

## Kulman kolmiajako harppiviivoitinmenetelmällä

*Reijo Hautakangas*

### Johdanto

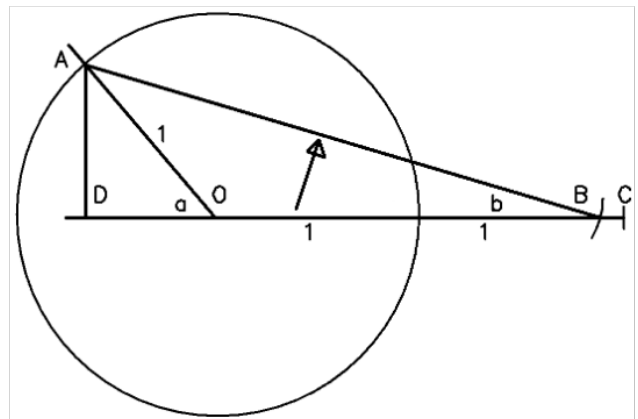
On todistettu, että ei voi löytyä tapaa mielivaltaisen annetun kulman kolmasosan piirtämiseen tarkasti harppiviivoitinmenetelmällä. Tässä ratkaisussa on ollut tavoitteena löytää niin tarkka piirtämistapa tuolle menetelmälle, että vaihteleva piirtämispätarkkuus jää suurimmaksi ratkaisun virhelähteeksi.

Tässä ratkaisussa syntyvä kuvio muistuttaa jossain määrin erästä Arkhimedeen oikeaksi todistettua kulumien kolmisuhdegeometriaa. Tässä on vain 'arvattu' tuolle viistolle kolmasosakulman kyljelle lähes oikea pituus, jolloin vältytään liu'utettavan merkityn viivoittimen käytöltä ja piirtäminen voidaan suorittaa hyväksyttävällä tavalla. Katso aiheesta lisää: [https://fi.wikipedia.org/wiki/Kulman\\_kolmiajako](https://fi.wikipedia.org/wiki/Kulman_kolmiajako)

### Piirtämisohje

1. Piirrä ympyrä, jonka keskipisteenä on jaettavan kulman  $a$  kärkipiste  $O$ . Piste  $A$  on ympyrän kehän ja kulman  $a$  ylemmän kyljen leikkauspiste.
2. Piirrä jana kohtisuoraan kulman  $a$  alemmaa kylkeä vasten pisteestä  $A$  pisteeseen  $D$ .
3. Jatka kulman  $a$  alemmaa kylkeä oikealle säteen verran ohi ympyrän kehän pisteeseen  $C$ .
4. Piirrä janan  $DC$  pituinen jana alkuen pisteestä  $A$  päättyen kulman  $a$  alemman kyljen jatkeelle pistee-

seen  $B$ . Muodostunut uusi jana on  $AB$  ja syntynyt uusi kulma on  $ABD$  eli  $b$ .



Tulos: Kulma  $b$  on kulman  $a$  kolmasosa varsin tarkasti. Virhe on  $< \frac{1}{3}^\circ$  ja  $a$ :n ollessa  $90^\circ$  tulos on jopa täysin tarkka (katso taulukko).

Tarkkuustaulukko

kulma $a$ asteina	kulma $a/3$ asteina	kulma $b$ asteina	virhe %
30	10	10,047	+0,47
45	15	15,142	+0,95
60	20	20,268	+1,34
72	24	24,323	+1,35
81	27	27,259	+0,96
90	30	30	0

Kulman  $b$  arvojen laskemiseksi taulukkoa varten muodostetaan trigonometrinen lauseke. Kuvassa on suorakulmainen kolmio  $AOD$ , jonka hypotenuusa on ympyrän säde. Merkitään sille pituudeksi luku 1. Tällöin se on myös kuvan yksikkömittajana, josta seuraa janoille pituudet:  $AD = 1 \times \sin a$ ,  $DO = 1 \times \cos a$ ,  $DC$  ja  $AB = 1 \times \cos a + 2$ . Edellisen perusteella saadaan  $\sin b$ :lle lauseke:

$$\sin b = \frac{\sin a}{\cos a + 2},$$

josta saadaan

$$b = \arcsin\left(\frac{\sin a}{\cos a + 2}\right),$$

jonka tuloksena:  $b \approx a/3$ , kun  $a = 0..90^\circ$ .

## Muuta

Ratkaisumenetelmän on tarkoitus tuottaa käytäntöön riittävä arvio, eli kun otetaan huomioon piirtämisen aiheuttama epätarkkuus, itse jakomenetelmän virhe peittyä sen alle. Harpilla ja viivaimella ei voi jakaa kulmaa kolmeen osaan, mutta on olemassa työkaluja kulmien kolmiajako varten. Lisäksi kolmiajako onnistuu erikoistapauksissa, kuten  $90$  asteen kulman tapauksessa. Varsinaisessa kolmiajaon ongelmassa on kysymys geometrisen tehtävän ratkaisemisesta oikealla menetelmällä eikä käytännön piirtämisestä, jossa vanha keksintö astelevy on ollut käytössä. Senkin ovat nykyään cad-ohjelmat syrjäyttäneet esim. tekniikan mekaniikkasuunnittelussa.