

S&LMU

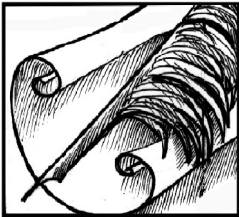
MATEMATIIKKALEHTI 2/2024

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Hyvin hankalat, mahdottomat ja hyvin työlääät ongelmat (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Onko amerikkalainen jalkapallo sittenkin pallon muotoinen? (Tuomas Korppi)	5
Solmun tehtäviä	11
Jogurttitölkkin ravistelun optimointi (Jukka Liukkonen)	13
Suomen menestys huikeaa Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisissa 2024 Tskaltubossa	19
Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2024 Bathissa (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	21
Kulman kolmiajako harppiviivoitinmenetelmällä (Reijo Hautakangas)	25



Hyvin hankalat, mahdottomat ja hyvin työläät ongelmat

Pääkirjoitus

Matematiikassa on ongelmia, joiden tiedetään olevan äärimmäisen hankalia, ja joita on yritetty ratkaista jo hyvin pitkään. Näihin kuuluu esimerkiksi Riemannin hypoteesin todistaminen. Hypoteesin mukaan Riemannin zeta-funktion kaikki epätriviaalit nollakohtat ovat ns. kriittisellä suoralla, eli kompleksitason suoralla, jolla luvun reaaliosa on $\frac{1}{2}$. Riemannin hypoteesi on oleellinen, koska sillä on valtavia implikaatioita muihin tuloksiin. Lukuteoriassa on merkittävä määrä tuloksia, jotka on todistettu olettaen Riemannin hypoteesi. Näin saadaan toisinaan parempia tuloksia kuin olettamatta hypoteesia. Riemannin zeta-funktiolla on yhteys esimerkiksi alkulukujen jakaumaan. Kaikkien epätriviaalien nollakohtien sijaitseminen kriittisellä suoralla on yhtäpitävää alkulukujen tasaisemman jakautumisen kanssa (eli alkulukulauseen virhetermin pienuuden kanssa).

Eräät ongelmat ovat äärimmäisen työläitä. Näihin kuuluu esimerkiksi tekijöihinjako. Siinä missä pienen luvun tekijöihin jakaminen on toisinaan ehkä mukava harjoitustehtävä, ison luvun jakaminen tekijöihin on pahimmillaan todella hidasta. Mille tahansa annetulle luvulle voidaan kyllä löytää tekijät, kyse on lähinnä siitä, kuinka kauan aikaa kuluu. Tämän ongelman työläyteen perustuu esimerkiksi RSA-kryptosysteemi. RSA murtuu, jos tekijöihinjako saadaan nopeaksi. Toisaalta, jos RSA murtuu, niin tekijöihinjako onnistuu myös nopeasti. Kvanttikoneelle on olemassa nopea algoritmi tekijöihinjakoa varten, mutta ilman kvanttikonetta tällaista ei tunneta, vaikka kysymystä on pohdittu jo kauan. Toinen vastaava ongelma on hilan lyhimmän nollasta poikkeavan vektorin löytäminen. Siihenkään ei ole

nopeaa menetelmää, joka toimisi aina. Myös tämän kysymyksen työläyttä voidaan hyödyntää kryptografiasa.

Jotkut ongelmat on todistettu mahdottomiksi. Näihin kuuluu esimerkiksi yleisen ratkaisukaavan johtaminen vähintään 5. asteen yhtälölle ja kulman kolmiajako harppia ja viivoitinta käyttäen. Tämä ei tarkoita sitä, etteikö joitakin esimerkiksi 5. asteen yhtälöitä voisi ratkaista helposti tai etteikö joitakin kulmia voisi jakaa siististi kolmeen osaan harpilla ja viivaimella. Esimerkiksi yhtälö $x^5 + 1 = 0$ on helppo ratkaista. Myös 90 asteen kulma on mukava jakaa harpilla ja viivaimella kolmeen osaan käyttäen tämän nimenomaisen kulman erityisominaisuuksia. Kyse on siitä, että yleinen tilanne ei ole mahdollinen, eli löytyy vähintään joku tapaus, joka ei onnistu. Yhtälöitä voi lähestyä erilaisin numeerisin menetelmin. Myös kulmien kolmiajakoa voi lähestyä approksimoiden. Tässä lehdessä on juttu, jossa kerrotaan, kuinka kulman voi jakaa kolmeen osaan saaden melko hyvän tuloksen ja käyttäen vain harppia ja viivainta.

Lisäksi on todistettu, että on olemassa lauseita, joiden totuusarvoa ei pystytä todistamaan. Tätä käsitellään seuraavassa numerossa Antti Valmarin kirjoituksessa.

Monet hankalat ongelmat ovat kiehtovia. Ennen kuin Fermat'n suuri lause todistettiin, yritti moni todistaa sitä, mahdollisesti yrittäen toistaa Fermat'n itse väittämän erinomaisen todistuksen. Fermat'n suuri lause oli muotoiltavissa niin yksinkertaisesti, että hyvin moni ymmärsi väitteen, vaikka todistus oli lopulta äärim-

mäisen pitkä, tekninen ja syvällinen.

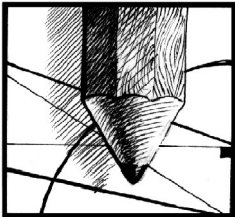
Nykypäivänä ehkä vastaava kysymys voisi olla ns. $3x + 1$ -konjektuuri, eli jos aloitetaan mistä tahansa positiivisesta kokonaisluvusta, ja jos luku on parillinen, niin jaetaan kahdella, muulloin kerrotaan kolmella ja lisätään yksi, niin väite on, että jos tätä operaatiota jatketaan, ennen pitkää päästään ykköseen. Kysymys kuulostaa alkeelliselta. Millä tahansa helpolla esimerkillä todellakin ennen pitkää päästään ykköseen. Konjektuuria on numeerisesti tarkistettu varsin suuriin lukuihin asti. Kysymys on kuitenkin yhä auki. Maineikas lukuteoreetikko Alf van der Poorten arvioi, että kysymys on niin perustavanlaatuisesti lukujen ominaisuuksiin liittyvä, että sitä ei saada koskaan todistettua.

Osa hankalista tai työläistä ongelmista on relevantteja, koska niillä on selkeitä implikaatioita joko teoriaan

(kuten zeta-funktion tapauksessa) tai käytäntöön (kuten tekijöihinjaon yhteydessä). Osa kysymyksistä ei ole merkittäviä samalla tavalla. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, etteikö niiden merkitys matematiikan tutkimukselle ja kehitykselle voisi olla valtava. Vaikka Fermat'n suuren lauseen suorat implikaatiot olivat selvästi vähäisempiä kuin vaikkapa Riemannin hypoteesin implikaatiot olisivat, Fermat'n suuren lauseen todistusritysten merkitys oli valtava. Kun sitä yritettiin todistaa, kehitettiin valtava määrä muuta teoriaa.

Työntekoa arvostavana kansana suomalaiset varmaan osaavatkin arvostaa ajatusta siitä, että (ongelman) työläyden tai hankaluuden merkitystä ei pidä aliarvioida, vaan olla siitä tyytyväinen.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Onko amerikkalainen jalkapallo sittenkin pallon muotoinen?

Tuomas Korppi

Johdanto

Monia matemaattisesti suuntautuneita henkilöitä huvittaa se, että amerikkalainen jalkapallo on peli, jossa pelivälinettä, joka ei ole pallonmuotoinen, pelataan pääosin käsillä. Kuitenkin pallot voivat olla, paitsi urheilukentällä, myös matematiikassa amerikkalaisen jalkapallon muotoisia – kunhan matematiikassa mennään riittävän syvälle. Tässä kirjoitelmassa selitämme, kuinka tämä on mahdollista.

Metriikka

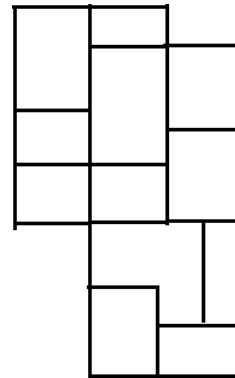
Jos (x_0, y_0, z_0) ja (x_1, y_1, z_1) ovat kaksi pistettä kolmiulotteisessa avaruudessa eli \mathbb{R}^3 :ssa, niiden välinen etäisyys saadaan kaavalla

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Tämä on kuitenkin vain yksi etäisyyskäsitelmä monien joukossa. Jos perusjoukkona on esimerkiksi pallon pinnan pisteiden joukko, voidaan muodostaa kaksipaikainen funktio $d(x, y)$, joka kertoo lyhyimmän etäisyyden pisteestä x pisteeseen y pallon pintaa pitkin mitattuna. Tällaisella etäisyyskäsitelmällä on oikeaakin käyttöä esimerkiksi lentoreittien suunnittelussa, onhan maapallo suunnilleen pallon muotoinen.

Tai ajatellaan perusjoukoksi jonkun kaupungin katuverkko, jossa jokaista katua kuvataan janalla. Etäisyys-

funktio tässä joukossa voidaan määritellä niin, että kullekin kahdelle kaduilla olevalle pisteelle x ja y etäisyys $d(x, y)$ on lyhyin etäisyys katuverkkoa pitkin mitattuna. (Katso kuva 1.)



Kuva 1: Esimerkki yksinkertaisesta katuverkosta.

Etäisyyskäsitelmiä on siis useita, ja tällaisessa tapauksessa matematiikassa on tapana esittää aksioomat, jotka jonkun funktion on toteutettava, että se muodostaisi etäisyyskäsitelmän. Kokemus on osoittanut, että seuraavat aksioomat ovat eräänlainen minimivaatimus sille, että funktiota voidaan ajatella etäisyysfunktiona.

Olkoon X perusjoukko ja $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Funktio d on metriikka eli etäisyysfunktio, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat.

1. $d(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.
2. $d(x, x) = 0$ ja vain jos $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Ensimmäinen aksiooma sanoo, että kaikki etäisyydet ovat ei-negatiivisia. Toinen aksiooma sanoo, että etäisyys pisteestä itseensä on nolla, ja kahden eri pisteen etäisyys on aina suurempi kuin nolla. Kolmas aksiooma sanoo, että etäisyys ei riipu siitä, kummassa järjestyksessä pisteet esitetään (ja näin ollen matka-aika olosuhteissa, joissa on ylä- ja alamäkiä ei kelpaa etäisyysfunktioiksi).

Neljäs aksiooma sanoo, että $d(x, y)$ on lyhyin etäisyys x :stä y :hyn, eikä matkaa voi lyhentää tästä kiertämällä minkään muun pisteen z kautta.

Jos X on perusjoukko ja d siellä määritelty etäisyysfunktio, sanomme, että (X, d) on metrinen avaruus.

Kaikki kolme edellä esitettyä etäisyyskäsitystä toteuttavat nämä aksioomat. On hyödyllinen harjoitus lukijalle käydä jokainen aksiooma jokaiselle näistä läpi ja todeta, että aksiooma toteutuu.

Pallot

Merkitään tavallista etäisyyttä pisteestä x pisteeseen y kolmiulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^3 symbolilla $d_e(x, y)$. Nyt pallo, jonka keskipiste on x ja säde on r , voidaan kirjoittaa

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid d_e(x, y) \leq r\},$$

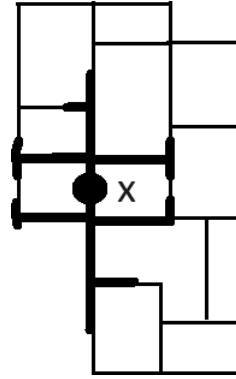
missä yhtälön vasen puoli on notaatio, jolla palloa merkitään ja oikea puoli pallon määrittävä kaava. Eli palloon kuuluvat kaikki ne avaruuden pisteet, joiden etäisyys x :stä on korkeintaan r .

Korkeammassa matematiikassa on hyvin tyypillistä ottaa joku arkimatematiikan käsite ja sen keskeinen ominaisuus, ja sitten pitää tuota keskeistä ominaisuutta saman käsitteen määritelmänä kaikenlaisissa ufoissa konteksteissa. Nyt teemme juuri näin, ja määrittelemme pallon yleisessä metrisessä avaruudessa.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja r positiivinen reaali-luku. Nyt x -keskeinen ja r -säteinen pallo määritellään

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

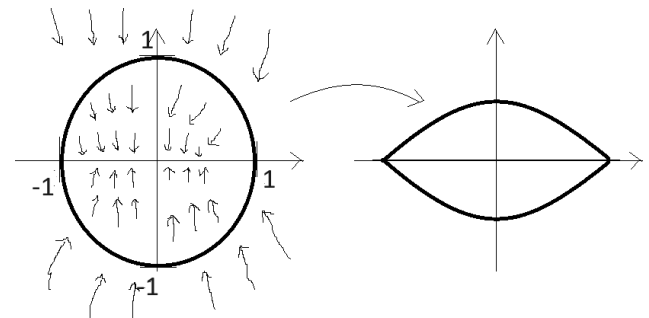
Jos esimerkiksi (X, d) ovat kuten katuverkosto-esimerkissämme ja $x \in X$, niin $\bar{B}(x, 1 \text{ km})$ on niiden katupisteiden joukko, jonne päästään lähtemällä pisteestä x ajamalla korkeintaan yksi kilometri. (Katso Kuva 2).



Kuva 2: Kuvassa vahvennettuna $\bar{B}(x, 1 \text{ km})$.

Seuraavaksi muutamme tason etäisyyskäsitystä niin, että saamme amerikkalaisen jalkapallon (tai sen kaksiulotteisen version) muotoisen pallon. Teemme tämän ensin kaksiulotteisessa avaruudessa, koska Matematiikkakalehti Solmu ilmestyy toistaiseksi kaksiulotteisena, ja tarvitsemme havainnollistavia kuvia. Olkoon siis \mathbb{R}^2 taso ja d_e sen normaali etäisyyskäsitys.

Ajatellaan, että taso on tehty kumiasta, jota voidaan venyttää vapaasti. Tutkitaan kuvaa 3. Venytetään vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyvän ympyrän ylä- ja alapuolta niin, että niistä tulee oikeanpuoleisen kuvan amerikkalaisen jalkapallon ylä- ja alakaari. Koska taso on kumia, ympyrän sisään jäävä alue kutistuu samalla niin, että se täyttää täsmälleen amerikkalaisen jalkapallon sisään jäävän alueen, ja ympyrän ulkopuolelle jäävä alue venyy niin, että se täyttää amerikkalaisen jalkapallon ulkopuolelle jäävän alueen.



Kuva 3: Vasemmalla ympyrä, joka venytetään amerikkalaiseksi jalkapalloksi oikealla.

Olkoon x piste vasemmanpuoleisen kuvan tasolla ja $f(x)$ se oikeanpuoleisen kuvan tason piste, jonne x venytettäessä menee. Näin saamme bijektion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

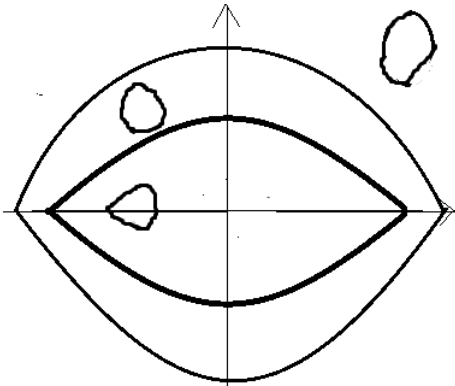
Määritellään nyt $d(x, y) = d_e(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Lukija voi tarkistaa, että tämä etäisyysfunktio toteuttaa kaikki metriikan aksioomat. Ajatellaan siis d metriikkana oikeanpuoleisen kuvan tasolla.

Oletetaan jatkossa, että vasemmanpuoleisen kuvan ympyrän säde on 1. Nyt x on amerikkalaisen jalkapallon

reunalla jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) = 1$, sisällä jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) < 1$ ja ulkopuolella jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) > 1$. Siis $B(\bar{0}, 1)$ on täsmälleen oikeanpuoleisen kuvan amerikkalainen jalkapallo.

Lukijan on helppo vakuuttaa itsensä siitä, että sama kikka toimii myös \mathbb{R}^3 :ssa, joten olemme täyttäneet tämän artikkelin tarkoituksen ja osoittaneet, että myös matematiikassa pallot voivat olla amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Esimerkissämme kuitenkin vain yksi pallo on amerikkalaisen jalkapallon muotoinen. Jos pallolla on jokin muu keskipiste kuin $\bar{0}$ tai jokin muu säde kuin 1, tulee pallosta aivan eri muotoinen (katso kuva 4). Koska artikkeli sivuaa urheilua, osoitamme mekin urheiluhenkeä ja osoitamme, että \mathbb{R}^3 :een voidaan muodostaa metriikka niin, että kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.



Kuva 4: Eri muotoisia palloja kumisella tasolla.

Jos metriikka määritellään \mathbb{R}^3 :ssa niin, että

$$d((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + 9(y_0 - y_1)^2 + 9(z_0 - z_1)^2}$$

(tarkista, että tämä on metriikka), kaikki pallot ovat sellaisia sikarinmuotoisia ellipsoideja, mutta tämä ei kelpaa meille amerikkalaisiksi jalkapalloiksi, koska amerikkalaisessa jalkapallossa on kummassakin päässä terävä kärki, kun taas edellä mainituissa ellipsoideissa päätkin ovat ellipsimaisen kaarevat.

Normi

Jotta voisimme muodostaa metriikan, jossa kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia, meidän täytyy ensin määritellä, mitä tarkoittaa vektoreiden laskutoimitusten kanssa yhteensopiva metriikka.

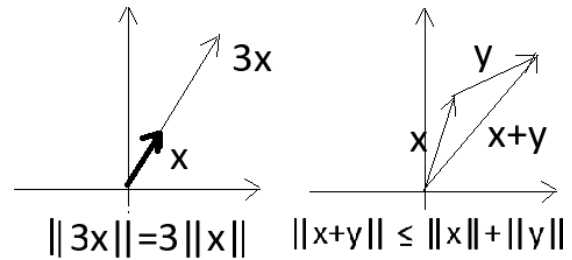
Ensinnäkin samaistamme jokaisen \mathbb{R}^3 :n pisteen sen paikkavektorin kanssa, eli ajattelemme pistettä ja sen paikkavektoria samana oliona. Näin pisteitä voidaan

laskea yhteen ja kertoa reaalityylillä kuten paikkavektoreilla tehdään, ja saada tulokseksi taas pisteen.

Määrittelemme, mitä tarkoittaa normi \mathbb{R}^3 :ssa. Normi on eräänlainen yleistys vektorin pituus käsitteestä. Olkoon siis $\|\cdot\|: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sanomme, että $\|\cdot\|$ on normi, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. $\|x\| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^3$.
2. $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.
3. $\|\ell x\| = |\ell| \|x\|$ kaikilla $\ell \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}^3$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Katso kuvasta 5 kahden viimeisen aksiooman havainnollistus.



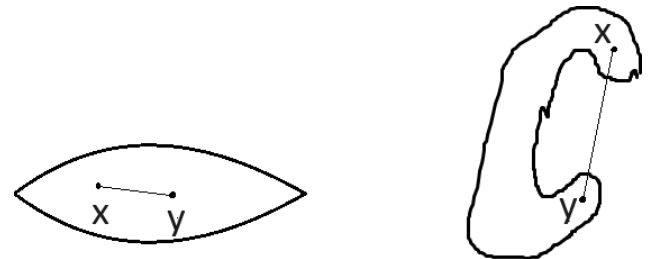
Kuva 5: Vasemmalla normin Aksiooma 3, oikealla normin Aksiooma 4.

Lukija voi todeta, että tavallinen vektorin pituusfunktio $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa kaikki normin aksioomat. Esimerkki erikoisemmasta normista on $\|(x_0, y_0, z_0)\| = \max(|x_0|, |y_0|, |z_0|)$, ja lukija voi taas tsekata, että tämä toteuttaa kaikki normin aksioomat.

Lisäksi on sellainen hieno tulos, että jos $\|\cdot\|$ on mikä tahansa normi, niin $d(x, y) = \|x - y\|$ on metriikka \mathbb{R}^3 :ssa. Lukija voi itse tsekata, että kaikki metriikan aksioomat toteutuvat.

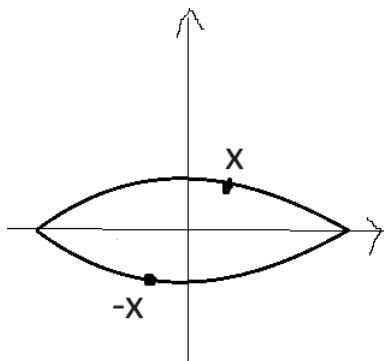
Konvekssi joukko

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$. Sanomme, että A on konvekssi, jos kaikilla $x, y \in A$ pätee, että joukko A sisältää janan pisteestä x pisteeseen y . (Katso kuva 6.)



Kuva 6: Vasemmalla konvekssi joukko, oikealla joukko, joka ei ole konvekssi.

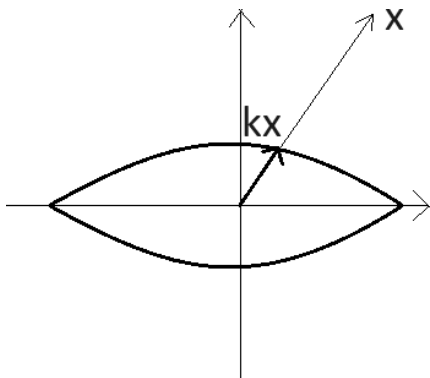
Sanomme, että A on symmetrinen, jos kaikilla $x \in A$ pätee $-x \in A$, ja lisäksi $\bar{0} \in A$. (Katso kuva 7.)



Kuva 7: Symmetrinen joukko.

Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}^3$ rehellistä fysikaalista kappaletta vastaava pistejoukko, eli ajatellaan fysikaalisen kappaleen sijoitetuksi \mathbb{R}^3 :een, ja A sisältää kaikki ne pisteet, jotka ovat kappaleen sisä- tai reunapisteitä. Oletamme lisäksi, että A on konvekksi ja symmetrinen, ja $\bar{0}$ on A :n sisällä (eikä reunalla). Esimerkiksi A voi olla amerikkalaisen jalkapallon muotoinen, kun sen keskipiste on origossa.

Määrittellemme joukon A avulla normin $\|\cdot\|_A$ seuraavasti: Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $k \in \mathbb{R}, k > 0$ sellainen, että kx sijaitsee joukon A reunalla. (Katso kuva 8.) Tällainen k on aina olemassa, kun $x \neq \bar{0}$, koska $\bar{0}$ sijaitsee kappaleen A sisällä ja A on rehellinen fysikaalinen kappale. Koska A on konvekksi, k on myös yksikäsitteisesti määrätty. Nyt määritellään $\|x\|_A = 1/k$. Lisäksi määritellään $\|\bar{0}\|_A = 0$.



Kuva 8: Näin määritellään luku k .

Teoreema 1. $\|\cdot\|_A$ toteuttaa kaikki normin aksioomat.

Todistus: Kaksi ensimmäistä aksioomaa ovat itsensänselvää.

Todistamme kolmannen aksiooman. Olkoon $\ell > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $k > 0$ sellainen, että kx on joukon A reunalla. Nyt myös $(k/\ell)(\ell x)$ on joukon A reunalla. Siis $\ell/k = \|\ell x\|_A$ ja $\|x\|_A = 1/k$. Siis Aksiooma 3 pätee positiiviselle ℓ .

Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$. Jos kx on joukon A reunalla, myös $-kx = k(-x)$ on joukon A reunalla, koska A oletettiin symmetriseksi. Siis $\|-x\| = \|x\|$.

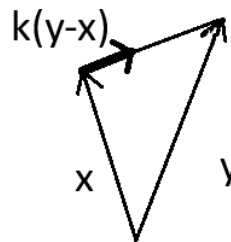
Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$ ja $\ell > 0$. Nyt $\|-\ell x\| = \|\ell x\| = |\ell| \|x\| = |-\ell| \|x\|$. Siis Aksiooma 3 pätee myös negatiiviselle kerrotimele.

Todistetaan Aksiooma 4.

Varsinaista todistusta ajatellen teemme ensin pari huomiota.

Ensinnäkin huomataan, että jos $x \in \mathbb{R}^3$, niin $x/\|x\|_A$ on joukon A reunalla, koska kyseessä on kx edellisten kappaleiden notaatiolla.

Olkoon sitten $x, y \in \mathbb{R}^3$. Haluamme piirtää janan pisteestä x pisteeseen y . Tämä tehdään niin, että aloitetaan pisteestä x ja piirretään janaa vektorin $y - x$ suuntaisesti. Jana on siis $\{x + k(y - x) \mid 0 \leq k \leq 1\}$. Toisaalta lauseke $x + k(y - x) = (1 - k)x + ky$. Tämä tarkoittaa sitä, että janan pisteet ovat täsmälleen painotetut keskiarvot pisteistä x ja y . (Katso kuva 9.)



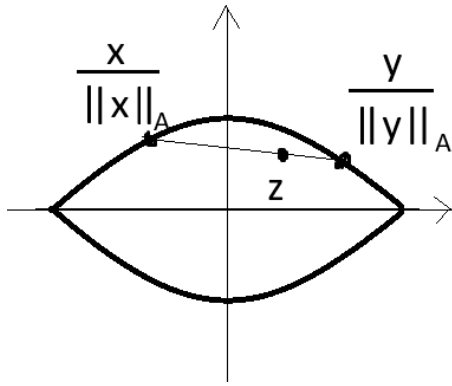
Kuva 9: $x + k(y - x)$ piirtää janan pisteestä x pisteeseen y .

Nyt varsinainen todistus.

Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^3$. Määritellään z seuraavasti:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x + y}{\|x\|_A + \|y\|_A} \\ &= \frac{\|x\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \cdot \frac{x}{\|x\|_A} + \frac{\|y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \cdot \frac{y}{\|y\|_A}. \end{aligned}$$

Nyt $\frac{x}{\|x\|_A}$ ja $\frac{y}{\|y\|_A}$ ovat joukon A reunalla, ja z on painotettu keskiarvo näistä pisteistä. Piste z siis sijaitsee näitä pisteitä yhdistävällä janalla, ja koska A on konvekksi, z sijaitsee siis joukossa A . (Katso kuva 10.) Jos siis valitaan k niin, että kz on joukon A reunalla, $k \geq 1$, ja siis $\|z\|_A \leq 1$.



Kuva 10: Piste z sijaitsee näin.

Siis

$$\|z\|_A = \frac{\|x + y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \leq 1.$$

Kertomalla tästä oikeanpuoleinen epäyhtälö puolittain keskimmäisen lausekkeen nimittäjällä saadaan Aksioma 4. \square

Pallot metriikassa d_A

Tässä luvussa todistamme vihdoin sen tuloksen, että on olemassa metriikka \mathbb{R}^3 :ssa, jossa kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Teoreema 2. *Olkoon $\|\cdot\|$ mikä tahansa normi \mathbb{R}^3 :ssa, ja d kaavalla $d(x, y) = \|x - y\|$ määritetty metriikka. Tällöin kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia pallon $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ kanssa.*

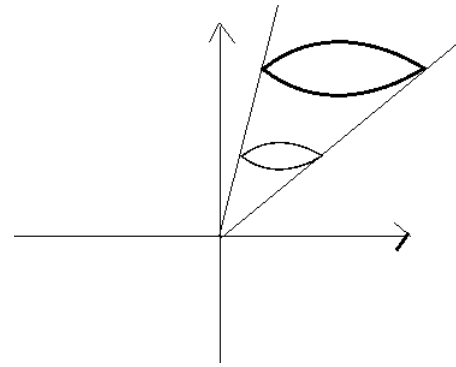
Todistus: Ensinnäkin huomataan, että

$$\|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\|.$$

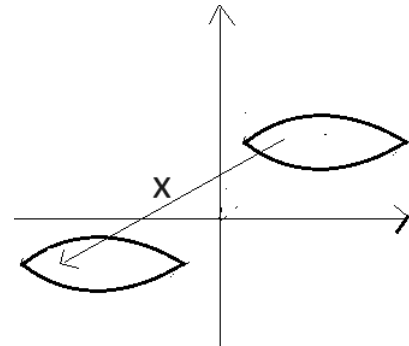
Sitten varsinainen todistus:

Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$ ja $r > 0$. Nyt $y \in \bar{B}(x, r)$ jos ja vain jos $\|x - y\| \leq r$ jos ja vain jos $\|y/r - x/r\| \leq 1$ jos ja vain jos $y/r - x/r \in \bar{B}(\bar{0}, 1)$.

Tutkitaan funktiota $b: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; b(y) = y/r - x/r$, kun x on vakio. Se on helppo nähdä bijektiiviseksi (tarkista bijektiivisyys itse). Funktion b bijektiivisyydestä yhdessä edellisen kappaleen jos ja vain jos -ketjun kanssa seuraa, että funktio b vie pallon $\bar{B}(x, r)$ palloksi $\bar{B}(\bar{0}, 1)$.



Kuva 11: Pienempi amerikkalainen jalkapallo on isomman kuvajoukko, kun funktiona on $y \mapsto y/2$.



Kuva 12: Vasemmanpuoleinen amerikkalainen jalkapallo on oikeanpuoleisen kuvajoukko, kun funktiona on $y \mapsto y + x$ ja x on vakiovektori.

Nyt funktio $y \mapsto y/r$ kutistaa (tai avartaa, jos $r < 1$) avaruutta r :n verran (katso kuva 11), ja funktio $y' \mapsto y' - x/r$ siirtää avaruutta vektorin $-x/r$ osoittaman suunnan ja matkan (katso kuva 12). Siis b kutistaa ja siirtää avaruutta, mutta säilyttää kappaleiden muodon. Koska b vie pallon $\bar{B}(x, r)$ palloksi $\bar{B}(\bar{0}, 1)$, kuviot $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ ja $\bar{B}(x, r)$ ovat yhdenmuotoisia. \square

Määritellään, että metriikka $d_A(x, y) = \|x - y\|_A$. Perusjoukkona on siis \mathbb{R}^3 .

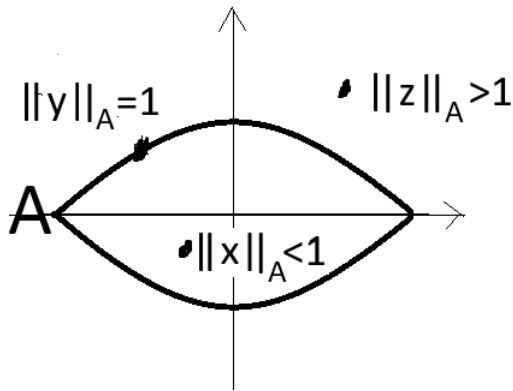
Teoreema 3. *Metriikassa d_A kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia joukon A kanssa.*

Todistus: Tutkitaan joukkoa A . Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$, ja $k > 0$ sellainen, että kx on joukon A reunalla.

Oletetaan $k \geq 1$. Nyt $\bar{0}, kx \in A$, ja x on pisteitä $\bar{0}$ ja kx yhdistävällä janalla. Koska A on konvekksi, $x \in A$.

Oletetaan, että $x \in A$. Koska A oli rehellinen fyysikaalinen kappale, sen reuna tulee jossain vaiheessa kuljettaessa pisteestä x vektorin x osoittamaan suuntaan, ja on siis olemassa $k' \geq 1$, jolle $k'x$ on kappaleen A reunalla. Mutta nyt k :n yksikäsitteisyyden nojalla $k = k' \geq 1$.

Siis joka tapauksessa $x \in A$ jos ja vain jos $k \geq 1$ jos ja vain jos $\|x\|_A \leq 1$ jos ja vain jos $x \in \bar{B}(\bar{0}, 1)$. Siis $A = \bar{B}(\bar{0}, 1)$. (Katso kuva 13.)



Kuva 13: Kuvassa joukko A sekä joidenkin pisteiden normeja.

Siis edellisen teoreeman nojalla kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia joukon A kanssa. \square

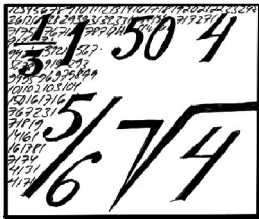
Siis kaikki avaruuden (\mathbb{R}^3, d_A) pallot ovat joukon A muotoisia. Amerikkalainen jalkapallo on konvekksi ja symmetrinen, rehellinen fysikaalinen kappale. Jos siis

A valitaan sellaisen amerikkalaisen jalkapallon muotoiseksi, jonka keskipiste on origossa, kaikki avaruuden (\mathbb{R}^3, d_A) pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Pelataanko amerikkalaista jalkapalloa sittenkin pääosin jaloilla?

Kädelliset ovat eläinlajiko, johon kuuluu apinat, ihmiset sekä joitain muita lajeja. Näille tyypillistä on se, että eturaajat ovat kehittyneet oksiin ja esineisiin tarttumiseen. Kädellisiä on ollut olemassa ainakin 70 miljoonaa vuotta, ja ne ovat kehittyneet nelijalkaisista nisäkkäistä. Kun kädelliset olivat kehittymässä, niiden nelijalkaisten esi-isien etujalat kehittyivät käsiksi.

Näin ollen voidaan sanoa, että kädet ovat itse asiassa tarttumiseen erikoistuneet etujalat, ja amerikkalaista jalkapalloakin pelataan pääosin näillä tarttumiseen erikoistuneilla etujaloilla. Emme kuitenkaan sukella syvemmälle tähän aihepiiriin, koska se kuuluu biologian eikä matematiikan alaan.

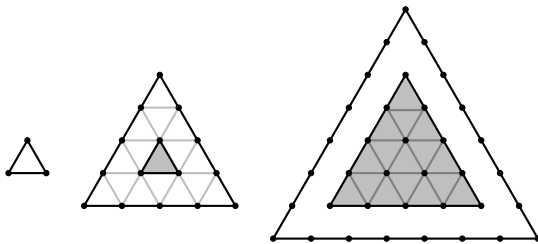


Solmun tehtäviä

Tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

1. Frans jakoi suorakulmion yhdeksäksi neliöksi. Hän havaitsi, että yhden neliön pinta-ala on 64 cm^2 , kahden neliön pinta-ala on 16 cm^2 ja muiden neliöiden pinta-ala on 4 cm^2 . Mikä oli alkuperäisen suorakulmion piiri?

2. Piirretään pieni tasasivuinen kolmio ja ympäröidään se yhdellä kerroksella samanlaisia pieniä kolmioita niin, että saadaan suurempi tasasivuinen kolmio alla olevan kuvan mukaisesti. Ympäröidään sitten saatu suurempi tasasivuinen kolmio vastaavasti yhdellä kerroksella pieniä kolmioita, jolloin saadaan vielä suurempi tasasivuinen kolmio (katso kuva), ja niin edelleen.



- (a) Kuinka monta pientä kolmiota kolmannessa kolmiossa on? (Kolmas kolmio on kuvassa oikealla.)
- (b) Kuinka monta pientä kolmiota kahdennessakymmenessä kolmiossa on?
- (c) Kuinka monta pientä kolmiota n . kolmiossa on?

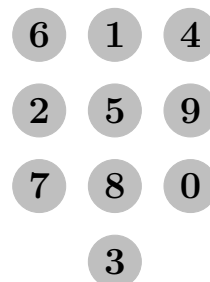
3. Kimin piti ratkaista epäyhtälö

$$\frac{4}{x-2} > 5,$$

mutta hän korvasi luvun 5 vahingossa toisella positiivisella kokonaisluvulla. Hän ratkaisi muuttuneen epäyhtälön oikein ja sai ratkaisuksi $2 < x < 4$. Millä positiivisella kokonaisluvulla hän oli korvannut epäyhtälössä luvun 5?

4. Jaetaan positiivinen kokonaisluku n jokaisella luvulla n pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla ja merkitään $f(n)$:llä saatujen jakojäännösten summaa. Esimerkiksi jaettaessa luku $n = 5$ luvuilla 1, 2, 3 ja 4 saadaan jakojäännökset 0, 1, 2 ja 1, joten $f(5) = 0 + 1 + 2 + 1 = 4$. Ratkaise yhtälö $f(n) = n$.

5. Älypuhelimella pankkisovellukseen kirjautuminen vaatii nelinumeroisen PIN-koodin. Turvallisuussyistä numerot ilmestyvät eri kirjautumiskerroilla satunnaisesti puhelimen näytölle kohtiin, jotka näkyvät alla olevassa kuvassa. Jokaisen numeroiden 0–9 erilaisen sijoittelun todennäköisyys on sama. Alla olevassa kuvassa on esitetty yksi mahdollinen numeroiden sijoittelu. Kun PIN-koodi sisältää neljä eri numeroa, niin mikä on todennäköisyys, että kahdella peräkkäisellä kirjautumiskerralla käyttäjä jättää sormenjälkensä samoihin kohtiin puhelimen näytöllä?

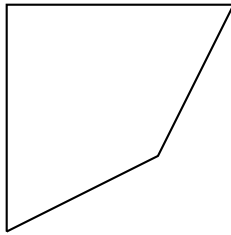


6. Erään reaalityön ja sen käänteistyön summan neliö on 5.

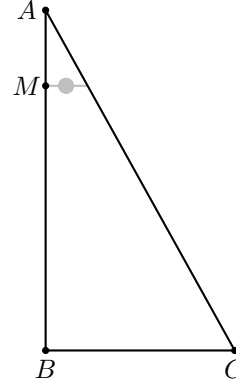
- (a) Määritä kyseisen reaalityön neliön ja neliön käänteistyön summa ratkaisematta itse reaalityötä.
- (b) Määritä kyseisen reaalityön kuution ja kuution käänteistyön summa ratkaisematta itse reaalityötä.

7. Annalla, Laurilla ja Tiinalla on jokaisella rahaa omalla pankkitilillään enemmän kuin 100 euroa. Laurilla on rahaa 35 prosenttia siitä mitä Annalla on ja Tiinalla on rahaa $\frac{12}{7}$ siitä mitä Laurilla on. Kuinka paljon Annalla, Laurilla ja Tiinalla on yhteensä rahaa, kun Tiinalla on 1011 euroa enemmän kuin Laurilla?

8. Mikä on suurin mahdollinen sivujen lukumäärä konveksissa monikulmiossa, jossa on täsmälleen kolme tylppää kulmaa? Anna esimerkki tällaisesta monikulmiosta. Monikulmio on konveksi, jos minkä tahansa kahden reunapisteen välinen jana on kokonaan monikulmion sisällä. Kulma on tylppä, jos se on suurempi kuin 90° ja pienempi kuin 180° . Vastaavasti kulma on terävä, jos se on pienempi kuin 90° . Alla on kuva konveksista monikulmiosta, jossa on yksi tylppä kulma, kaksi terävää kulmaa ja yksi suora kulma.



9. Suorakulmaisen kolmion muotoisen purjeen yläosassa on vaaleanharmaa merkki, joka kertoo veneluokan. Alla olevassa kuvassa $MA + AC = CB + BM$. Jos $BM = 7$ m ja $CB = 5$ m, niin mikä on harmaan merkin yläpuolelle jäävän kolmion korkeus?



10. Jussi sai joululahjaksi robotin, jonka toimintaa hän kokeilee neliömuotoisella matolla. Neliön sivujen pituudet ovat 4 metriä ja sen kulmat ovat järjestyksessä A, B, C ja D . Neliön sisällä olevan pisteen P etäisyys sivuista AB ja BC on tasan 1 metri. Robotti lähtee liikkeelle pisteestä P ja kulkee 2 metriä suoraan satunnaiseen suuntaan pysähtyen paikalleen. Mikä on todennäköisyys, että robotti päättyy ulos matolta?

Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitukset suomeksi: Mika Koskenoja



Jogurttitölkin ravistelun optimointi

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Johdanto

Kun litran jogurttitölkki kaadetaan niin tyhjäksi kuin voidaan ilman erikoistoimenpiteitä, tölkin seinämiin jää vielä jonkin verran jogurttia. Haluttaessa puhdistaa tölkin sisäseinämät jogurtista ennen kartonkikeräykseen laittamista tölkkiin kaadetaan vettä ja ravistellaan. Kuinka paljon vettä tölkkiin tulee kaataa, jotta ravistelu olisi mahdollisimman tehokasta?

Jos tölkki laitetaan täyteen vettä, vesi ei juurikaan pääse liikkumaan tölkin sisällä ravistelun aikana, ja jogurttijäämiin ei kohdistu irrottavaa iskuvaikutusta. Toisaalta, jos vettä on vain vähän tölkin tilavuuteen verrattuna, vesi kyllä pääsee liikkumaan villistikin, mutta mitättömän massan takia veden iskuvaikutus on pieni. Olisiko optimaalinen vesimäärä esimerkiksi puolet tölkin tilavuudesta?

Vapaa-ajan hupipohdinnoissa ei ole järkevää lähestyä problemaa liian järeillä työkaluilla, kuten tällä kertaa virtausmekaniikan monimutkaisten mallien ja varsinkin Navier-Stokes-yhtälöiden kautta. Artikkelissa tarkastellaan äärimmäisen pelkistettyä mallia. Siinä vesi on korvattu kiinteällä kappaleella, joka liukuu jogurttitölkin sisällä tölkin päästä päähän kitkattomasti. Kappaleen lisäksi tölkin sisällä ei ole muuta ainetta, kuten esimerkiksi ilmaa. Tölkki ja kappale ovat suorakulmaisen särmiön muotoisia niin, että kappaleen muoto ja koko vastaavat pystysuoraan tölkkiin kaadettua vesimassaa sen jälkeen, kun veden aaltoilu on tasaan-

tunut. Laskuissa painovoiman vaikutus jätetään huomiotta; ravisteluliike voidaan ajatella keittiön lattian suuntaiseksi.

Tölkkiä edestakaisin ravistettaessa kappale törmää täysin kimmottomasti vuoron perään tölkin pohjaan ja kanteen. Pakotetun edestakaisen liikkeen malliksi otetaan yksinkertaisuuden vuoksi harmoninen värähtely. Ravistelun tehokkuuden mittarina käytetään kappaleen törmäyshetken liike-energiaa tölkin mukana kulkevan koordinaatiston suhteen. Energia on kykyä tehdä työtä, tässä tapauksessa puhdistustyötä. Kun todellisessa tilanteessa vesi törmäyksen voimasta hajoaa erisuuntaisiksi roiskeiksi, nämä roiskeet liike-energiallaan irrottavat jogurtin jäämiä seinämistä. Osa energias- ta muuttuu lämmöksi, ääneksi jne., mutta ravistaja kompensoi häviöt syöttämällä systeemiin lisää liike-energiaa.

Vaikka malli on simppelempi, sen antama tulos on luultavasti tarpeeksi tarkka riittääkseen ohjeeksi keittiöfyysikolle. Lisäksi mallista kumpuaa matemaattisesti mielenkiintoinen raja-arvotehtävä.

Mallin tarkempi esittely

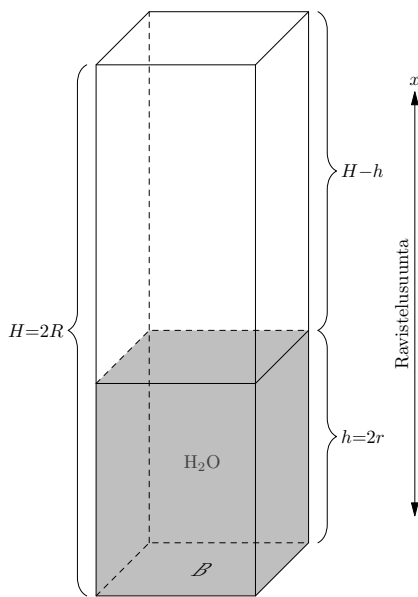
Tölkin ja samalla sen sisällä liukuvan kappaleen pohja olkoot neliön muotoiset. Laskujen kannalta pohjan muoto ei ole tärkeä, kunhan sen ala B on tiedossa ($B < \text{bottom}$). Kappaleen korkeus on $h = 2r$. Se vastaa tölkkiin kaadettua veden syvyyttä. Tölkin korkeus

on $H = 2R$. Osamäärää $h/H = r/R$ sanotaan **täytösuhteeksi**. Oheisissa kuvissa havaittaja on kääntänyt päänsä sellaiseen asentoon, että hänen mielestään tölkkiä liikutetaan pystysuunnassa edestakaisin. Tölkkin keskipisteen paikka $x(t)$ ajan t funktiona piirtää (t, x) -koordinaatistoon sinikäyrän

$$x(t) = A \sin \omega t,$$

missä $A > 0$ on värähdysliikkeen amplitudi, puolet liikkeen ääripäiden välisestä etäisyydestä. Osamäärää R/A kutsutaan **ravistusuhteeksi**. Kun T on värähdysjakson ajallinen pituus, ja $f = 1/T$ on värähtelytaajuus, kulmataajuudella ω (so. montako radiaania sekunnissa) on lauseke

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$



Kuva 1: Tilanne hetkellä $t = 0$, jolloin $x = x(0) = 0$, ja harmaa kappale on kiihdyttänyt tölkin pohjan pakottamana ylöspäin. Mainitulla hetkellä tölkin liike alkaa hidastua. Kappale jatkaa tasaisella nopeudella, jolloin se irttaa tölkin pohjasta. Jossain myöhemmässä vaiheessa kappale törmää tölkin kanteen. Kuvassa x -koordinaatti kasvaa ylöspäin mentäessä.

Tölkkin vauhti eli nopeuden

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

itseisarvo on suurimmillaan, kun $\omega t = n\pi$ eli

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = n \frac{T}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

siis esimerkiksi hetkillä $t = 0$ ja $t = T/2$. Tölkkin kiihtyvyys on

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Se on positiivinen, kun $-\pi < \omega t < 0$ eli kun

$$-\frac{T}{2} < t < 0.$$

Hetkellä $t = 0$ oletetaan, että vettä vastaava kappale on tölkin pohjalla, jolloin kappaleen painopisteen paikka ja nopeus ovat vastaavasti ($w < \text{water}$)

$$x_w(0) = -R + r, \quad v_w(0) = v(0) = A\omega.$$

Välittömästi hetken $t = 0$ jälkeen tölkin liike ylöspäin alkaa hidastua, kun taas kappale jatkaa tasaisella nopeudella $A\omega$ törmätäkseen lopulta tölkin kanteen. Juuri ennen törmäystä kappaleen painopisteen paikkakoordinaatti ja nopeus ovat

$$x_w(t) = -R + r + A\omega t, \quad v_w(t) = A\omega.$$

Ks. kuva 2.

Törmäyksen analyysi

Ensimmäisen törmäyksen tapahtuessa

$$x_w(t) = x(t) + R - r,$$

Sijoittamalla paikkakoordinaattien lausekkeet paikoilleen saadaan yhtälö

$$-R + r + A\omega t = A \sin \omega t + R - r,$$

joka sievenee **törmäysehdoiksi**

$$\omega t - \sin \omega t = \frac{2(R - r)}{A}.$$

Tässä ω , R ja A ovat positiivisia vakioita. Törmäysehto sitoo muuttujat r ja t toisiinsa. Tavoitteena on löytää sellainen muuttujan r arvo, jolla törmäysenergia maksimoituu.

Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi otetaan käyttöön uudet muuttujat

$$\alpha = \omega t \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{2(R - r)}{A},$$

jolloin

$$t = \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{ja} \quad r = R - \frac{A\beta}{2}.$$

Kun määritellään funktio

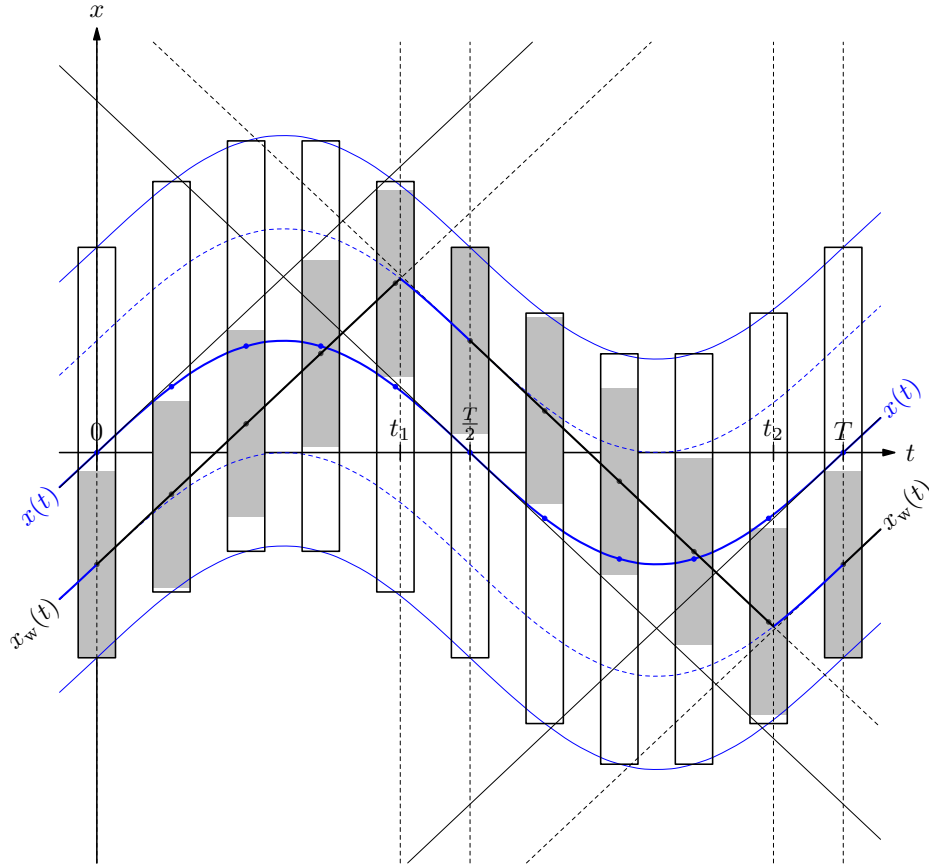
$$\varphi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad \varphi(\alpha) = \alpha - \sin \alpha,$$

törmäysehto saa muodon

$$\varphi(\alpha) = \beta.$$

Funktio φ on jatkuva ja derivoituva. Derivaattaa ja raja-arvoa tutkimalla havaitaan, että φ on aidosti kasvava bijektio. Kappaleen nopeuden muutos törmäys hetkellä t on

$$v(t) - v_w(t) = A\omega \cos \omega t - A\omega = A\omega(\cos \alpha - 1).$$



Kuva 2: Tölkkin paikka $x(t)$ ja sen sisällä liukuvan harmaan kappaleen paikka $x_w(t)$ ajan t funktiona aikavälillä $[0, T]$, siis yhden ravistusjakson aikana. Kappale irttaa tölkkin pohjasta hetkellä $t = 0$, jolloin tölkkin liike ylöspäin alkaa hidastua. Kappale jatkaa tasaisella nopeudella, kunnes törmää tölkkin kanteen hetkellä $t = t_1$. Hetkellä $t = \frac{T}{2}$ tölkkin liike alaspäin alkaa hidastua, ja kappale irttaa tölkkin kannesta jatkaen tasaisella nopeudella, kunnes törmää tölkkin pohjaan hetkellä $t = t_2$ ja irttaa siitä hetkellä $t = T$. Systemin liike toistuu jaksollisena periaatteessa loputtomiin. Kappaleen paikan kuvaaja kulkee vuorotellen sinikäyrää ja sen tangentin suuntaista suoraa pitkin, kun tangentit ajatellaan jakson puolikkaan kokonaisten monikertojen $n \frac{T}{2}$ kohdalle. Kuvassa sinikäyräosuudet on piirretty sinisellä ja suorat osuudet mustalla. Siniset osuudet ovat niin lyhyitä, että niiden kaareutumista on vaikeaa havaita.

Kun ρ on kappaleen tiheys, kappaleen massa on

$$\begin{aligned} m &= 2Br\rho = 2B \left(R - \frac{A\beta}{2} \right) \rho = B\rho(2R - A\beta) \\ &= B\rho(2R - A\varphi(\alpha)). \end{aligned}$$

Kappaleen liike-energia tölkkin suhteen törmäyksen sattuessa¹ on

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m(v(t) - v_w(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} B\rho(2R - A\varphi(\alpha))A^2\omega^2(\cos\alpha - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} A^3\omega^2 B\rho\Phi(\alpha), \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= (2Q - \varphi(\alpha))(\cos\alpha - 1)^2 \\ &= (2Q - \alpha + \sin\alpha)(1 - \cos\alpha)^2, \end{aligned}$$

kun ravistussuhdetta merkitään

$$Q = \frac{R}{A}.$$

Toistaiseksi R ja A ovat vakioita. Täten myös Q on vakio, kunnes toisin mainitaan.

¹Tässä tarkoitetaan liike-energiaa siinä vakionopeudella liikkuvassa koordinaatistossa (inertiaalikoordinaatistossa), jonka nopeus yhtyy tölkkin nopeuteen törmäyshetkellä. Tämän liike-energian käsittäminen törmäysenergiaksi on fyysisesti perusteltu, kun tölkki ja ravistaja ajatellaan suurimassaisena kokonaisuutena, johon massaltaan vähäinen kappale törmää. Ks. [2].

Liike-energian maksimointi

Koska A , ω , B ja ρ ovat vakioita, törmäyksen liike-energia on suurimmillaan, kun $\Phi(\alpha)$ saavuttaa maksiminsa. Vastaava muuttujan α arvo on funktion Φ maksimikohta. Huomaa, että törmäysenergian maksimi-arvo riippuu parametrasta A , mutta maksimikohta riippuu vain ravistussuhteesta Q . Siksi maksimikohdalle käytetään myöhemmin merkintää α_Q .

Aikavälillä $t \geq 0$ pätee $\alpha \geq 0$. Koska

$$\Phi(\alpha + 2\pi) = (2Q - \alpha - 2\pi + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \leq \Phi(\alpha),$$

funktio $\Phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[0, 2\pi[$. Itse asiassa Φ saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[0, \pi]$, mikä näytetään kahdessa osassa seuraavalla tavalla:

Tapauksessa $\pi \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$ on $\frac{\pi}{2} < 2\pi - \alpha \leq \pi$, ja

$$\begin{aligned} & \Phi(2\pi - \alpha) \\ &= (2Q - \underbrace{(2\pi - \alpha)}_{\leq \alpha} + \underbrace{\sin(2\pi - \alpha)}_{\geq 0 \geq \sin \alpha})(1 - \underbrace{\cos(2\pi - \alpha)}_{=\cos \alpha})^2 \\ &\geq (2Q - \alpha + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

Tapauksessa $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi$ on $\frac{\pi}{2} \leq \alpha - \pi < \pi$, ja

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha - \pi) \\ &= (2Q - \underbrace{(\alpha - \pi)}_{< \alpha} + \underbrace{\sin(\alpha - \pi)}_{> 0 > \sin \alpha})(1 - \underbrace{\cos(\alpha - \pi)}_{\leq 0 \leq \cos \alpha})^2 \\ &\geq \underbrace{(2Q - \alpha + \sin \alpha)}_{=2r/A > 0}(1 - \cos \alpha)^2 \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

Väite funktion Φ maksimikohdan sijainnista välillä $[0, \pi]$ tuli näin todistetuksi. Törmäysehdosta ja muuttujan β määritelmästä saadaan toisaalta

$$\alpha = \beta + \sin \alpha \leq \beta + 1 = \frac{2(R-r)}{A} + 1 \leq \frac{2R}{A} + 1 = 2Q + 1.$$

Kun merkitään

$$\bar{\alpha} = \min \{ \pi, 2Q + 1 \},$$

suurimman arvon etsiminen voidaan rajoittaa välille $[0, \bar{\alpha}]$.

Ääriarvotehtävän ratkaiseminen analyttisesti esimerkiksi etsimällä funktion Φ derivaatan nollakohdat näyttää mahdottomalta. Onko se mahdotonta, sitä ei ryhdytä tässä arvailemaan, vaan tyydytään numeeriseen ratkaisuun ja riittävän tarkkaan likiarvoon etenkin, kun itse malli on reaali maailman tilanteen hyvin karkea approksimaatio. Numeerinen ratkaisu tuotetaan seuraavasti:

1) Lue syötteenä ravistussuhde $Q = \frac{R}{A}$.

2) Laske $\bar{\alpha} = \min \{ \pi, 2Q + 1 \}$.

3) Generoi tarpeeksi tiheä tasavälinen pisteistö $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, jolle

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \bar{\alpha}.$$

4) Laske $\Phi(\alpha_1), \dots, \Phi(\alpha_n)$ ja valitse luvuista suurin, olkoon se $\Phi(\alpha_k)$.

5) Laske $\beta_k = \alpha_k - \sin \alpha_k$.

6) Laske ja palauta optimaalinen täyttösuhde

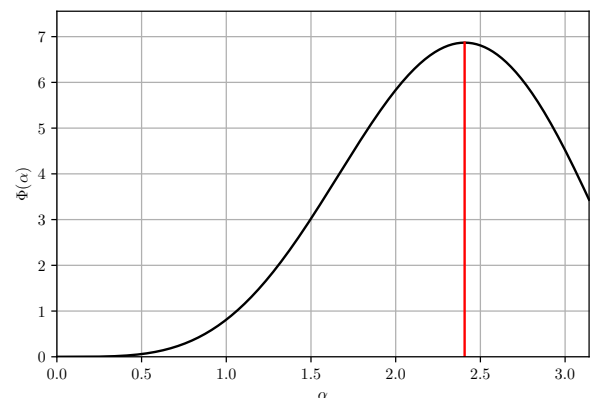
$$\frac{r_k}{R} = 1 - \frac{\beta_k}{2Q}.$$

7) Vastaava ensimmäisen törmäyksen ajankohta muodossa $\frac{t_k}{T} = \frac{\alpha_k}{2\pi}$ saattaa niin ikään olla kiinnostava.

Numeerisesti laskettuja tuloksia

Arkinen ravistustilanne keittiössä

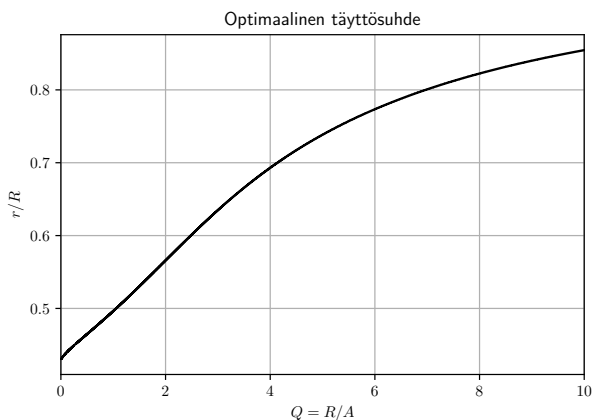
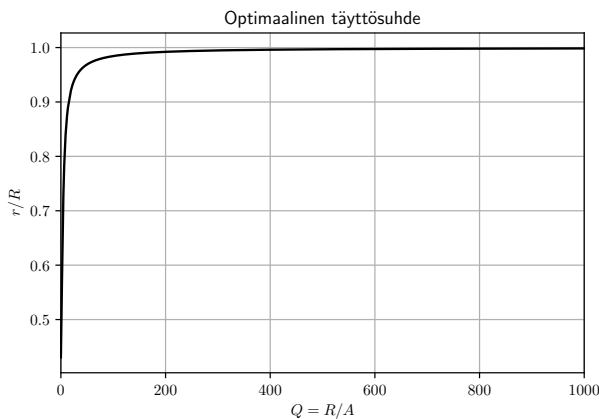
Todellisessa tilanteessa arvioitiin silmämääräisesti, että $Q = 2$. Tällöin $\bar{\alpha} = \pi$. Välille $[0, \pi]$ generoitiin tasavälein $n = 1\,000\,000$ muuttujan α arvoa ja laskettiin vastaavat funktionarvot $\Phi(\alpha)$. Niistä suurin saatiin arvolla $\alpha \approx 2,40690$. Maksimaalisen törmäysenergian antava täyttösuhde on tällöin $r/R \approx 0,56587$. Tulos on hieman suurempi kuin ennakoarvaus 0,5. Optimaalista täyttösuhdetta vastaava ensimmäisen törmäyksen ajankohta on $t/T \approx 0.38307$.



Kuva 3: Funktion Φ kuvaaja välillä $[0, \pi]$, kun ravistussuhde on $Q = R/A = 2$. Maksimikohta $\alpha \approx 2,40690$ on merkitty punaisella.

Optimaalisen täyttösuhteen riippuvuus ravistussuhteesta

Ravistussuhde $Q = R/A$ ajatellaan nyt funktion $\Phi = \Phi_Q$ parametriksi, jonka arvoa muutetaan ja muutoksen vaikutusta tutkitaan. Tietokoneella tehtyjen numeristen laskujen valossa näyttää siltä, että optimaalinen eli maksimaalisen törmäysenergian antava täyttösuhde r/R lähestyy raja-arvonaan ykköstä, kun ravistussuhde Q kasvaa rajatta. Toisaalta, kun ravistussuhde pienenee kohti nollaa, optimitäyttösuhde näyttää laskeutuvan jonkin arvon 0,43 tienoille.



Kuva 4: Törmäysenergian maksimoiva täyttösuhde r/R ravistussuhteen $Q = R/A$ funktiona kahdessa eri skaalassa.

Optimaalisen täyttösuhteen raja-arvo

Mielenkiinnon vuoksi lasketaan vielä optimaalisen täyttösuhteen tarkka raja-arvo, kun ravistussuhde kasvaa rajatta ($Q \rightarrow \infty$) tai lähestyy nollaa ($Q \rightarrow 0+$). Raja-arvoilla tuskin on käytännön merkitystä, sillä kuten eräs kollega totesi, tapauksessa $Q = 10^{-8}$ “tarvitaan pitkäkätinen ravistaja”: jos tölkin korkeuden puolikas on $R = 12$ cm, mikä lienee lähellä reaalimaailman arvoa, ravistusliikkeen amplitudin on oltava tähtitieteellinen $A = 12\,000$ km. Kenties näinkin ulottuvia

ravistajia lymyää maailmankaikkeudessa, mene tiedä. Joka tapauksessa raja-arvot pystytään määrittämään tarkasti ilman, että arvioitavan suureen eli optimaalisen täyttösuhteen lauseketta tunnetaan. Tällainen ei tosin ole mitenkään poikkeuksellista matematiikassa.

Raja-arvo, kun ravistussuhde kasvaa rajatta

Kuvan 4 ensimmäisen käyrän perusteella ehdotetaan optimaalisen täyttösuhteen raja-arvoksi lukua 1 ravistussuhteen kasvaessa rajatta. Näin todellakin on, mikä johtuu siitä, että $\Phi(\alpha)$ saavuttaa maksiminsa, kun $0 \leq \alpha \leq \pi$. Silloin

$$2 \frac{R}{A} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \beta = \alpha - \sin \alpha \leq \alpha \leq \pi.$$

Kun $R/A \rightarrow \infty$, välttämättä $r/R \rightarrow 1$.

Raja-arvo, kun ravistussuhde hiipuu nollaan

Kuvan 4 alemmasta käyrästä luettuna optimaalinen täyttösuhde on noin 0,43 hyvin pienillä ravistussuhteen Q arvoilla. Tarkan raja-arvon määrittämiseksi turvautetaan valmistelujen jälkeen sinin ja kosinin sarjakehitelmiin:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots, \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Kineettisen energian E_k lausekkeessa kertoimet A , ω , B ja ρ ovat rehellisiä positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Klassisessa fysiikassa kineettinen energia on positiivinen reaalityyppinen luku tai nolla. Siksi energian lausekkeessa esiintyvä tekijä

$$\Phi(\alpha) = (2Q - \varphi(\alpha))(1 - \cos \alpha)^2$$

on positiivinen tai nolla. Funktion Φ maksimikohdassa α_Q on voimassa $\Phi(\alpha_Q) > 0$. Tällöin $\varphi(\alpha_Q) < 2Q$. Koska $0 \leq \varphi(\alpha_Q)$, pätee

$$\lim_{Q \rightarrow 0+} \varphi(\alpha_Q) = 0.$$

Tämä on mahdollista vain, jos

$$\lim_{Q \rightarrow 0+} \alpha_Q = 0,$$

sillä φ on aidosti kasvava bijektio $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Ilman tarkempaa tutkimista ei ole poissuljettua, että Φ saavuttaa suurimman arvonsa useassa eri pisteessä samalla ravistussuhteen Q arvolla. Raja-arvoyhtälö pätee kaikille näille maksimikohdille.

Raja-arvolaskuissa erittäin käyttökelpoinen merkintä $\mathcal{O}(1)$ tarkoittaa “maltillista” funktiota, joka ei “räjähdä” nollan ympäristössä. Täsmällisemmin sanottuna

funktio f kuuluu funktioluokkaan $\mathcal{O}(1)$, jos on olemassa sellaiset positiiviset reaali-luvut δ (tyypillisesti pieni) ja M (tyypillisesti iso), että $|f(\alpha)| < M$ aina, kun $0 < \alpha < \delta$. Tällöin on varmaa esimerkiksi se, että

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha f(\alpha)) = 0.$$

Kun funktion f "hienorakenne" on yhdentekevä, lausekkeissa funktion paikalle kirjoitetaan symboli $\mathcal{O}(1)$ sen merkiksi, että funktio on edellä tarkoitettussa mielessä rajoitettu nollan ympäristössä. Merkintätapaa selostetaan yleisemmin Wikipedian sivulla [1]. Jos symboli $\mathcal{O}(1)$ esiintyy laskelmassa tai lausekkeessa useaan kertaan, eri esiintymien takana ei useinkaan ole yksi ja sama funktio. Tähän tottuminen vaatii hieman harjoittelua.

Täytösuhteen raja-arvoon päästään käsiksi sinin sarjakehitelmän

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1)$$

kautta, sillä

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= 1 - \frac{\beta}{2Q} = 1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{2Q} = 1 - \frac{\frac{\alpha^3}{6} - \alpha^5 \mathcal{O}(1)}{2Q} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha^2}{2} \mathcal{O}(1) \right) \frac{\alpha^3}{Q}, \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{\alpha_Q^3}{Q} = \frac{48}{7},$$

kuten kohta osoitetaan. Silloin optimaaliselle täytölle r_Q saadaan raja-arvo

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{r_Q}{R} &= 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{48}{7} = 1 - \frac{48}{84} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \\ &\approx 0,428\,571\,428\,571 \dots = \overline{0,428\,571}. \end{aligned}$$

Lemma

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{\alpha_Q^3}{Q} = \frac{48}{7}.$$

Todistus

Funktio Φ on jatkuva ja derivoituva, joten maksimikohdassa derivaatta häviää. Funktion Φ derivaatta on

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= (-1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \\ &\quad + (2Q - \alpha + \sin \alpha) \cdot 2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= (1 - \cos \alpha) [2 \sin \alpha (2Q - \alpha + \sin \alpha) \\ &\quad - (1 - \cos \alpha)^2]. \end{aligned}$$

Derivaatan eräs nollakohta välillä $[0, \pi]$ on $\alpha = 0$. Muut nollakohdat ratkeavat yhtälöstä

$$(1 - \cos \alpha)^2 = 2 \sin \alpha (2Q - \alpha + \sin \alpha)$$

\Leftrightarrow

$$(1 - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha) = 4Q \sin \alpha.$$

Sinin ja kosinin sarjakehitelmistä

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1), \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^4 \mathcal{O}(1)$$

saadaan

$$\begin{aligned} (1 - \cos \alpha)^2 &= \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha^4 \mathcal{O}(1) \right)^2 = \frac{\alpha^4}{4} + \alpha^6 \mathcal{O}(1), \\ \alpha - \sin \alpha &= \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohtayhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^4}{4} + \alpha^6 \mathcal{O}(1) + 2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \left(\frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \\ = 4Q \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli sievenee lausekkeiksi

$$\frac{\alpha^4}{4} + 2 \frac{\alpha^4}{6} + \alpha^6 \mathcal{O}(1) = \frac{7\alpha^4}{12} + \alpha^6 \mathcal{O}(1).$$

Jakamalla nollakohtayhtälön molemmat puolet luvulla α ja edelleen muokkaamalla yhtälö saadaan muotoon

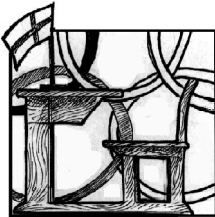
$$\left(\frac{7}{12} + \alpha^2 \mathcal{O}(1) \right) \alpha^3 = 4Q (1 + \alpha^2 \mathcal{O}(1)),$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\alpha^3}{Q} = \frac{4(1 + \alpha^2 \mathcal{O}(1))}{\frac{7}{12} + \alpha^2 \mathcal{O}(1)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{48}{7}. \quad \blacksquare$$

Viitteet

- [1] Wikipedia: *Big O notation*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation
- [2] Wikipedia: *Inelastic collision*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic_collision



Suomen menestys huikeaa Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisissa 2024 Tskaltubossa

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Tskaltubossa Georgiassa huhtikuussa 2024. Georgiassa oli ollut tarkoitus järjestää jo 2021 olympialaiset, mutta ne oli jouduttu järjestämään etätapahtumana koronaolosuhteiden vuoksi.

Suomea edustivat Aino Aulanko, Amelie Hao, Siiri Roschier ja Minea Tiitinen. Aino Aulanko sai kultaa ja Siiri Roschier pronssia. Ainin tulos oli aivan käsittämättömän hyvä. Hän sai 38/42 pistettä, mikä oli paras eurooppalaisen kilpailijan tulos. Koko maailman tuloksisakin edelle meni vain yksi yhdysvaltalainen, Hannah Fox, joka sai 41 pistettä. Tasapisteissä Ainin kanssa oli australialainen Cloris Xu ja yhdysvaltalainen Jessica Wan.

Tehtävät

Tehtävä 1. Taululle on kirjoitettu kaksi eri kokonaislukua u ja v . Tehdään sarja operaatioita. Jokaisessa operaatiossa teemme yhden seuraavista kahdesta operaatiosta:

- Jos a ja b ovat taululla olevia eri kokonaislukuja, taululle voidaan kirjoittaa luku $a + b$, jos se ei ole jo taululla.
- Jos a , b ja c ovat kolme taululla olevaa eri kokonaislukua, ja jos kokonaisluku x toteuttaa $ax^2 + bx + c = 0$, niin luku x voidaan kirjoittaa taululle, jos se ei ole jo taululla.

Määritä kaikki aloituslukuparit (u, v) , joista voidaan kirjoittaa mikä tahansa kokonaisluku taululle äärellisen määrän operaatioita jälkeen.

Tehtävä 2. Tarkastellaan kolmiota ABC , jossa $AC > AB$. Olkoon Ω kolmion ympäri piirretty ympyrä ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä leikkaa sivut BC , CA , AB pisteissä D , E , F , tässä järjestyksessä. Olkoon X ja Y kaksi pistettä sisäänpiirretyn ympyrän lyhyemmällä kaarilla DF ja DE , tässä järjestyksessä, niin että $\angle BXD = \angle DYC$. Leikatkoot suorat XY ja BC pisteessä K . Olkoon T piste ympyrällä Ω siten, että KT on ympyrän Ω tangentti ja T on samalla puolella suoraa BC kuin piste A . Todista, että suorat TD ja AI leikkaavat ympyrällä Ω .

Tehtävä 3. Kutsutaan positiivista kokonaislukua n kummallisiksi, jos mille tahansa luvun n positiiviselle tekijälle d kokonaisluku $d(d+1)$ jakaa $n(n+1)$. Todista, että mille tahansa neljälle kummalliselle positiiviselle kokonaisluvulle A , B , C ja D pätee seuraava:

$$\text{syt}(A, B, C, D) = 1.$$

Tässä $\text{syt}(A, B, C, D)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa kaikki luvuista A , B , C ja D .

Tehtävä 4. Kokonaislukujen jonossa $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ lukupari (a_i, a_j) , jossa $1 \leq i < j \leq n$, on mielenkiintoinen, jos on olemassa kokonaislukupari (a_k, a_ℓ) , jossa $1 \leq k < \ell \leq n$, jolla pätee

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Jokaiselle $n \geq 3$, etsi suurin mahdollinen mielenkiintoisten lukuparien määrä n -pituisessa jonossa.

Tehtävä 5. Olkoon N positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, joilla seuraavat ehdot ovat tosia kaikilla positiivisten kokonaislukujen pareilla (x, y) :

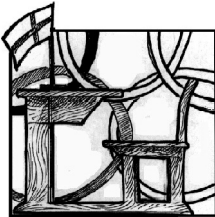
- (i) Luvulla x ja funktion arvolla $f(x)$ on sama määrä positiivisia tekijöitä.
- (ii) Jos x ei ole luvun y tekijä ja y ei ole luvun x tekijä,

niin silloin

$$\text{syt}(f(x), f(y)) > f(\text{syt}(x, y)).$$

Tässä $\text{syt}(m, n)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat m ja n .

Tehtävä 6. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut d , joille on olemassa d -asteinen reaalilukukertoiminen polynomi P , jolla on enintään d eri arvoa joukossa $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$.



Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2024 Bathissa

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Helsingin yliopisto

Kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin Bathissa 11.–22.7.2024. Suomea edustivat Aino Aulanko, Albert Henriksson, Zhongyi Li, Zhiyuan Liu, Artúr Nádor ja Siiri Roschier.

Suomen menestys oli hyvää: Aino Aulanko sai hopeaa, Zhongyi Li pronssia ja lisäksi tuli kolme kunniamainintaa. Aino Aulanko sai lisäksi Maryam Mirzakhani -palkinnon Euroopan parhaasta naispuolisen kilpailijan tuloksesta.

Tehtävät

Tehtävä 1. Määritä kaikki sellaiset reaalityluvut α , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n kokonaisluku

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

on jaollinen luvulla n . (Huomioi, että $\lfloor z \rfloor$ merkitsee suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin z . Esimerkiksi $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ja $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Tehtävä 2. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (a, b) , joilla on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut g ja N , että yhtälö

$$\text{syt}(an + b, bn + a) = g$$

pätee kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. (Huomaa, että $\text{syt}(x, y)$ tarkoittaa lukujen x ja y suurinta yhteistä tekijää.)

Tehtävä 3. Olkoon a_1, a_2, a_3, \dots ääretön positiivisten kokonaislukujen jono ja olkoon N positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että kaikilla $n > N$ arvo a_n on yhtä suuri kuin se lukumäärä, miten monta kertaa a_{n-1} on jonossa a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Osoita, että ainakin toinen jonoista a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on lopulta jaksollinen. (Ääretön jono b_1, b_2, b_3, \dots on lopulta jaksollinen, jos on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut p ja M , että $b_{m+p} = b_m$ kaikilla $m \geq M$.)

Tehtävä 4. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB < AC < BC$. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretty ympyrä ω ja sen keskipiste I . Olkoon X pisteestä C poikkeava piste suoralla BC niin, että pisteen X kautta kulkeva suoran AC suuntainen suora sivuaa ympyrää ω . Vastaavasti olkoon Y pisteestä B poikkeava piste suoralla BC niin, että pisteen Y kautta kulkeva suoran AB suuntainen suora sivuaa ympyrää ω . Leikatkaa suora AI kolmion ABC ympäröivän ympyrän uudelleen pisteessä $P \neq A$. Olkoot K ja L janojen AC ja AB keskipisteet tässä järjestyksessä. Osoita, että $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Tehtävä 5. Turbo-Etana pelaa peliä laudalla, jolla on 2024 riviä ja 2023 saraketta. Laudan 2022 ruudussa piileskelee hirviö. Aluksi Turbo ei tiedä, missä hirviöt ovat, mutta hän tietää, että kaikilla riveillä paitsi ensimmäisellä ja viimeisellä on täsmälleen yksi hirviö ja kussakin sarakkeessa on korkeintaan yksi hirviö.

Turbo yrittää toistuvasti päästä ensimmäiseltä riviltä viimeiselle riville. Jokaisella yrityksellä hän valitsee en-

simmäiseltä riviltä aloitusruudun ja siirtyä aina ruudusta viereiseen ruutuun, eli sellaiseen ruutuun, jolla on yhteinen sivu. (Hän saa siirtyä myös sellaiseen ruutuun, jossa hän on jo käynyt.) Jos hän joutuu ruutuun, jossa on hirviö, niin yritys päättyy, ja Turbo siirretään takaisin lähtöriville seuraavaa yritystä varten. Hirviöt eivät siirry ja Turbo muistaa kaikista käymistään ruuduista, onko niissä hirviö. Jos hän pääsee viimeiselle riville, yritys loppuu ja peli päättyy.

Määritä pienin mahdollinen luvun n arvo niin, että Turbolla on strategia, joka varmistaa, että hän saavuttaa viimeisen rivin viimeistään n . yrityksellä riippumatta siitä, missä hirviöt ovat.

Tehtävä 6. Olkoon Q rationaalilukujen joukko. Funktiota $f : Q \rightarrow Q$ kutsutaan englantilaiseksi, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $x, y \in Q$ pätee

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{tai} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku c , että jokaisella englantilaisella funktiolla f on korkeintaan c eri rationaalilukua, jotka ovat muotoa $f(r) + f(-r)$ jollain rationaaliluvulla r , ja määritä luvun c pienin mahdollinen arvo.

Tehtävien ratkaisusta

Sivulta <https://www.imo2024.uk/solutions> löytyy linkki tehtävien ratkaisuihin. Ei siis käydä tässä tekstissä läpi ratkaisuja, mutta käsitellään tehtävän 5 ratkaisua, sillä tehtävä 5 on sellainen, jota voi lähestyä melko vähäisilläkin esitiedoilla.

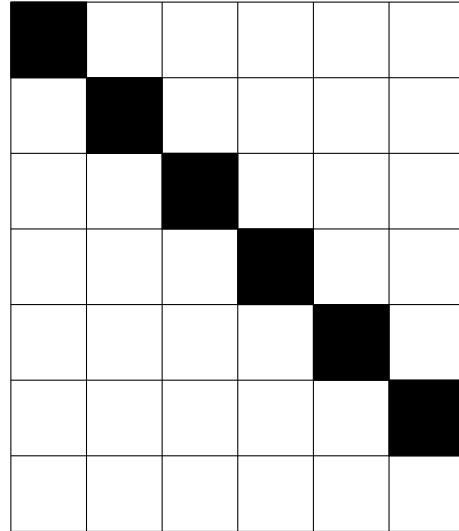
Tehtävän 5 ratkaisu

Olin Suomen joukkueen johtajana ja pääsin lukemaan tehtävään 5 useita hienoja ratkaisuja. Aino Aulanko sai nimittäin tehtävästä täydet ja Zhongyi Liu ja Albert Henriksson saivat 6 pistettä, eli yhden pisteen vaille täydet. Tällöin siis ratkaisu oli oleellisesti ottaen täysin oikein, mutta siinä oli joku pikkuruinen huolimattomuusvirhe tai epätarkkuus.

Loput edustajamme saivat tehtävästä 0 pistettä. Tässä tehtävässä nimittäin on hyvä mahdollisuus ryhtyä ajattelemaan tilannetta ihan liian hankalasti, jolloin ei pääse maaliin.

Tehtävässä ei oikeastaan ole väliä sillä, että laudan mitat ovat 2024 ja 2023 ja että hirviöitä on 2022. Laudan mitat voisivat olla $n + 1$ ja n ja hirviöitä taas $n - 1$, toki pienin varauksin: jos laudan mitat ovat 2 ja 1 ja hirviöitä 0, on tilanne triviaali. Jos taas laudan mitat ovat 3 ja 2 ja hirviöitä 1, niin ensimmäisellä yrityksellä joko pääsee loppuun tai löytää hirviön, jolloin taas toisella yrityksellä pääsee loppuun.

Tehtävässä sen sijaan on kriittistä, että hirviöitä on vähemmän kuin sarakkeita, sillä jos hirviöitä olisi yhtä paljon kuin sarakkeita, niin hirviöt voisivat sijaita ikään kuin diagonaalilla:

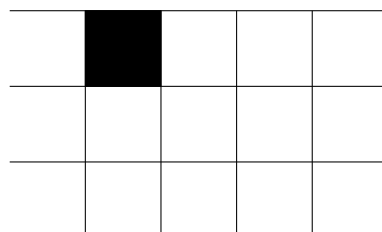


Tällöin Turbo-Etana ei voi milloinkaan päästä loppuun.

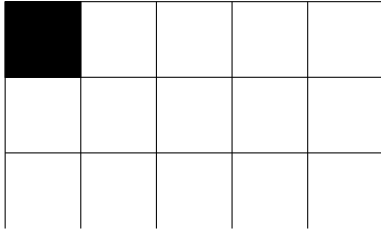
On hämmästyttävää, miten radikaalisti tilanne muuttuu, kun laudalla on yksi hirviö vähemmän. Tällöin itse asiassa riittää kolme yritystä. Perustellaan tämä seuraavaksi. Esittämäni perustelu on ottanut vaikutteita ehkä kaikista lukemistani ratkaisuksista. Niissä on kaikkisatietyt yhteisiä, mutta tietyt yksityiskohdat persoonallisia.

Turbo-Etanen yritykset ovat seuraavat:

1. Etsitään ylin hirviö. Koska hirviöitä on vähemmän kuin rivejä, on mahdollista, että ylimmällä rivillä ei ole hirviötä, eikä välttämättä edes toiseksi ylimmällä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että hirviö löytyi ylimmältä riviltä. Vaihtoehtoja on nyt kaksi: hirviö ei ole laidassa tai hirviö on laidassa, eli jommassa kummassa reunimmaisessa sarakkeessa. Vaihtoehtoiset tilanteet näyttäivät siis tältä:

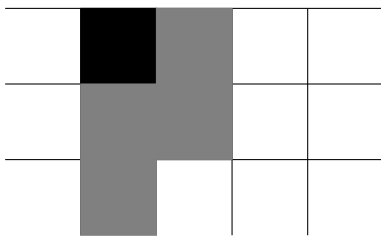


tai



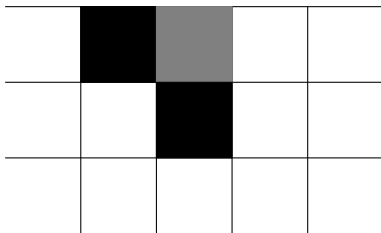
Käsitellään erikseen se tilanne, jossa ensimmäinen hirviö onkin reunassa.

2. Jos ensimmäinen hirviö ei ole reunassa, niin Turbo-Etana laittaa itsensä hirviön viereen ensimmäiselle riville, menee yhden ruudun alas ja kääntyy hirviön alle (Turbo-Etan polku on merkitty harmaalla):



Nyt Turbo-Etana voi jatkaa turvallisesti alas asti, sillä tässä sarakkeessa on jo ylhäällä yksi hirviö, eli niitä ei voi olla muualla.

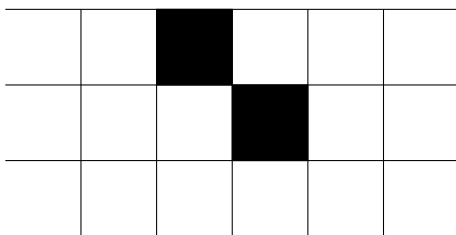
Ainoa mahdollisuus, jossa tämä reitti voi kaatua, on se, jos hirviö löytyykin siitä ruudusta, johon mennään toisella rivillä.



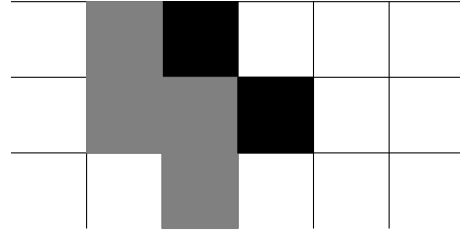
Tässä tilanteessa joudutaan siis kolmanteen yritykseen.

Muiden ruutujen kohdalla alkuperäinen hirviö varmistaa, että niissä ei ole hirviöitä.

3. Nyt tiedämme, että hirviöt ovat seuraavissa paikoissa:

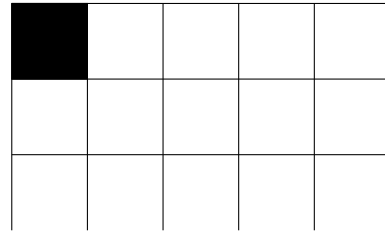


Tällöin seuraavalla reitillä ei voi olla hirviöitä:

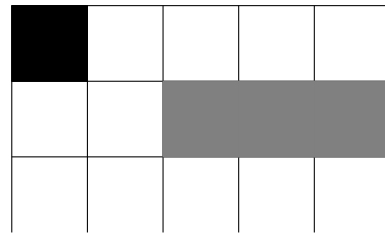


Käsitellään nyt se tilanne, jossa hirviö on laidassa. Voidaan olettaa, että se on vasemmassa reunassa.

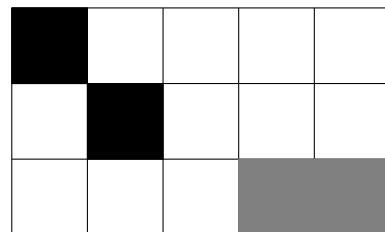
1. Hirviö löydetty:



2. Turbo-Etana kulkee toiselta riviltä kaikki muut ruudut läpi paitsi reunimmaisena (hirviön alla olevan tai sen vieressä olevan). Turbo-Etana siis kulkee seuraavat ruudut läpi:



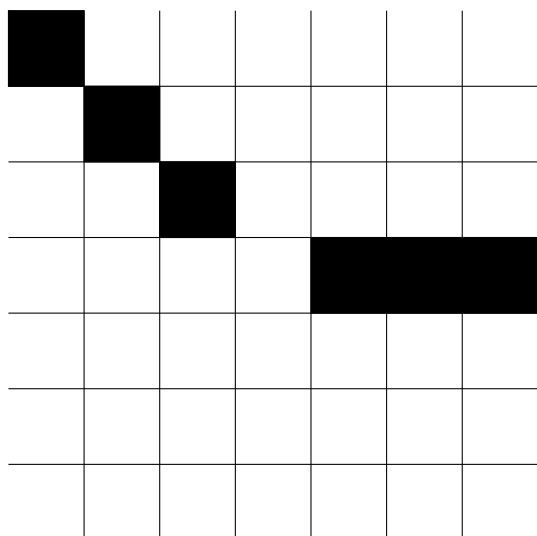
Jos missään ruudussa ei ole hirviötä, niin Turbo-Etana tietää, että joko toisella rivillä ei ole lainkaan hirviötä, tai hirviö on diagonaalilla:



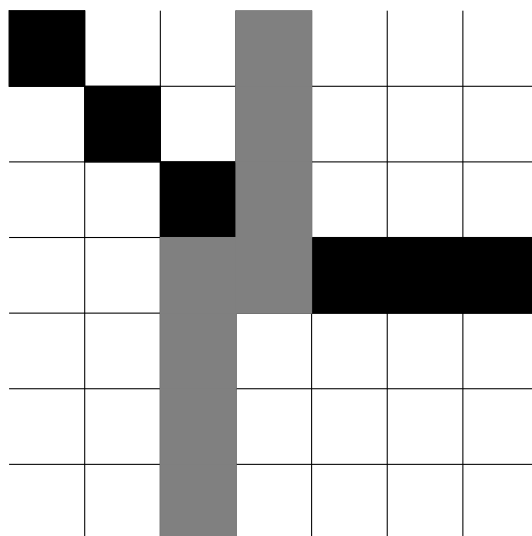
Tässä tilanteessa Turbo-Etana siirtyy kolmannelle riville, mutta jättää väliin ne sarakkeet, joissa hirviö voi olla 1. ja 2. rivillä sekä kolmannen rivin kolmannen ruudun:

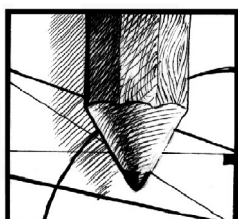
Turbo-Etana jatkaa vastaavasti. Joko hän pääsee loppuun tai törmää jollain rivillä hirviöön.

3. Kolmanteen yritykseen joudutaan vain, jos Turbo-Etana törmää jollain rivillä hirviöön. Tällöin hänen oletuksensa hirviöiden sijainnista on tämä, kun neljännelle riville on merkitty mustalla kaikki mahdolliset ruudut, joissa Turbo on törmännyt hirviöön.



Nyt turvallinen reitti on tämä:





Kulman kolmiajako harppiviivoitinmenetelmällä

Reijo Hautakangas

Johdanto

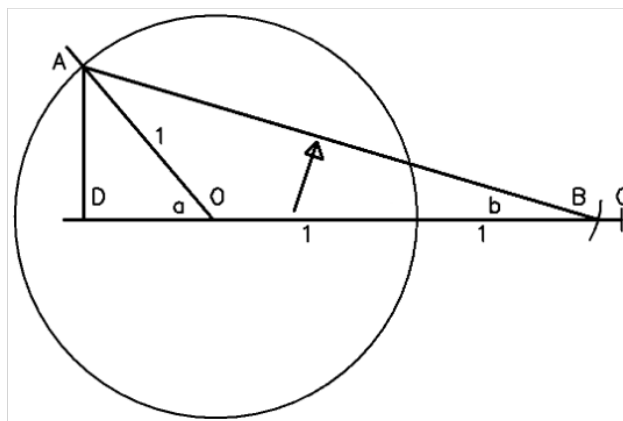
On todistettu, että ei voi löytyä tapaa mielivaltaisen annetun kulman kolmasosan piirtämiseen tarkasti harppiviivoitinmenetelmällä. Tässä ratkaisussa on ollut tavoitteena löytää niin tarkka piirtämistapa tuolle menetelmälle, että vaihteleva piirtämispäätarkkuus jää suurimmaksi ratkaisun virhelähteeksi.

Tässä ratkaisussa syntyvä kuvio muistuttaa jossain määrin erästä Arkhimedeeseen oikeaksi todistettua kulumien kolmisuhdegeometriaa. Tässä on vain 'arvattu' tuolle viistolle kolmasosakulman kyljelle lähes oikea pituus, jolloin vältytään liu'utettavan merkityn viivoittimen käytöltä ja piirtäminen voidaan suorittaa hyväksyttävällä tavalla. Katso aiheesta lisää: https://fi.wikipedia.org/wiki/Kulman_kolmiajako

Piirtämisohje

1. Piirrä ympyrä, jonka keskipisteenä on jaettavan kulman a kärkipiste O . Piste A on ympyrän kehän ja kulman a ylemmän kyljen leikkauspiste.
2. Piirrä jana kohtisuoraan kulman a alemmaa kylkeä vasten pisteestä A pisteeseen D .
3. Jatka kulman a alemmaa kylkeä oikealle säteen verran ohi ympyrän kehän pisteeseen C .
4. Piirrä janan DC pituinen jana alkaen pisteestä A päättyen kulman a alemman kyljen jatkeelle pistee-

seen B . Muodostunut uusi jana on AB ja syntynyt uusi kulma on ABD eli b .



Tulos: Kulma b on kulman a kolmasosa varsin tarkasti. Virhe on $< \frac{1}{3}^\circ$ ja a :n ollessa 90° tulos on jopa täysin tarkka (katso taulukko).

Tarkkuustaulukko

kulma a asteina	kulma $a/3$ asteina	kulma b asteina	virhe %
30	10	10,047	+0,47
45	15	15,142	+0,95
60	20	20,268	+1,34
72	24	24,323	+1,35
81	27	27,259	+0,96
90	30	30	0

Kulman b arvojen laskemiseksi taulukkoa varten muodostetaan trigonometrinen lauseke. Kuvassa on suorakulmainen kolmio AOD , jonka hypotenuusa on ympyrän säde. Merkitään sille pituudeksi luku 1. Tällöin se on myös kuvan yksikkömittajana, josta seuraa janoille pituudet: $AD = 1 \times \sin a$, $DO = 1 \times \cos a$, DC ja $AB = 1 \times \cos a + 2$. Edellisen perusteella saadaan $\sin b$:lle lauseke:

$$\sin b = \frac{\sin a}{\cos a + 2},$$

josta saadaan

$$b = \arcsin\left(\frac{\sin a}{\cos a + 2}\right),$$

jonka tuloksena: $b \approx a/3$, kun $a = 0..90^\circ$.

Muuta

Ratkaisumenetelmän on tarkoitus tuottaa käytäntöön riittävä arvio, eli kun otetaan huomioon piirtämisen aiheuttama epätarkkuus, itse jakomenetelmän virhe peittyi sen alle. Harpilla ja viivaimella ei voi jakaa kulmaa kolmeen osaan, mutta on olemassa työkaluja kulmien kolmiajako varten. Lisäksi kolmiajako onnistuu erikoistapauksissa, kuten 90 asteen kulman tapauksessa. Varsinaisessa kolmiajaon ongelmassa on kysymys geometrisen tehtävän ratkaisemisesta oikealla menetelmällä eikä käytännön piirtämisestä, jossa vanha keksintö astelevy on ollut käytössä. Senkin ovat nykyään cad-ohjelmat syrjäyttäneet esim. tekniikan mekaniikkasuunnittelussa.

Solmu 2/2024

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Julkaisija:

Suomen matemaattinen yhdistys ry

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Verkkosivu:

matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, jatko-opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Tietotekniikan yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, yliopistonlehtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

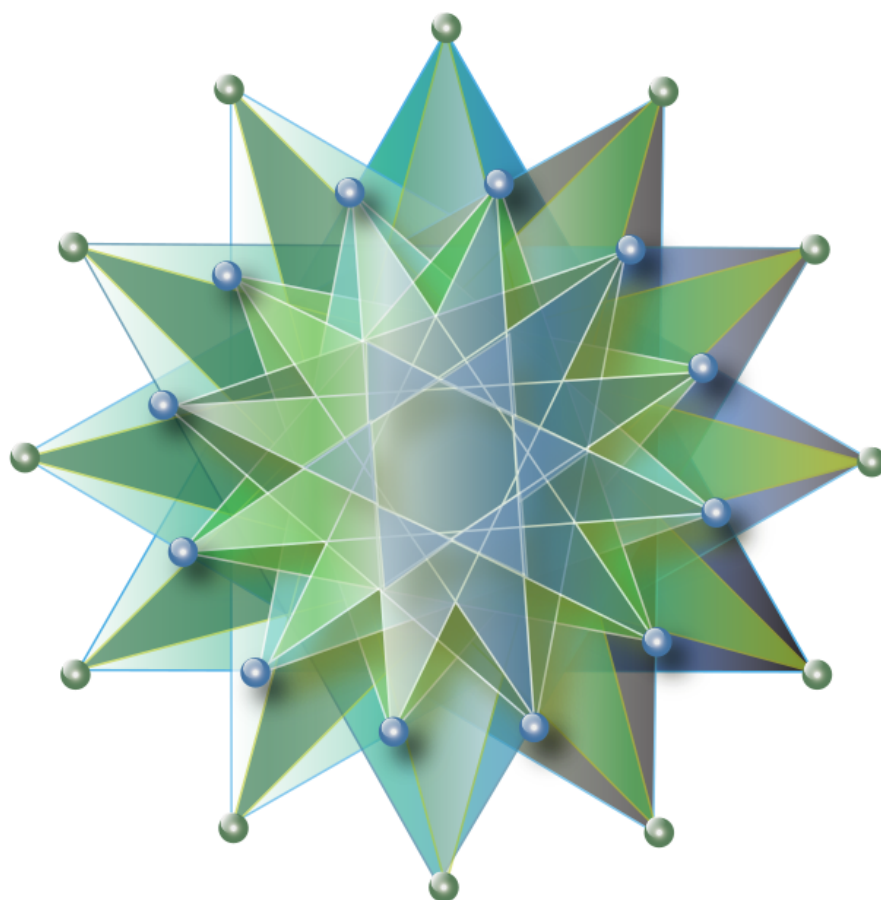
Noora Isoeskelä

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 1/2025 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.3.2025 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI