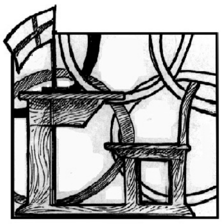

Suomen menestys huikeaa Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisissa 2024 Tskaltubossa

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Tskaltubossa Georgiassa huhtikuussa 2024. Georgiassa oli ollut tarkoitus järjestää jo 2021 olympialaiset, mutta ne oli jouduttu järjestämään etätapahtumana koronaolosuhteiden vuoksi.

Suomea edustivat Aino Aulanko, Amelie Hao, Siiri Roschier ja Minea Tiitinen. Aino Aulanko sai kultaa ja Siiri Roschier pronssia. Ainon tulos oli aivan käsittämättömän hyvä. Hän sai 38/42 pistettä, mikä oli paras eurooppalaisen kilpailijan tulos. Koko maailman tuloksissakin edelle meni vain yksi yhdysvaltalainen, Hannah Fox, joka sai 41 pistettä. Tasapisteissä Ainon kanssa oli australialainen Cloris Xu ja yhdysvaltalainen Jessica Wan.

Tehtävät

Tehtävä 1. Taululle on kirjoitettu kaksi eri kokonaislukua u ja v. Tehdään sarja operaatioita. Jokaisessa operaatiossa teemme yhden seuraavista kahdesta operaatiosta:

(i) Jos a ja b ovat taululla olevia eri kokonaislukuja, taululle voidaan kirjoittaa luku $a+b$, jos se ei ole jo taululla.

(ii) Jos a, b ja c ovat kolme taululla olevaa eri kokonaislukua, ja jos kokonaisluku x toteuttaa $ax^2+bx+c=0$, niin luku x voidaan kirjoittaa taululle, jos se ei ole jo taululla.

Määritä kaikki aloituslukuparit (u, v), joista voidaan kirjoittaa mikä tahansa kokonaisluku taululle äärellisen määrän operaatioita jälkeen.

Tehtävä 2. Tarkastellaan kolmiota ABC, jossa $AC > AB$. Olkoon Ω kolmion ympäri piirretty ympyrä ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä leikkaa sivut BC, CA, AB pisteissä D, E, F, tässä järjestyksessä. Olkoon X ja Y kaksi pistettä sisäänpiirretyn ympyrän lyhyemmillä kaarilla DF ja DE, tässä järjestyksessä, niin että $\angle BXD = \angle DYC$. Leikatkoot suorat XY ja BC pisteessä K. Olkoon T piste ympyrällä Ω siten, että KT on ympyrän Ω tangentti ja T on samalla puolella suoraa BC kuin piste A. Todista, että suorat TD ja AI leikkaavat ympyrällä Ω.

Tehtävä 3. Kutsutaan positiivista kokonaislukua n kummalliseksi, jos mille tahansa luvun n positiiviselle tekijälle d kokonaisluku $d(d+1)$ jakaa $n(n+1)$. Todista, että mille tahansa neljälle kummalliselle positiiviselle kokonaisluvulle A, B, C ja D pätee seuraava:

$$\mathrm{syt}(A, B, C, D) = 1.$$

Tässä $\mathrm{syt}(A, B, C, D)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa kaikki luvuista A, B, C ja D.

Tehtävä 4. Kokonaislukujen jonossa $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ lukupari (a_i, a_j), jossa $1 \leq i < j \leq n$, on mielenkiintoinen, jos on olemassa kokonaislukupari (a_k, a_ℓ), jossa $1 \leq k < \ell \leq n$, jolla pätee

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Jokaiselle $n \geq 3$, etsi suurin mahdollinen mielenkiintoisten lukuparien määrä n-pituisessa jonossa.

Tehtävä 5. Olkoon N positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, joilla seuraavat ehdot ovat tosia kaikilla positiivisten kokonaislukujen pareilla (x, y):

(i) Luvulla x ja funktion arvolla $f(x)$ on sama määrä positiivisia tekijöitä.

(ii) Jos x ei ole luvun y tekijä ja y ei ole luvun x tekijä, niin silloin

$$\mathrm{syt}(f(x), f(y)) > f(\mathrm{syt}(x, y)).$$

Tässä $\mathrm{syt}(m, n)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat m ja n.

Tehtävä 6. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut d, joille on olemassa d-asteinen reaalilukukertoiminen polynomi P, jolla on enintään d eri arvoa joukossa $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(d^2 - d)$.