

## Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2024 Bathissa

*Anne-Maria Ernvall-Hytönen*  
Helsingin yliopisto

Kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin Bathissa 11.–22.7.2024. Suomea edustivat Aino Aulanko, Albert Henriksson, Zhongyi Li, Zhiyuan Liu, Artúr Nádor ja Siiri Roschier.

Suomen menestys oli hyvää: Aino Aulanko sai hopeaa, Zhongyi Li pronssia ja lisäksi tuli kolme kunniamainintaa. Aino Aulanko sai lisäksi Maryam Mirzakhani -palkinnon Euroopan parhaasta naispuolisen kilpailijan tuloksesta.

### Tehtävät

**Tehtävä 1.** Määritä kaikki sellaiset reaalityluvut  $\alpha$ , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$  kokonaisluku

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

on jaollinen luvulla  $n$ . (Huomioi, että  $\lfloor z \rfloor$  merkitsee suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin  $z$ . Esimerkiksi  $\lfloor -\pi \rfloor = -4$  ja  $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$ .)

**Tehtävä 2.** Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit  $(a, b)$ , joilla on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut  $g$  ja  $N$ , että yhtälö

$$\text{syt}(an + b, bn + a) = g$$

pätee kaikilla kokonaisluvuilla  $n \geq N$ . (Huomaa, että  $\text{syt}(x, y)$  tarkoittaa lukujen  $x$  ja  $y$  suurinta yhteistä tekijää.)

**Tehtävä 3.** Olkoon  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ääretön positiivisten kokonaislukujen jono ja olkoon  $N$  positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että kaikilla  $n > N$  arvo  $a_n$  on yhtä suuri kuin se lukumäärä, miten monta kertaa  $a_{n-1}$  on jonossa  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Osoita, että ainakin toinen jonoista  $a_1, a_3, a_5, \dots$  ja  $a_2, a_4, a_6, \dots$  on lopulta jaksollinen. (Ääretön jono  $b_1, b_2, b_3, \dots$  on lopulta jaksollinen, jos on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut  $p$  ja  $M$ , että  $b_{m+p} = b_m$  kaikilla  $m \geq M$ .)

**Tehtävä 4.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $AB < AC < BC$ . Olkoon kolmion  $ABC$  sisäänpiirretty ympyrä  $\omega$  ja sen keskipiste  $I$ . Olkoon  $X$  pisteestä  $C$  poikkeava piste suoralla  $BC$  niin, että pisteen  $X$  kautta kulkeva suoran  $AC$  suuntainen suora sivuaa ympyrää  $\omega$ . Vastaavasti olkoon  $Y$  pisteestä  $B$  poikkeava piste suoralla  $BC$  niin, että pisteen  $Y$  kautta kulkeva suoran  $AB$  suuntainen suora sivuaa ympyrää  $\omega$ . Leikatkaa suora  $AI$  kolmion  $ABC$  ympäröivän ympyrän uudelleen pisteessä  $P \neq A$ . Olkoot  $K$  ja  $L$  janojen  $AC$  ja  $AB$  keskipisteet tässä järjestyksessä. Osoita, että  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**Tehtävä 5.** Turbo-Etana pelaa peliä laudalla, jolla on 2024 riviä ja 2023 saraketta. Laudan 2022 ruudussa piileskelee hirviö. Aluksi Turbo ei tiedä, missä hirviöt ovat, mutta hän tietää, että kaikilla riveillä paitsi ensimmäisellä ja viimeisellä on täsmälleen yksi hirviö ja kussakin sarakkeessa on korkeintaan yksi hirviö.

Turbo yrittää toistuvasti päästä ensimmäiseltä riviltä viimeiselle riville. Jokaisella yrityksellä hän valitsee en-

simmäiseltä riviltä aloitusruudun ja siirtyä aina ruudusta viereiseen ruutuun, eli sellaiseen ruutuun, jolla on yhteinen sivu. (Hän saa siirtyä myös sellaiseen ruutuun, jossa hän on jo käynyt.) Jos hän joutuu ruutuun, jossa on hirviö, niin yritys päättyy, ja Turbo siirretään takaisin lähtöriville seuraavaa yritystä varten. Hirviöt eivät siirry ja Turbo muistaa kaikista käymistään ruuduista, onko niissä hirviö. Jos hän pääsee viimeiselle riville, yritys loppuu ja peli päättyy.

Määritä pienin mahdollinen luvun  $n$  arvo niin, että Turbolla on strategia, joka varmistaa, että hän saavuttaa viimeisen rivin viimeistään  $n$ . yrityksellä riippumatta siitä, missä hirviöt ovat.

**Tehtävä 6.** Olkoon  $Q$  rationaalilukujen joukko. Funktiota  $f : Q \rightarrow Q$  kutsutaan englantilaiseksi, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla  $x, y \in Q$  pätee

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{tai} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku  $c$ , että jokaisella englantilaisella funktiolla  $f$  on korkeintaan  $c$  eri rationaalilukua, jotka ovat muotoa  $f(r) + f(-r)$  jollain rationaaliluvulla  $r$ , ja määritä luvun  $c$  pienin mahdollinen arvo.

## Tehtävien ratkaisuisista

Sivulta <https://www.imo2024.uk/solutions> löytyy linkki tehtävien ratkaisuihin. Ei siis käydä tässä tekstissä läpi ratkaisuja, mutta käsitellään tehtävän 5 ratkaisua, sillä tehtävä 5 on sellainen, jota voi lähestyä melko vähäisilläkin esitiedoilla.

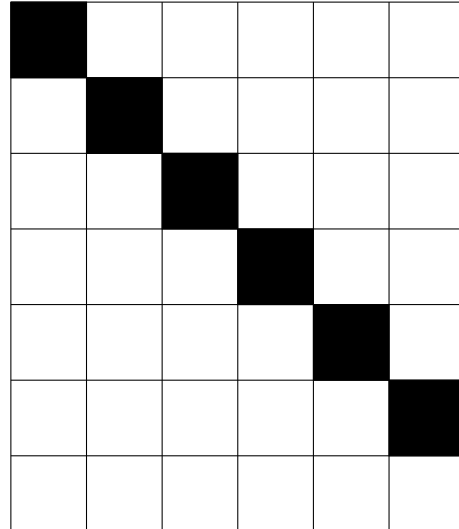
### Tehtävän 5 ratkaisu

Olin Suomen joukkueen johtajana ja pääsin lukemaan tehtävään 5 useita hienoja ratkaisuja. Aino Aulanko sai nimittäin tehtävästä täydet ja Zhongyi Liu ja Albert Henriksson saivat 6 pistettä, eli yhden pisteen vaille täydet. Tällöin siis ratkaisu oli oleellisesti ottaen täysin oikein, mutta siinä oli joku pikkuruinen huolimattomuusvirhe tai epätarkkuus.

Loput edustajamme saivat tehtävästä 0 pistettä. Tässä tehtävässä nimittäin on hyvä mahdollisuus ryhtyä ajattelemaan tilannetta ihan liian hankalasti, jolloin ei pääse maaliin.

Tehtävässä ei oikeastaan ole väliä sillä, että laudan mitat ovat 2024 ja 2023 ja että hirviöitä on 2022. Laudan mitat voisivat olla  $n + 1$  ja  $n$  ja hirviöitä taas  $n - 1$ , toki pienin varauksin: jos laudan mitat ovat 2 ja 1 ja hirviöitä 0, on tilanne triviaali. Jos taas laudan mitat ovat 3 ja 2 ja hirviöitä 1, niin ensimmäisellä yrityksellä joko pääsee loppuun tai löytää hirviön, jolloin taas toisella yrityksellä pääsee loppuun.

Tehtävässä sen sijaan on kriittistä, että hirviöitä on vähemmän kuin sarakkeita, sillä jos hirviöitä olisi yhtä paljon kuin sarakkeita, niin hirviöt voisivat sijaita ikään kuin diagonaalilla:

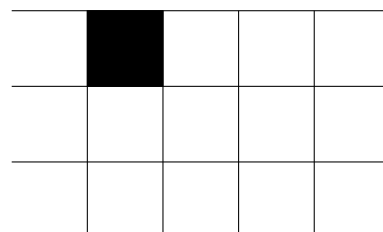


Tällöin Turbo-Etana ei voi milloinkaan päästä loppuun.

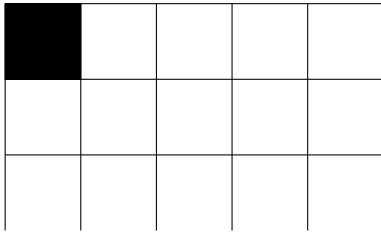
On hämmästyttävää, miten radikaalisti tilanne muuttuu, kun laudalla on yksi hirviö vähemmän. Tällöin itse asiassa riittää kolme yritystä. Perustellaan tämä seuraavaksi. Esittämäni perustelu on ottanut vaikutteita ehkä kaikista lukemistani ratkaisuisista. Niissä on kaikkisatietyt yhteisiä, mutta tietyt yksityiskohdat persoonallisia.

Turbo-Etanen yritykset ovat seuraavat:

1. Etsitään ylin hirviö. Koska hirviöitä on vähemmän kuin rivejä, on mahdollista, että ylimmällä rivillä ei ole hirviötä, eikä välttämättä edes toiseksi ylimmällä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että hirviö löytyi ylimmältä riviltä. Vaihtoehtoja on nyt kaksi: hirviö ei ole laidassa tai hirviö on laidassa, eli jommassakummassa reunimmaisessa sarakkeessa. Vaihtoehtoiset tilanteet näyttäisivät siis tältä:

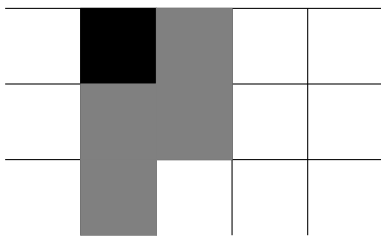


tai



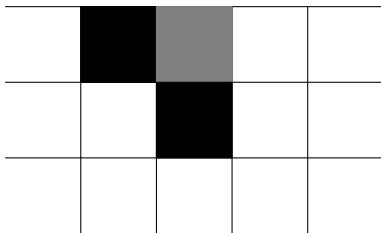
Käsitellään erikseen se tilanne, jossa ensimmäinen hirviö onkin reunassa.

2. Jos ensimmäinen hirviö ei ole reunassa, niin Turbo-Etana laittaa itsensä hirviön viereen ensimmäiselle riville, menee yhden ruudun alas ja kääntyy hirviön alle (Turbo-Etan polku on merkitty harmaalla):



Nyt Turbo-Etana voi jatkaa turvallisesti alas asti, sillä tässä sarakkeessa on jo ylhäällä yksi hirviö, eli niitä ei voi olla muualla.

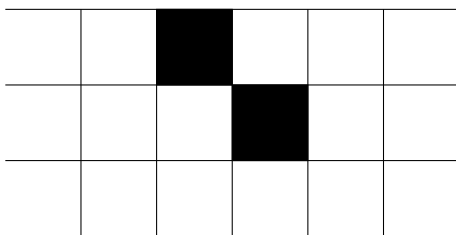
Ainoa mahdollisuus, jossa tämä reitti voi kaatua, on se, jos hirviö löytyykin siitä ruudusta, johon menään toisella rivillä.



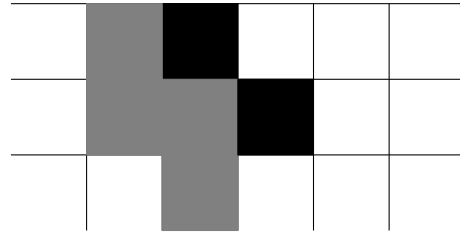
Tässä tilanteessa joudutaan siis kolmanteen yritykseen.

Muiden ruutujen kohdalla alkuperäinen hirviö varmistaa, että niissä ei ole hirviöitä.

3. Nyt tiedämme, että hirviöt ovat seuraavissa paikoissa:

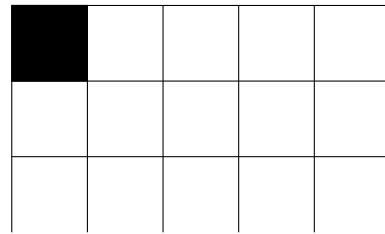


Tällöin seuraavalla reitillä ei voi olla hirviöitä:

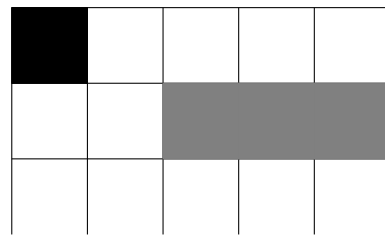


Käsitellään nyt se tilanne, jossa hirviö on laidassa. Voidaan olettaa, että se on vasemmassa reunassa.

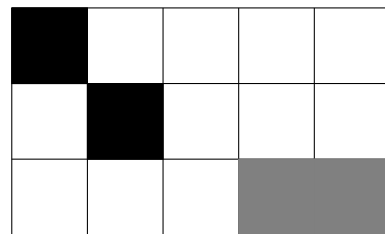
1. Hirviö löydetty:



2. Turbo-Etana kulkee toiselta riviltä kaikki muut ruudut läpi paitsi reunimmaisena (hirviön alla olevan tai sen vieressä olevan). Turbo-Etana siis kulkee seuraavat ruudut läpi:



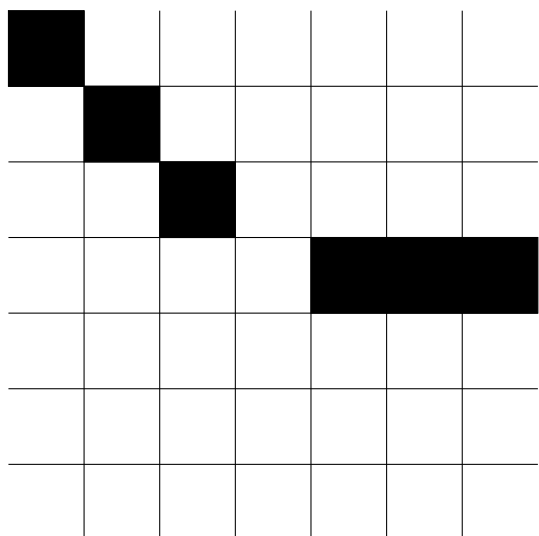
Jos missään ruudussa ei ole hirviötä, niin Turbo-Etana tietää, että joko toisella rivillä ei ole lainkaan hirviötä, tai hirviö on diagonaalilla:



Tässä tilanteessa Turbo-Etana siirtyy kolmannelle riville, mutta jättää väliin ne sarakkeet, joissa hirviö voi olla 1. ja 2. rivillä sekä kolmannen rivin kolmannen ruudun:

Turbo-Etana jatkaa vastaavasti. Joko hän pääsee loppuun tai törmää jollain rivillä hirviöön.

3. Kolmanteen yritykseen joudutaan vain, jos Turbo-Etana törmää jollain rivillä hirviöön. Tällöin hänen oletuksensa hirviöiden sijainnista on tämä, kun neljännelle riville on merkitty mustalla kaikki mahdolliset ruudut, joissa Turbo on törmännyt hirviöön.



Nyt turvallinen reitti on tämä:

