



Jogurttitölkin ravistelun optimointi

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Johdanto

Kun litran jogurttitölkki kaadetaan niin tyhjäksi kuin voidaan ilman erikoistoimenpiteitä, tölkin seinämiin jää vielä jonkin verran jogurttia. Haluttaessa puhdistaa tölkin sisäseinämät jogurtista ennen kartonkikeräykseen laittamista tölkkiin kaadetaan vettä ja ravistellaan. Kuinka paljon vettä tölkkiin tulee kaataa, jotta ravistelu olisi mahdollisimman tehokasta?

Jos tölkki laitetaan täyteen vettä, vesi ei juurikaan pääse liikkumaan tölkin sisällä ravistelun aikana, ja jogurttijäämiin ei kohdistu irrottavaa iskuvaikutusta. Toisaalta, jos vettä on vain vähän tölkin tilavuuteen verrattuna, vesi kyllä pääsee liikkumaan villistikin, mutta mitättömän massan takia veden iskuvaikutus on pieni. Olisiko optimaalinen vesimäärä esimerkiksi puolet tölkin tilavuudesta?

Vapaa-ajan hupipohdinnoissa ei ole järkevää lähestyä problemaa liian järeillä työkaluilla, kuten tällä kertaa virtausmekaniikan monimutkaisten mallien ja varsinkin Navier-Stokes-yhtälöiden kautta. Artikkelissa tarkastellaan äärimmäisen pelkistettyä mallia. Siinä vesi on korvattu kiinteällä kappaleella, joka liukuu jogurttitölkin sisällä tölkin päästä päähän kitkattomasti. Kappaleen lisäksi tölkin sisällä ei ole muuta ainetta, kuten esimerkiksi ilmaa. Tölkki ja kappale ovat suorakulmaisen särmiön muotoisia niin, että kappaleen muoto ja koko vastaavat pystysuoraan tölkkiin kaadettua vesimassaa sen jälkeen, kun veden aaltoilu on tasaan-

tunut. Laskuissa painovoiman vaikutus jätetään huomiotta; ravisteluliike voidaan ajatella keittiön lattian suuntaiseksi.

Tölkkiä edestakaisin ravistettaessa kappale törmää täysin kimmottomasti vuoron perään tölkin pohjaan ja kanteen. Pakotetun edestakaisen liikkeen malliksi otetaan yksinkertaisuuden vuoksi harmoninen värähtely. Ravistelun tehokkuuden mittarina käytetään kappaleen törmäyshetken liike-energiaa tölkin mukana kulkevan koordinaatiston suhteen. Energia on kykyä tehdä työtä, tässä tapauksessa puhdistustyötä. Kun todellisessa tilanteessa vesi törmäyksen voimasta hajoaa erisuuntaisiksi roiskeiksi, nämä roiskeet liike-energiallaan irrottavat jogurtin jäämiä seinämistä. Osa energias- ta muuttuu lämmöksi, ääneksi jne., mutta ravistaja kompensoi häviöt syöttämällä systeemiin lisää liike-energiaa.

Vaikka malli on simppelempi, sen antama tulos on luultavasti tarpeeksi tarkka riittääkseen ohjeeksi keittiöfyysikolle. Lisäksi mallista kumpuaa matemaattisesti mielenkiintoinen raja-arvotettava.

Mallin tarkempi esittely

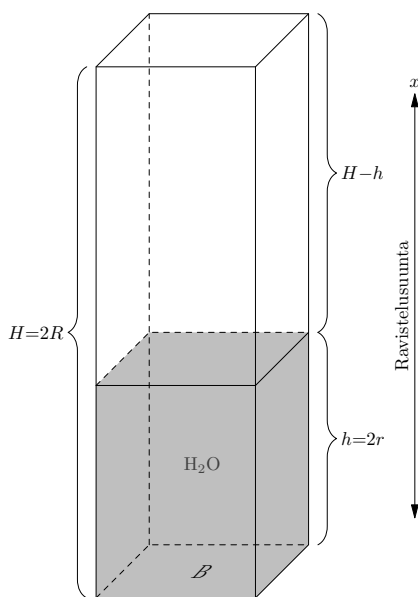
Tölkin ja samalla sen sisällä liukuvan kappaleen pohja olkoot neliön muotoiset. Laskujen kannalta pohjan muoto ei ole tärkeä, kunhan sen ala B on tiedossa ($B < \text{bottom}$). Kappaleen korkeus on $h = 2r$. Se vastaa tölkkiin kaadettua veden syvyyttä. Tölkin korkeus

on $H = 2R$. Osamäärää $h/H = r/R$ sanotaan **täytösuhteeksi**. Oheisissa kuvissa havaitsija on kääntänyt päänsä sellaiseen asentoon, että hänen mielestään tölkkiä liikutetaan pystysuunnassa edestakaisin. Tölkkin keskipisteen paikka $x(t)$ ajan t funktiona piirtää (t, x) -koordinaatistoon sinikäyrän

$$x(t) = A \sin \omega t,$$

missä $A > 0$ on värähdysliikkeen amplitudi, puolet liikkeen ääripäiden välisestä etäisyydestä. Osamäärää R/A kutsutaan **ravistusuhteeksi**. Kun T on värähdysjakson ajallinen pituus, ja $f = 1/T$ on värähtelytaajuus, kulmataajuudella ω (so. montako radiaania sekunnissa) on lauseke

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$



Kuva 1: Tilanne hetkellä $t = 0$, jolloin $x = x(0) = 0$, ja harmaa kappale on kiihdyttänyt tölkin pohjan pakottamana ylöspäin. Mainitulla hetkellä tölkin liike alkaa hidastua. Kappale jatkaa tasaisella nopeudella, jolloin se irtaoo tölkin pohjasta. Jossain myöhemmässä vaiheessa kappale törmää tölkin kanteen. Kuvassa x -koordinaatti kasvaa ylöspäin mentäessä.

Tölkkin vauhti eli nopeuden

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

itseisarvo on suurimmillaan, kun $\omega t = n\pi$ eli

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = n \frac{T}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

siis esimerkiksi hetkillä $t = 0$ ja $t = T/2$. Tölkkin kiihtyvyys on

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Se on positiivinen, kun $-\pi < \omega t < 0$ eli kun

$$-\frac{T}{2} < t < 0.$$

Hetkellä $t = 0$ oletetaan, että vettä vastaava kappale on tölkin pohjalla, jolloin kappaleen painopisteen paikka ja nopeus ovat vastaavasti ($w < \text{water}$)

$$x_w(0) = -R + r, \quad v_w(0) = v(0) = A\omega.$$

Välittömästi hetken $t = 0$ jälkeen tölkin liike ylöspäin alkaa hidastua, kun taas kappale jatkaa tasaisella nopeudella $A\omega$ törmätäkseen lopulta tölkin kanteen. Juuri ennen törmäystä kappaleen painopisteen paikkakoordinaatti ja nopeus ovat

$$x_w(t) = -R + r + A\omega t, \quad v_w(t) = A\omega.$$

Ks. kuva 2.

Törmäyksen analyysi

Ensimmäisen törmäyksen tapahtuessa

$$x_w(t) = x(t) + R - r,$$

Sijoittamalla paikkakoordinaattien lausekkeet paikoilleen saadaan yhtälö

$$-R + r + A\omega t = A \sin \omega t + R - r,$$

joka sievenee **törmäysehdoksi**

$$\omega t - \sin \omega t = \frac{2(R - r)}{A}.$$

Tässä ω , R ja A ovat positiivisia vakioita. Törmäysehto sitoo muuttujat r ja t toisiinsa. Tavoitteena on löytää sellainen muuttujan r arvo, jolla törmäysenergia maksimoituu.

Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi otetaan käyttöön uudet muuttujat

$$\alpha = \omega t \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{2(R - r)}{A},$$

jolloin

$$t = \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{ja} \quad r = R - \frac{A\beta}{2}.$$

Kun määritellään funktio

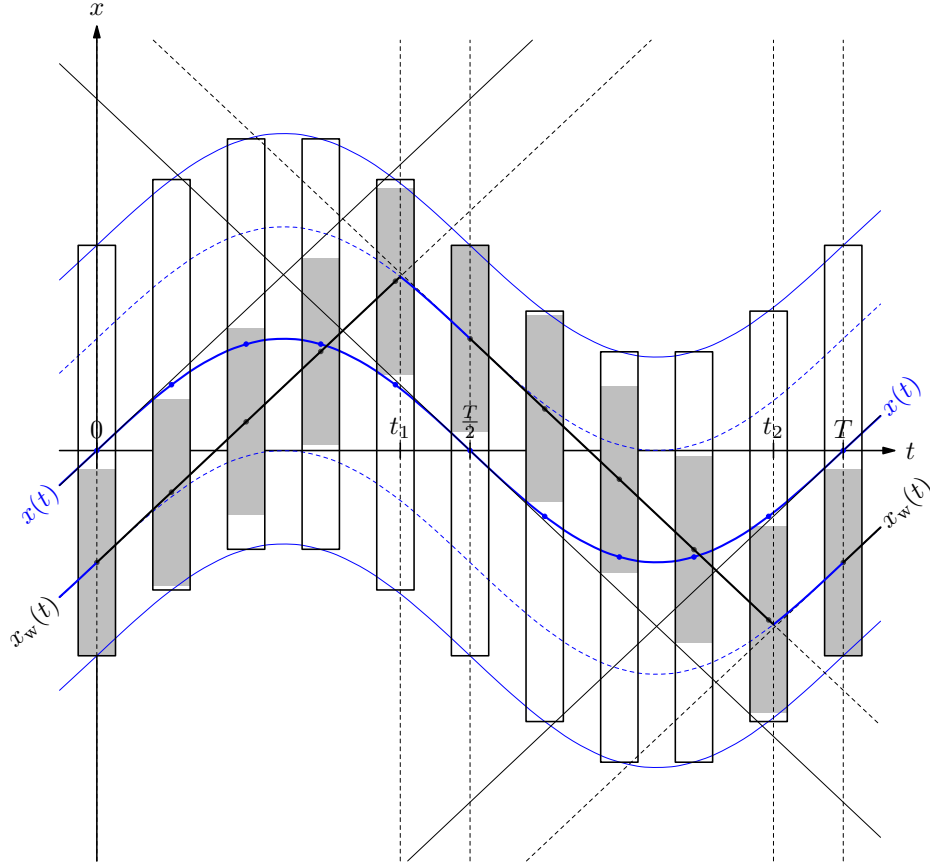
$$\varphi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad \varphi(\alpha) = \alpha - \sin \alpha,$$

törmäysehto saa muodon

$$\varphi(\alpha) = \beta.$$

Funktio φ on jatkuva ja derivoituva. Derivaattaa ja raja-arvoa tutkimalla havaitaan, että φ on aidosti kasvava bijektio. Kappaleen nopeuden muutos törmäys hetkellä t on

$$v(t) - v_w(t) = A\omega \cos \omega t - A\omega = A\omega(\cos \alpha - 1).$$



Kuva 2: Tölkkin paikka $x(t)$ ja sen sisällä liukuvan harmaan kappaleen paikka $x_w(t)$ ajan t funktiona aikavälillä $[0, T]$, siis yhden ravistusjakson aikana. Kappale irtoa tölkkin pohjasta hetkellä $t = 0$, jolloin tölkkin liike ylöspäin alkaa hidastua. Kappale jatkaa tasaisella nopeudella, kunnes törmää tölkkin kanteen hetkellä $t = t_1$. Hetkellä $t = \frac{T}{2}$ tölkkin liike alaspäin alkaa hidastua, ja kappale irtoa tölkkin kannesta jatkaen tasaisella nopeudella, kunnes törmää tölkkin pohjaan hetkellä $t = t_2$ ja irtoa siitä hetkellä $t = T$. Systeemin liike toistuu jaksollisena periaatteessa loputtomiin. Kappaleen paikan kuvaaja kulkee vuorotellen sinikäyrää ja sen tangentin suuntaista suoraa pitkin, kun tangentit ajatellaan jakson puolikkaan kokonaisten monikertojen $n \frac{T}{2}$ kohdalle. Kuvassa sinikäyräosuudet on pöyrretty sinisellä ja suorat osuudet mustalla. Siniset osuudet ovat niin lyhyitä, että niiden kaareutumista on vaikeaa havaita.

Kun ρ on kappaleen tiheys, kappaleen massa on

$$\begin{aligned} m &= 2Br\rho = 2B \left(R - \frac{A\beta}{2} \right) \rho = B\rho(2R - A\beta) \\ &= B\rho(2R - A\varphi(\alpha)). \end{aligned}$$

Kappaleen liike-energia tölkkin suhteen törmäyksen sattuessa¹ on

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m(v(t) - v_w(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} B\rho(2R - A\varphi(\alpha))A^2\omega^2(\cos \alpha - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2} A^3\omega^2 B\rho \Phi(\alpha), \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= (2Q - \varphi(\alpha))(\cos \alpha - 1)^2 \\ &= (2Q - \alpha + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)^2, \end{aligned}$$

kun ravistussuhdetta merkitään

$$Q = \frac{R}{A}.$$

Toistaiseksi R ja A ovat vakioita. Täten myös Q on vakio, kunnes toisin mainitaan.

¹Tässä tarkoitetaan liike-energiaa siinä vakionopeudella liikkuvassa koordinaatistossa (inertiaalikoordinaatistossa), jonka nopeus yhtyy tölkkin nopeuteen törmäyshetkellä. Tämän liike-energian käsittäminen törmäysenergiaksi on fyysisesti perusteltu, kun tölkki ja ravistaja ajatellaan suurimassaisena kokonaisuutena, johon massaltaan vähäinen kappale törmää. Ks. [2].

Liike-energian maksimointi

Koska A , ω , B ja ρ ovat vakioita, törmäyksen liike-energia on suurimmillaan, kun $\Phi(\alpha)$ saavuttaa maksiminsa. Vastaava muuttujan α arvo on funktion Φ maksimikohta. Huomaa, että törmäysenergian maksimi-arvo riippuu parametrasta A , mutta maksimikohta riippuu vain ravistussuhteesta Q . Siksi maksimikohdalle käytetään myöhemmin merkintää α_Q .

Aikavälillä $t \geq 0$ pätee $\alpha \geq 0$. Koska

$$\Phi(\alpha + 2\pi) = (2Q - \alpha - 2\pi + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \leq \Phi(\alpha),$$

funktio $\Phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[0, 2\pi[$. Itse asiassa Φ saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[0, \pi]$, mikä näytetään kahdessa osassa seuraavalla tavalla:

Tapauksessa $\pi \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$ on $\frac{\pi}{2} < 2\pi - \alpha \leq \pi$, ja

$$\begin{aligned} & \Phi(2\pi - \alpha) \\ &= (2Q - \underbrace{(2\pi - \alpha)}_{\leq \alpha} + \underbrace{\sin(2\pi - \alpha)}_{\geq 0 \geq \sin \alpha})(1 - \underbrace{\cos(2\pi - \alpha)}_{=\cos \alpha})^2 \\ &\geq (2Q - \alpha + \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

Tapauksessa $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi$ on $\frac{\pi}{2} \leq \alpha - \pi < \pi$, ja

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha - \pi) \\ &= (2Q - \underbrace{(\alpha - \pi)}_{< \alpha} + \underbrace{\sin(\alpha - \pi)}_{> 0 > \sin \alpha})(1 - \underbrace{\cos(\alpha - \pi)}_{\leq 0 \leq \cos \alpha})^2 \\ &\geq \underbrace{(2Q - \alpha + \sin \alpha)}_{=2r/A > 0}(1 - \cos \alpha)^2 \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

Väite funktion Φ maksimikohdan sijainnista välillä $[0, \pi]$ tuli näin todistetuksi. Törmäysehdosta ja muuttujan β määritelmästä saadaan toisaalta

$$\alpha = \beta + \sin \alpha \leq \beta + 1 = \frac{2(R-r)}{A} + 1 \leq \frac{2R}{A} + 1 = 2Q + 1.$$

Kun merkitään

$$\bar{\alpha} = \min \{ \pi, 2Q + 1 \},$$

suurimman arvon etsiminen voidaan rajoittaa välille $[0, \bar{\alpha}]$.

Ääriarvotehtävän ratkaiseminen analyttisesti esimerkiksi etsimällä funktion Φ derivaatan nollakohdat näyttää mahdottomalta. Onko se mahdotonta, sitä ei ryhdytä tässä arvailemaan, vaan tyydytään numeeriseen ratkaisuun ja riittävän tarkkaan likiarvoon etenkin, kun itse malli on reaali maailman tilanteen hyvin karkea approksimaatio. Numeerinen ratkaisu tuotetaan seuraavasti:

1) Lue syötteenä ravistussuhde $Q = \frac{R}{A}$.

2) Laske $\bar{\alpha} = \min \{ \pi, 2Q + 1 \}$.

3) Generoi tarpeeksi tiheä tasavälinen pisteistö $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, jolle

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \bar{\alpha}.$$

4) Laske $\Phi(\alpha_1), \dots, \Phi(\alpha_n)$ ja valitse luvuista suurin, olkoon se $\Phi(\alpha_k)$.

5) Laske $\beta_k = \alpha_k - \sin \alpha_k$.

6) Laske ja palauta optimaalinen täyttösuhde

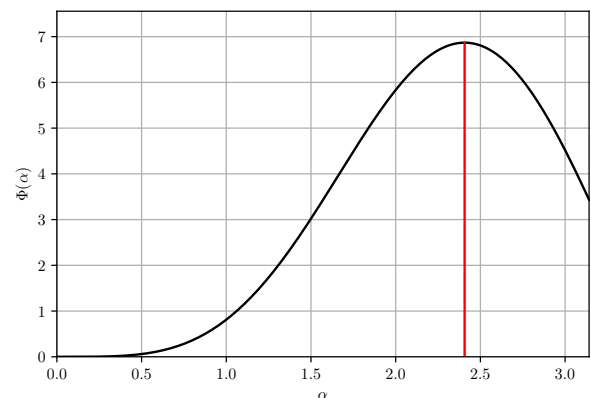
$$\frac{r_k}{R} = 1 - \frac{\beta_k}{2Q}.$$

7) Vastaava ensimmäisen törmäyksen ajankohta muodossa $\frac{t_k}{T} = \frac{\alpha_k}{2\pi}$ saattaa niin ikään olla kiinnostava.

Numeerisesti laskettuja tuloksia

Arkinen ravistustilanne keittiössä

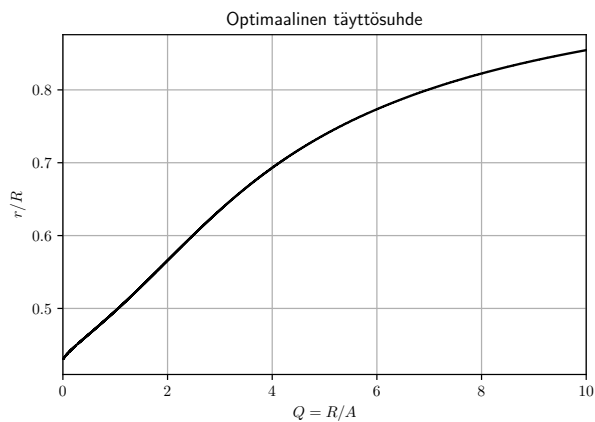
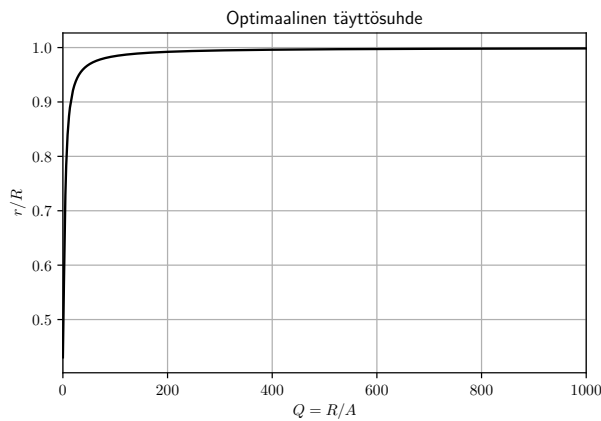
Todellisessa tilanteessa arvioitiin silmämääräisesti, että $Q = 2$. Tällöin $\bar{\alpha} = \pi$. Välille $[0, \pi]$ generoitiin tasavälein $n = 1\,000\,000$ muuttujan α arvoa ja laskettiin vastaavat funktionarvot $\Phi(\alpha)$. Niistä suurin saatiin arvolla $\alpha \approx 2,40690$. Maksimaalisen törmäysenergian antava täyttösuhde on tällöin $r/R \approx 0,56587$. Tulos on hieman suurempi kuin ennakoarvaus 0,5. Optimaalista täyttösuhdetta vastaava ensimmäisen törmäyksen ajankohta on $t/T \approx 0.38307$.



Kuva 3: Funktion Φ kuvaaja välillä $[0, \pi]$, kun ravistussuhde on $Q = R/A = 2$. Maksimikohta $\alpha \approx 2,40690$ on merkitty punaisella.

Optimaalisen täyttösuhteen riippuvuus ravistussuhteesta

Ravistussuhde $Q = R/A$ ajatellaan nyt funktion $\Phi = \Phi_Q$ parametriksi, jonka arvoa muutetaan ja muutoksen vaikutusta tutkitaan. Tietokoneella tehtyjen numeristen laskujen valossa näyttää siltä, että optimaalinen eli maksimaalisen törmäysenergian antava täyttösuhde r/R lähestyy raja-arvonaan ykköstä, kun ravistussuhde Q kasvaa rajatta. Toisaalta, kun ravistussuhde pienenee kohti nollaa, optimitäyttösuhde näyttää laskeutuvan jonkin arvon 0,43 tienoille.



Kuva 4: Törmäysenergian maksimoiva täyttösuhde r/R ravistussuhteen $Q = R/A$ funktiona kahdessa eri skaalassa.

Optimaalisen täyttösuhteen raja-arvo

Mielenkiinnon vuoksi lasketaan vielä optimaalisen täyttösuhteen tarkka raja-arvo, kun ravistussuhde kasvaa rajatta ($Q \rightarrow \infty$) tai lähestyy nollaa ($Q \rightarrow 0+$). Raja-arvoilla tuskin on käytännön merkitystä, sillä kuten eräs kollega totesi, tapauksessa $Q = 10^{-8}$ "tarvitaan pitkäkätinen ravistaja": jos tölkin korkeuden puolikas on $R = 12$ cm, mikä lienee lähellä reaalimaailman arvoa, ravistusliikkeen amplitudin on oltava tähtitieteellinen $A = 12\,000$ km. Kenties näinkin ulottuvia

ravistajia lymyää maailmankaikkeudessa, mene tiedä. Joka tapauksessa raja-arvot pystytään määrittämään tarkasti ilman, että arvioitavan suureen eli optimaalisen täyttösuhteen lauseketta tunnetaan. Tällainen ei tosin ole mitenkään poikkeuksellista matematiikassa.

Raja-arvo, kun ravistussuhde kasvaa rajatta

Kuvan 4 ensimmäisen käyrän perusteella ehdotetaan optimaalisen täyttösuhteen raja-arvoksi lukua 1 ravistussuhteen kasvaessa rajatta. Näin todellakin on, mikä johtuu siitä, että $\Phi(\alpha)$ saavuttaa maksiminsa, kun $0 \leq \alpha \leq \pi$. Silloin

$$2 \frac{R}{A} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \beta = \alpha - \sin \alpha \leq \alpha \leq \pi.$$

Kun $R/A \rightarrow \infty$, välttämättä $r/R \rightarrow 1$.

Raja-arvo, kun ravistussuhde hiipuu nollaan

Kuvan 4 alemmasta käyrästä luettuna optimaalinen täyttösuhde on noin 0,43 hyvin pienillä ravistussuhteen Q arvoilla. Tarkan raja-arvon määrittämiseksi turvautaan valmistelujen jälkeen sinin ja kosinin sarjakehitelmiin:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots, \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Kineettisen energian E_k lausekkeessa kertoimet A , ω , B ja ρ ovat rehellisiä positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Klassisessa fysiikassa kineettinen energia on positiivinen reaalityyppinen luku tai nolla. Siksi energian lausekkeessa esiintyvä tekijä

$$\Phi(\alpha) = (2Q - \varphi(\alpha))(1 - \cos \alpha)^2$$

on positiivinen tai nolla. Funktion Φ maksimikohdassa α_Q on voimassa $\Phi(\alpha_Q) > 0$. Tällöin $\varphi(\alpha_Q) < 2Q$. Koska $0 \leq \varphi(\alpha_Q)$, pätee

$$\lim_{Q \rightarrow 0+} \varphi(\alpha_Q) = 0.$$

Tämä on mahdollista vain, jos

$$\lim_{Q \rightarrow 0+} \alpha_Q = 0,$$

sillä φ on aidosti kasvava bijektio $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Ilman tarkempaa tutkimista ei ole poissuljettua, että Φ saavuttaa suurimman arvonsa useassa eri pisteessä samalla ravistussuhteen Q arvolla. Raja-arvoyhtälö pätee kaikille näille maksimikohdille.

Raja-arvolaskuissa erittäin käyttökelpoinen merkintä $\mathcal{O}(1)$ tarkoittaa "maltillista" funktiota, joka ei "räjähdä" nollan ympäristössä. Täsmällisemmin sanottuna

funktio f kuuluu funktioluokkaan $\mathcal{O}(1)$, jos on olemassa sellaiset positiiviset reaali-luvut δ (tyypillisesti pieni) ja M (tyypillisesti iso), että $|f(\alpha)| < M$ aina, kun $0 < \alpha < \delta$. Tällöin on varmaa esimerkiksi se, että

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha f(\alpha)) = 0.$$

Kun funktion f "hienorakenne" on yhdentekevä, lausekkeissa funktion paikalle kirjoitetaan symboli $\mathcal{O}(1)$ sen merkiksi, että funktio on edellä tarkoitettussa mielessä rajoitettu nollan ympäristössä. Merkintätapaa selostetaan yleisemmin Wikipedian sivulla [1]. Jos symboli $\mathcal{O}(1)$ esiintyy laskelmassa tai lausekkeessa useaan kertaan, eri esiintymien takana ei useinkaan ole yksi ja sama funktio. Tähän tottuminen vaatii hieman harjoittelua.

Täytösuhteen raja-arvoon päästään käsiksi sinin sarjakehitelmän

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1)$$

kautta, sillä

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= 1 - \frac{\beta}{2Q} = 1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{2Q} = 1 - \frac{\frac{\alpha^3}{6} - \alpha^5 \mathcal{O}(1)}{2Q} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha^2}{2} \mathcal{O}(1) \right) \frac{\alpha^3}{Q}, \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{\alpha_Q^3}{Q} = \frac{48}{7},$$

kuten kohta osoitetaan. Silloin optimaaliselle täytölle r_Q saadaan raja-arvo

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{r_Q}{R} &= 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{48}{7} = 1 - \frac{48}{84} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \\ &\approx 0,428\,571\,428\,571 \dots = \overline{0,428\,571}. \end{aligned}$$

Lemma

$$\lim_{Q \rightarrow 0^+} \frac{\alpha_Q^3}{Q} = \frac{48}{7}.$$

Todistus

Funktio Φ on jatkuva ja derivoituva, joten maksimikohdassa derivaatta häviää. Funktion Φ derivaatta on

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= (-1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)^2 \\ &\quad + (2Q - \alpha + \sin \alpha) \cdot 2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= (1 - \cos \alpha)[2 \sin \alpha (2Q - \alpha + \sin \alpha) \\ &\quad - (1 - \cos \alpha)^2]. \end{aligned}$$

Derivaatan eräs nollakohta välillä $[0, \pi]$ on $\alpha = 0$. Muut nollakohdat ratkeavat yhtälöstä

$$(1 - \cos \alpha)^2 = 2 \sin \alpha (2Q - \alpha + \sin \alpha)$$

\Leftrightarrow

$$(1 - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha (\alpha - \sin \alpha) = 4Q \sin \alpha.$$

Sinin ja kosinin sarjakehitelmistä

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1), \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^4 \mathcal{O}(1)$$

saadaan

$$\begin{aligned} (1 - \cos \alpha)^2 &= \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha^4 \mathcal{O}(1) \right)^2 = \frac{\alpha^4}{4} + \alpha^6 \mathcal{O}(1), \\ \alpha - \sin \alpha &= \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohtayhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^4}{4} + \alpha^6 \mathcal{O}(1) + 2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \left(\frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \\ = 4Q \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^5 \mathcal{O}(1) \right) \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli sievenee lausekkeiksi

$$\frac{\alpha^4}{4} + 2 \frac{\alpha^4}{6} + \alpha^6 \mathcal{O}(1) = \frac{7\alpha^4}{12} + \alpha^6 \mathcal{O}(1).$$

Jakamalla nollakohtayhtälön molemmat puolet luvulla α ja edelleen muokkaamalla yhtälö saadaan muotoon

$$\left(\frac{7}{12} + \alpha^2 \mathcal{O}(1) \right) \alpha^3 = 4Q (1 + \alpha^2 \mathcal{O}(1)),$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\alpha^3}{Q} = \frac{4(1 + \alpha^2 \mathcal{O}(1))}{\frac{7}{12} + \alpha^2 \mathcal{O}(1)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{48}{7}. \quad \blacksquare$$

Viitteet

- [1] Wikipedia: *Big O notation*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation
- [2] Wikipedia: *Inelastic collision*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Inelastic_collision