origokeskisen ympyrän sisällä on pienempi r-säteinen ympyrä. Alkutilanteessa ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(R, 0)$ ja pieni ympyrä alkaa vieriä suuremman kehää pitkin niin, että sivuamispiste liikkuu vastapäivään. Hyposykloidin piirtää se pienen ympyrän piste, joka oli aluksi pisteessä $(R, 0)$.



Hyposykloidin konstruktio.

Kuvassa hyposykloidin piirtävä piste on merkitty sinisellä. Punaisen ja sinisen pisteviivan pituudet ovat vierimisehdon perusteella yhtäsuuret ja sininen katkoviiva esittää sitä hyposykloidin osaa, joka on vielä piirtämättä.

Valitaan muuttujaksi kuvaan merkityn ison ympyrän sektorin keskuskulma α, jota rajoittavat alkutilaan ja uuteen sivuamispisteeseen piirretyt säteet. Pienen ympyrän keskipiste on silloin kohdassa

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha \\ y = (R-r)\sin\alpha. \end{cases}$$

Kulma α ei ole kuitenkaan sama kuin pienen ympyrän kiertymiskulma keskipisteensä suhteen[2], vaan oikea kiertokulma on kuvioon merkitty φ. Vierimisehdon perusteella pisteviivoitetut ympyrän kaaret ovat yhtä pitkät, joten

$$\alpha R = (\varphi + \alpha) r.$$

Näin ollen pienen ympyrän kiertokulma sen keskipisteen ympäri on

$$\varphi = \frac{R-r}{r}\alpha. \tag{1}$$

Koska pieni ympyrä kiertyy myötäpäivään, saadaan sinisen pisteen koordinaateiksi (pienen ympyrän keskipisteen suhteen)

$$\begin{cases} x = r\cos(-\varphi) = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(-\varphi) = -r\sin(\varphi). \end{cases}$$

Yhdistämällä keskipisteen liike ja pyöriminen toisiinsa (eli laskemalla koordinaatit yhteen) sekä käyttämällä kulmien välistä yhteyttä (1) saadaan sinisen pisteen paikka origon suhteen:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos\alpha + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right) \\ y = (R-r)\sin\alpha - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right). \end{cases}$$

[1] Kaksi viimeistä ovat kirjoittajan omia käännöksiä. Englannin 'exoid' voisi olla myös heksoidi.

[2] Kulma α on pienen ympyrän kiertokulma, jos kyseessä olisi liukuminen eikä vieriminen.

Kun valitaan $r = 1$ ja merkitään $R = n$, saadaan hieman tavallisemmat ja mukavamman näköiset kaavat

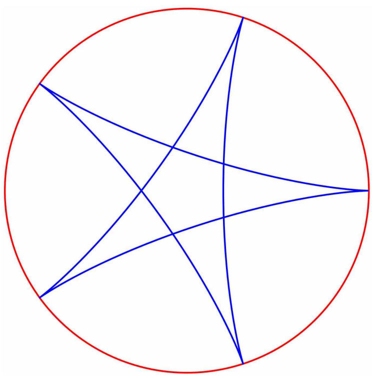
$$\begin{cases} x = (n-1)\cos\alpha + \cos((n-1)\alpha) \\ y = (n-1)\sin\alpha - \sin((n-1)\alpha). \end{cases} \tag{2}$$

Tämä on hyposykloidin parametriesitys, jota käyttämällä kaikki tämän kirjoituksen hyposykloidikuvat on piirretty (Maple-ohjelman avulla).

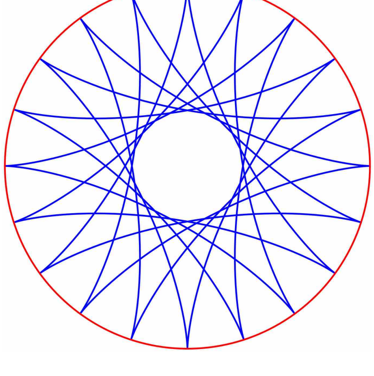
Muut parametrit ja jaksollisuus

Ympyröiden säteiden suhteen merkintä $n = R/r > 0$ viittaa kokonaislukuun, joka onkin tilanne kaikissa aikaisemmissa kuvissa. Tällöin sininen piste palaa yhden kierroksen $0 \le \alpha \le 2\pi$ jälkeen alkukohtaansa $(n, 0)$ ja sen liike on jaksollista. Näissä hyposykloideissa on täsmälleen n kappletta teräviä kulmia, joissa sininen piste koskettaa isoa ympyrää. Toisaalta ainoa välttämätön vaatimus on se, että suhde $n > 1$ on reaaliluku. Tällöin tulee vastaan kaksi erilaista tapausta, joiden tutkiminen jätetään harjoitustehtäviksi.

Tehtävä 2. Oletetaan, että $n = p/q > 1$ on supistetussa muodossa oleva rationaaliluku, muttei kokonaisluku. Osoita, että vastaava hyposykloidi on jaksollinen ja selvitä sen kärkien lukumäärän ja jakson pituuden (kulman α suhteen) riippuvuus luvuista p ja q.

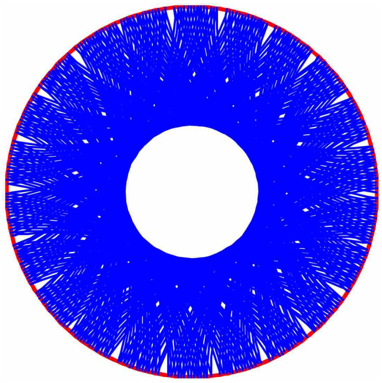


Hyposykloidi tapauksessa $n = 5/3$.



Hyposykloidi tapauksessa $n = 20/7$.

Tehtävä 3. a) Oletetaan, että $n > 1$ on irrationaaliluku. Osoita, ettei vastaava hyposykloidi ole jaksollinen. b) (Vaikea tai mahdoton pelkillä lukiotiedoilla?) Osoita, että a-kohdan tapauksessa vastaava hyposykloidi täyttää n- ja $(n-1)$-säteisten ymyröiden välisen rengasalueen seuraavassa mielessä: Jos valitaan mikä tahansa rengasalueen piste P ja luku $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen hyposykloidin piste H, jonka etäisyys pisteestä P on pienempi kuin ε. (Huomaa: Tämä ei tarkoita sitä, että hyposykloidi kulkee jokaisen rengasalueen pisteen kautta.)



Sata hyposykloidin kierrosta parametrin arvolla $n = \pi$.

Käytännön sovellus

Total Recall -elokuvan uudelleenfilmatisoinnissa (v. 2012) matkustetaan Maan läpi kaivettua tunnelia pitkin pelkästään painovoiman avulla [5]. Jos reitin päätepisteet ovat Maan vastakkaisilla puolilla (antipodipisteet), niin nopein tunneli kulkee suoraan Maan keskipisteen kautta. Muissa tapauksissa nopein tunneli on sopivan hyposykloidin kaari Maan keskipisteen kautta kulkevassa tasossa. Hyposykloidi ratkaisee siis pallolla saman minimointiongelman kuin tavallinen sykloidi homogeenisessa painovoimakentässä (katso viitteen [1] loppuosa).

Viitteessä [6] on joitakin asiaan liittyviä selityksiä, mutta perustelut menevät kauas lukiomatematiikan ulkopuolelle.

Episykloidin kaavat

Mainitaan vielä, että episykloidin kaavat eroavat hyposykloidin kaavoista (2) vain muutamilla etumerkkien vaihdoilla:

$$\begin{cases} x = (n+1)\cos\alpha - \cos((n+1)\alpha) \\ y = (n+1)\sin\alpha - \sin((n+1)\alpha). \end{cases} \tag{3}$$

Tästä päästäänkin lopuksi SAT-tehtävään, vaikkei sen ratkaisussa mitään kaavoja tarvitakaan.

Tehtävän 1 vastaus

Alussa mainittu SAT-tehtävä tuli kuuluisaksi siitä, että mikään annetuista vaihtoehdoista ei ole oikea. Osa kokeeseen osallistujista huomasi tämän, muttei pystynyt vastaamaan puuttuvaa oikeaa vaihtoehtoa, joka on 4. Yleisin vastaus oli 3, johon päätyy ajattelemalla ympyrän kaarenpituuden kaavaa $p = 2\pi\cdot$ säde; ts. kaarenpituus on suoraan verrannollinen säteeseen. Tehtävää ei voi kuitenkaan ratkaista pelkkiä kaarenpituuksia vertaamalla, koska vierimisalusta ei ole suoraviivainen: isompi ympyrä "kaareutuu alta pois" ja sen vuoksi vierimiseen tarvitaan yksi pienen ympyrän kierros enemmän! Asialle voi (ainakin jälkikäteen. . .) keksiä useita intuitiivisia selityksiä ja helpoin kokeilu on kahdella samankokoisella kolikolla eli kardioidin tapauksessa[3]: vierimiseen tarvitaan kaksi kierrosta yhden sijaan. Yllä mainituissa episykloidin kaavoissa kertoimen $n + 1$ osa $+1$ liittyy juuri tähän ilmiöön. Vastaavasti hyposykloidin pyörimiseen tarvitaan yksi kierros vähemmän vastaan kaareutuvan alustan vuoksi. Tämäkin näkyy kaavojen kertoimissa $n - 1$.

Aiheesta lisää viitteessä [7] ja erinomaisella YouTube-videolla [8]. Sen loppupuolella selitetään myös, miten tämä tehtävä liittyy tähti- ja aurinkovuorokausien pituuksiin [9].

Viitteet

[1] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/2/sykloidi.pdf`

[2] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Episykloidi`

[3] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Hyposykloidi`

[4] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotin_joukko`

[5] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Total_Recall_(vuoden_2012_elokuva)`

[6] `https://mathworld.wolfram.com/SpherewithTunnel.html`

[7] `https://www.scientificamerican.com/article/the-sat-problem-that-everybody-got-wrong/`

[8] `https://www.youtube.com/watch?v=FUHkTs-Ipfg`

[9] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Vuorokausi`

Korjaus: Edelliseen sykloidia käsitelleeseen kirjoitukseeni [1] oli jäänyt ikävä painovirhe. Toisen sivun oikean palstan ylhäällä olevassa kaavassa

$$\begin{cases} x = R\cos(-(vt/R - \pi/2)) = -R\sin(vt/R) \\ y = R\sin(-(vt/R - \pi/2)) = -R\cos(vt/R) \end{cases}$$

ei pidä olla sulkuja sinin ja kosinin sisällä, vaan oikeat lausekkeet ovat

$$\begin{cases} x = R\cos(-vt/R - \pi/2) = -R\sin(vt/R) \\ y = R\sin(-vt/R - \pi/2) = -R\cos(vt/R). \end{cases}$$

Alkuperäisen mukaan hetkellä $t = 0$ kulman arvoksi saadaan $-(-\pi/2) = \pi/2$, joka vastaa ympyrän ylintä kohtaa, vaikka tarkoitus on lähteä liikkeelle alhaalta.

Kiitokset korjauksesta eräälle Aalto-yliopiston opiskelijalle, joka huomautti asiasta luentoesimerkin yhteydessä.

[3]Pahvista leikattujen ympyrälevyjen välillä on kolikoita suurempi kitka ja koe on helpompi toteuttaa.