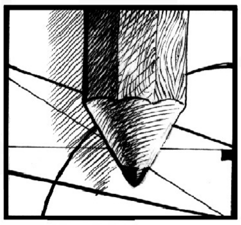


Onko amerikkalainen jalkapallo sittenkin pallon muotoinen?

Tuomas Korppi

Johdanto

Monia matemaattisesti suuntautuneita henkilöitä huvittaa se, että amerikkalainen jalkapallo on peli, jossa pelivälinettä, joka ei ole pallonmuotoinen, pelataan pääosin käsillä. Kuitenkin pallot voivat olla, paitsi urheilukentällä, myös matematiikassa amerikkalaisen jalkapallon muotoisia – kunhan matematiikassa mennään riittävän syvälle. Tässä kirjoitelmassa selitämme, kuinka tämä on mahdollista.

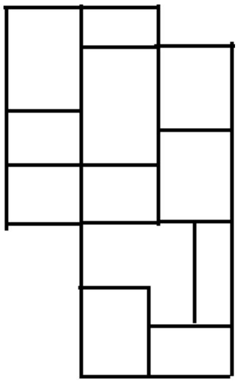
Metriikka

Jos (x_0, y_0, z_0) ja (x_1, y_1, z_1) ovat kaksi pistettä kolmiulotteisessa avaruudessa eli $\mathbb{R}^3$:ssa, niiden välinen etäisyys saadaan kaavalla

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Tämä on kuitenkin vain yksi etäisyyskäsitys monien joukossa. Jos perusjoukkona on esimerkiksi pallon pinnan pisteiden joukko, voidaan muodostaa kaksipaikkainen funktio $d(x, y)$, joka kertoo lyhyimmän etäisyyden pisteestä x pisteeseen y pallon pintaa pitkin mitattuna. Tällaisella etäisyyskäsityksellä on oikeaakin käyttöä esimerkiksi lentoreittien suunnittelussa, onhan maapallo suunnilleen pallon muotoinen.

Tai ajatellaan perusjoukoksi jonkun kaupungin katuverkko, jossa jokaista katua kuvataan janalla. Etäisyysfunktio tässä joukossa voidaan määritellä niin, että kullekin kahdelle kaduilla olevalle pisteelle x ja y etäisyys $d(x, y)$ on lyhyin etäisyys katuverkkoa pitkin mitattuna. (Katso kuva 1.)



Kuva 1: Esimerkki yksinkertaisesta katuverkosta.

Etäisyyskäsityksiä on siis useita, ja tällaisessa tapauksessa matematiikassa on tapana esittää aksioomat, jotka jonkun funktion on toteutettava, että se muodostaisi etäisyyskäsityksen. Kokemus on osoittanut, että seuraavat aksioomat ovat eräänlainen minimivaatimus sille, että funktiota voidaan ajatella etäisyysfunktiona.

Olkoon X perusjoukko ja $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$. Funktio d on metriikka eli etäisyysfunktio, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat.

1. $d(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.
2. $dw0$ jos ja vain jos $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Ensimmäinen aksiooma sanoo, että kaikki etäisyydet ovat ei-negatiivisia. Toinen aksiooma sanoo, että etäisyys pisteestä itseensä on nolla, ja kahden eri pisteen etäisyys on aina suurempi kuin nolla. Kolmas aksiooma sanoo, että etäisyys ei riipu siitä, kummassa järjestyksessä pisteet esitetään (ja näin ollen matka-aika olosuhteissa, joissa on ylä- ja alamäkiä ei kelpaa etäisyysfunktioksi).

Neljäs aksiooma sanoo, että $d(x, y)$ on lyhyin etäisyys x:stä y:hyn, eikä matkaa voi lyhentää tästä kiertämällä minkään muun pisteen z kautta.

Jos X on perusjoukko ja d siellä määritelty etäisyysfunktio, sanomme, että (X, d) on metrinen avaruus.

Kaikki kolme edellä esitettyä etäisyyskäsitystä toteuttavat nämä aksioomat. On hyödyllinen harjoitus lukijalle käydä jokainen aksiooma jokaiselle näistä läpi ja todeta, että aksiooma toteutuu.

Pallot

Merkitään tavallista etäisyyttä pisteestä x pisteeseen y kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ symbolilla $d_e(x, y)$. Nyt pallo, jonka keskipiste on x ja säde on r, voidaan kirjoittaa

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid d_e(x, y) \leq r\},$$

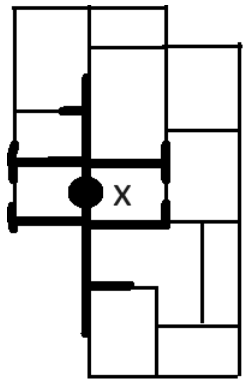
missä yhtälön vasen puoli on notaatio, jolla palloa merkitään ja oikea puoli pallon määrittelevä kaava. Eli palloon kuuluvat kaikki ne avaruuden pisteet, joiden etäisyys x:stä on korkeintaan r.

Korkeammassa matematiikassa on hyvin tyypillistä ottaa joku arkimatematiikan käsite ja sen keskeinen ominaisuus, ja sitten pitää tuota keskeistä ominaisuutta saman käsitteen määritelmänä kaikenlaisissa ufoissa konteksteissa. Nyt teemme juuri näin, ja määrittelemme pallon yleisessä metrisessä avaruudessa.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja r positiivinen reaaliluku. Nyt x-keskeinen ja r-säteinen pallo määritellään

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

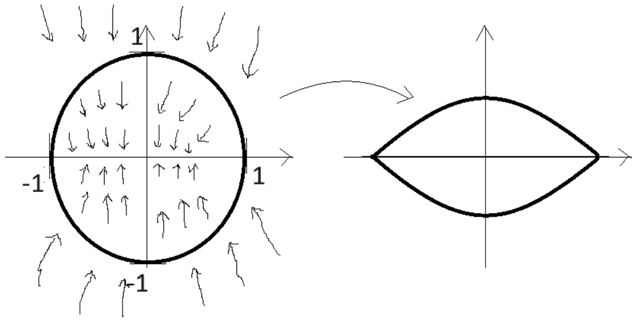
Jos esimerkiksi (X, d) ovat kuten katuverkostoesimerkissämme ja $x \in X$, niin $\bar{B}(x, 1\ \text{km})$ on niiden katupisteiden joukko, jonne päästään lähtemällä pisteestä x ja ajamalla korkeintaan yksi kilometri. (Katso Kuva 2).



Kuva 2: Kuvassa vahvennettuna $\bar{B}(x, 1\ km)$.

Seuraavaksi muutamme tason etäisyyskäsitystä niin, että saamme amerikkalaisen jalkapallon (tai sen kaksiulotteisen version) muotoisen pallon. Teemme tämän ensin kaksiulotteisessa avaruudessa, koska Matematiikkalehti Solmu ilmestyy toistaiseksi kaksiulotteisena, ja tarvitsemme havainnollistavia kuvia. Olkoon siis $\mathbb{R}^2$ taso ja d_e sen normaali etäisyyskäsitys.

Ajatellaan, että taso on tehty kumista, jota voidaan venyttää vapaasti. Tutkitaan kuvaa 3. Venytetään vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyvän ympyrän ylä- ja alapuolta niin, että niistä tulee oikeanpuoleisen kuvan amerikkalaisen jalkapallon ylä- ja alakaari. Koska tasomme on kumia, ympyrän sisään jäävä alue kutistuu samalla niin, että se täyttää täsmälleen amerikkalaisen jalkapallon sisään jäävän alueen, ja ympyrän ulkopuolelle jäävä alue venyy niin, että se täyttää amerikkalaisen jalkapallon ulkopuolelle jäävän alueen.



Kuva 3: Vasemmalla ympyrä, joka venytetään amerikkalaiseksi jalkapalloksi oikealla.

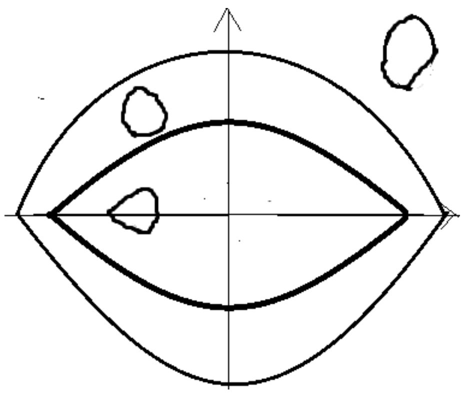
Olkoon x piste vasemmanpuoleisen kuvan tasolla ja $f(x)$ se oikeanpuoleisen kuvan tason piste, jonne x venytettäessä menee. Näin saamme bijektion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Määritellään nyt $d(x, y) = d_e(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Lukija voi tarkistaa, että tämä etäisyysfunktio toteuttaa kaikki metriikan aksioomat. Ajatellaan siis d metriikkana oikeanpuoleisen kuvan tasolla.

Oletetaan jatkossa, että vasemmanpuoleisen kuvan ympyrän säde on 1. Nyt x on amerikkalaisen jalkapallon reunalla jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) = 1$, sisällä jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) < 1$ ja ulkopuolella jos ja vain jos $d(\bar{0}, x) > 1$. Siis $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ on täsmälleen oikeanpuoleisen kuvan amerikkalainen jalkapallo.

Lukijan on helppo vakuuttaa itsensä siitä, että sama kikka toimii myös $\mathbb{R}^3$:ssa, joten olemme täyttäneet tämän artikkelin tarkoituksen ja osoittaneet, että myös matematiikassa pallot voivat olla amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Esimerkissämme kuitenkin vain yksi pallo on amerikkalaisen jalkapallon muotoinen. Jos pallolla on jokin muu keskipiste kuin $\bar{0}$ tai jokin muu säde kuin 1, tulee pallosta aivan eri muotoinen (katso kuva 4). Koska artikkeli sivuaa urheilua, osoitamme mekin urheiluhenkeä ja osoitamme, että $\mathbb{R}^3$:een voidaan muodostaa metriikka niin, että kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.



Kuva 4: Eri muotoisia palloja kumisella tasolla.

Jos metriikka määritellään $\mathbb{R}^3$:ssa niin, että

$$
\begin{aligned}
&d((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)) \\
&\quad = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + 9(y_0 - y_1)^2 + 9(z_0 - z_1)^2}
\end{aligned}
$$

(tarkista, että tämä on metriikka), kaikki pallot ovat sellaisia sikarinmuotoisia ellipsoideja, mutta tämä ei kelpaa meille amerikkalaisiksi jalkapalloiksi, koska amerikkalaisessa jalkapallossa on kummassakin päässä terävä kärki, kun taas edellä mainituissa ellipsoideissa päätkin ovat ellipsimaisen kaarevat.

Normi

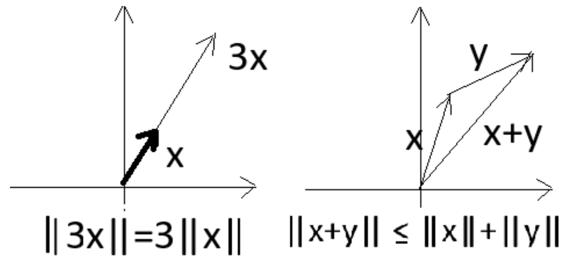
Jotta voisimme muodostaa metriikan, jossa kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia, meidän täytyy ensin määritellä, mitä tarkoittaa vektoreiden laskutoimitusten kanssa yhteensopiva metriikka.

Ensinnäkin samaistamme jokaisen $\mathbb{R}^3$:n pisteen sen paikkavektorin kanssa, eli ajattelemme pistettä ja sen paikkavektoria samana oliona. Näin pisteitä voidaan laskea yhteen ja kertoa reaaliluvulla kuten paikkavektoreilla tehdään, ja saada tulokseksi taas pisteen.

Määrittelemme, mitä tarkoittaa normi $\mathbb{R}^3$:ssa. Normi on eräänlainen yleistys vektorin pituuskäsitteestä. Olkoon siis $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sanomme, että $\|\cdot\|$ on normi, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. $\|x\| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^3$.
2. $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$.
3. $\|\ell x\| = |\ell|\|x\|$ kaikilla $\ell \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}^3$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Katso kuvasta 5 kahden viimeisen aksiooman havainnollistus.



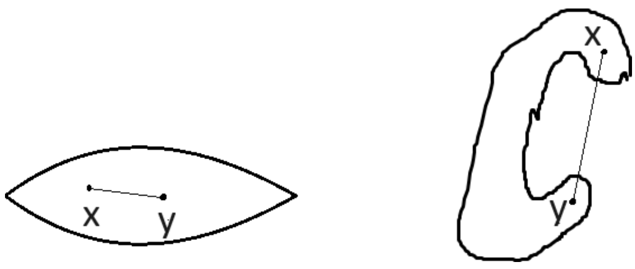
Kuva 5: Vasemmalla normin Aksiooma 3, oikealla normin Aksiooma 4.

Lukija voi todeta, että tavallinen vektorin pituusfunktio $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikki normin aksioomat. Esimerkki erikoisemmasta normista on $\|(x_0, y_0, z_0)\| = \max(|x_0|, |y_0|, |z_0|)$, ja lukija voi taas tsekata, että tämä toteuttaa kaikki normin aksioomat.

Lisäksi on sellainen hieno tulos, että jos $\|\cdot\|$ on mikä tahansa normi, niin $d(x, y) = \|x - y\|$ on metriikka $\mathbb{R}^3$:ssa. Lukija voi itse tsekata, että kaikki metriikan aksioomat toteutuvat.

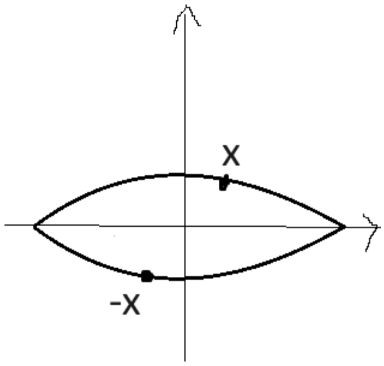
Konveksi joukko

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$. Sanomme, että A on konveksi, jos kaikilla $x, y \in A$ pätee, että joukko A sisältää janan pisteestä x pisteeseen y. (Katso kuva 6.)



Kuva 6: Vasemmalla konveksi joukko, oikealla joukko, joka ei ole konveksi.

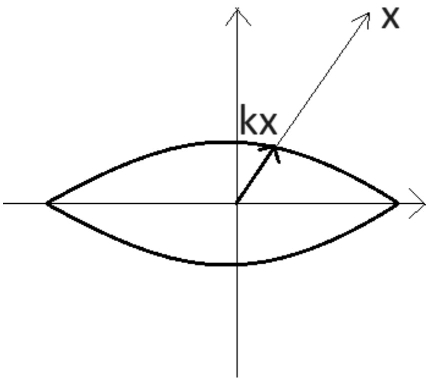
Sanomme, että A on symmetrinen, jos kaikilla $x \in A$ pätee $-x \in A$, ja lisäksi $\bar{0} \in A$. (Katso kuva 7.)



Kuva 7: Symmetrinen joukko.

Olkoon nyt $A \subset \mathbb{R}^3$ rehellistä fysikaalista kappaletta vastaava pistejoukko, eli ajattelemme fysikaalisen kappaleen sijoitetuksi $\mathbb{R}^3$:een, ja A sisältää kaikki ne pisteet, jotka ovat kappaleen sisä- tai reunapisteitä. Oletamme lisäksi, että A on konveksi ja symmetrinen, ja $\bar{0}$ on A:n sisällä (eikä reunalla). Esimerkiksi A voi olla amerikkalaisen jalkapallon muotoinen, kun sen keskipiste on origossa.

Määrittelemme joukon A avulla normin $\|\cdot\|_A$ seuraavasti: Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $k \in \mathbb{R}, k > 0$ sellainen, että kx sijaitsee joukon A reunalla. (Katso kuva 8.) Tällainen k on aina olemassa, kun $x \neq \bar{0}$, koska $\bar{0}$ sijaitsee kappaleen A sisällä ja A on rehellinen fysikaalinen kappale. Koska A on konveksi, k on myös yksikäsitteisesti määrätty. Nyt määritellään $\|x\|_A = 1/k$. Lisäksi määritellään $\|\bar{0}\|_A = 0$.



Kuva 8: Näin määritellään luku k.

Teoreema 1. *$\|\cdot\|_A$ toteuttaa kaikki normin aksioomat.*

Todistus: **Kaksi ensimmäistä aksioomaa** ovat itsestäänselviä.

Todistamme kolmannen aksiooman. Olkoon $\ell > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $k > 0$ sellainen, että kx on joukon A reunalla. Nyt myös $(k/\ell)(\ell x)$ on joukon A reunalla. Siis $\ell/k = \|\ell x\|_A$ ja $\|x\|_A = 1/k$. Siis Aksiooma 3 pätee positiiviselle ℓ.

Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$. Jos kx on joukon A reunalla, myös $-kx = k(-x)$ on joukon A reunalla, koska A oletettiin symmetriseksi. Siis $\|-x\| = \|x\|$.

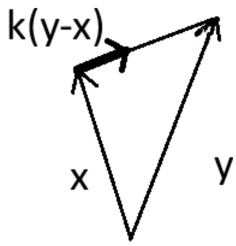
Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$ ja $\ell > 0$. Nyt $\|-\ell x\| = \|\ell x\| = |\ell|\|x\| = |-\ell|\|x\|$. Siis Aksiooma 3 pätee myös negatiiviselle kertoimelle.

Todistetaan Aksiooma 4.

Varsinaista todistusta ajatellen teemme ensin pari huomiota.

Ensinnäkin huomataan, että jos $x \in \mathbb{R}^3$, niin $x/\|x\|_A$ on joukon A reunalla, koska kyseessä on kx edellisten kappaleiden notaatiolla.

Olkoon sitten $x, y \in \mathbb{R}^3$. Haluamme piirtää janan pisteestä x pisteeseen y. Tämä tehdään niin, että aloitetaan pisteestä x ja piirretään janaa vektorin $y - x$ suuntaisesti. Jana on siis $\{x + k(y-x) \mid 0 \leq k \leq 1\}$. Toisaalta lauseke $x + k(y-x) = (1-k)x + ky$. Tämä tarkoittaa sitä, että janan pisteet ovat täsmälleen painotetut keskiarvot pisteistä x ja y. (Katso kuva 9.)



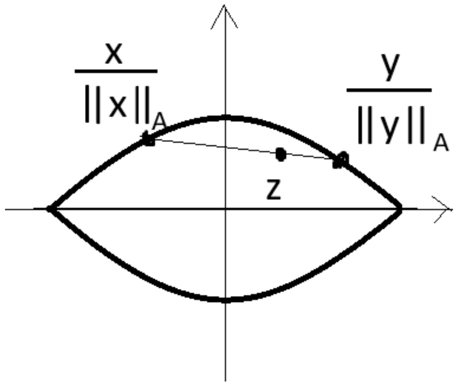
Kuva 9: $x + k(y-x)$ piirtää janan pisteestä x pisteeseen y.

Nyt varsinainen todistus.

Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^3$. Määritellään z seuraavasti:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x+y}{\|x\|_A + \|y\|_A} \\ &= \frac{\|x\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \cdot \frac{x}{\|x\|_A} + \frac{\|y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \cdot \frac{y}{\|y\|_A}. \end{aligned}$$

Nyt $\frac{x}{\|x\|_A}$ ja $\frac{y}{\|y\|_A}$ ovat joukon A reunalla, ja z on painotettu keskiarvo näistä pisteistä. Piste z siis sijaitsee näitä pisteitä yhdistävällä janalla, ja koska A on konveksi, z sijaitsee siis joukossa A. (Katso kuva 10.) Jos siis valitaan k niin, että kz on joukon A reunalla, $k \geq 1$, ja siis $\|z\|_A \leq 1$.



Kuva 10: Piste z sijaitsee näin.

Siis

$$\|z\|_A = \frac{\|x+y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} \le 1.$$

Kertomalla tästä oikeanpuoleinen epäyhtälö puolittain keskimmäisen lausekkeen nimittäjällä saadaan Aksiooma 4. □

Pallot metriikassa d_A

Tässä luvussa todistamme vihdoin sen tuloksen, että on olemassa metriikka $\mathbb{R}^3$:ssa, jossa kaikki pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Teoreema 2. *Olkoon $\|\cdot\|$ mikä tahansa normi $\mathbb{R}^3$:ssa, ja d kaavalla $d(x,y) = \|x-y\|$ määritelty metriikka. Tällöin kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia pallon $\bar{B}(\bar{0},1)$ kanssa.*

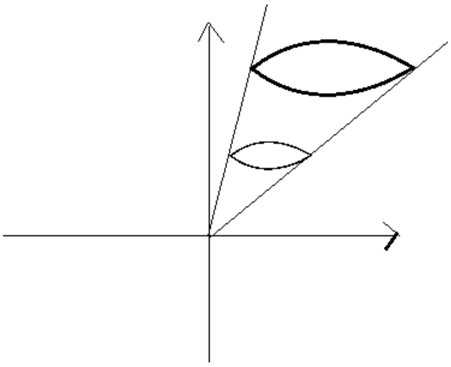
Todistus: Ensinnäkin huomataan, että

$$\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\|.$$

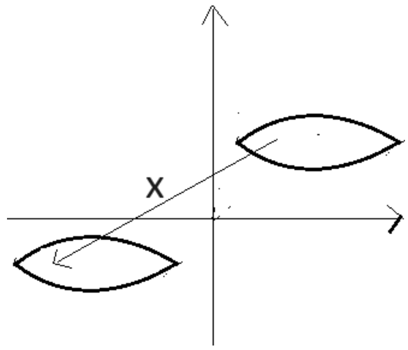
Sitten varsinainen todistus:

Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$ ja $r > 0$. Nyt $y \in \bar{B}(x,r)$ jos ja vain jos $\|x-y\| \le r$ jos ja vain jos $\|y/r - x/r\| \le 1$ jos ja vain jos $y/r - x/r \in \bar{B}(\bar{0},1)$.

Tutkitaan funktiota $b\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; b(y) = y/r - x/r$, kun x on vakio. Se on helppo nähdä bijektioksi (tarkista bijektiivisyyys itse). Funktion b bijektiivisyydestä yhdessä edellisen kappaleen jos ja vain jos -ketjun kanssa seuraa, että funktio b vie pallon $\bar{B}(x,r)$ palloksi $\bar{B}(\bar{0},1)$.



Kuva 11: Pienempi amerikkalainen jalkapallo on isomman kuvajoukko, kun funktiona on $y \mapsto y/2$.



Kuva 12: Vasemmanpuoleinen amerikkalainen jalkapallo on oikeanpuoleisen kuvajoukko, kun funktiona on $y \mapsto y + x$ ja x on vakiovektori.

Nyt funktio $y \mapsto y/r$ kutistaa (tai avartaa, jos $r < 1$) avaruutta r:n verran (katso kuva 11), ja funktio $y' \mapsto y' - x/r$ siirtää avaruutta vektorin $-x/r$ osoittaman suunnan ja matkan (katso kuva 12). Siis b kutistaa ja siirtää avaruutta, mutta säilyttää kappaleiden muodon. Koska b vie pallon $\bar{B}(x,r)$ palloksi $\bar{B}(\bar{0},1)$, kuviot $\bar{B}(\bar{0},1)$ ja $\bar{B}(x,r)$ ovat yhdenmuotoisia. □

Määritellään, että metriikka $d_A(x,y) = \|x-y\|_A$. Perusjoukkona on siis $\mathbb{R}^3$.

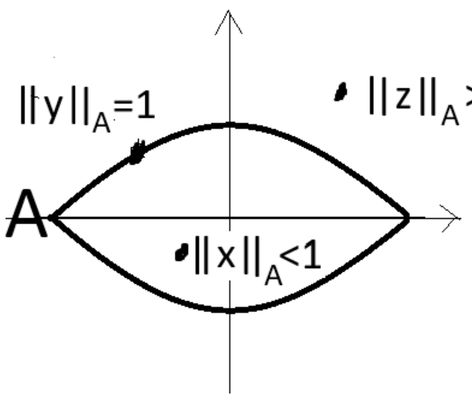
Teoreema 3. *Metriikassa d_A kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia joukon A kanssa.*

Todistus: Tutkitaan joukkoa A. Olkoon $x \in \mathbb{R}^3$, ja $k > 0$ sellainen, että kx on joukon A reunalla.

Oletetaan $k \ge 1$. Nyt $\bar{0}, kx \in A$, ja x on pisteitä $\bar{0}$ ja kx yhdistävällä janalla. Koska A on konveksi, $x \in A$.

Oletetaan, että $x \in A$. Koska A oli rehellinen fysikaalinen kappale, sen reuna tulee jossain vaiheessa kuljettaessa pisteestä x vektorin x osoittamaan suuntaan, ja on siis olemassa $k' \ge 1$, jolle $k'x$ on kappaleen A reunalla. Mutta nyt k:n yksikäsitteisyyden nojalla $k = k' \ge 1$.

Siis joka tapauksessa $x \in A$ jos ja vain jos $k \ge 1$ jos ja vain jos $\|x\|_A \le 1$ jos ja vain jos $x \in \bar{B}(\bar{0},1)$. Siis $A = \bar{B}(\bar{0},1)$. (Katso kuva 13.)



Kuva 13: Kuvassa joukko A sekä joidenkin pisteiden normeja.

Siis edellisen teoreeman nojalla kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia joukon A kanssa. □

Siis kaikki avaruuden $(\mathbb{R}^3, d_A)$ pallot ovat joukon A muotoisia. Amerikkalainen jalkapallo on konveksi ja symmetrinen, rehellinen fysikaalinen kappale. Jos siis A valitaan sellaisen amerikkalaisen jalkapallon muotoiseksi, jonka keskipiste on origossa, kaikki avaruuden $(\mathbb{R}^3, d_A)$ pallot ovat amerikkalaisen jalkapallon muotoisia.

Pelataanko amerikkalaista jalkapalloa sittenkin pääosin jaloilla?

Kädelliset ovat eläinlahko, johon kuuluu apinat, ihmiset sekä joitain muita lajeja. Näille tyypillistä on se, että eturaajat ovat kehittyneet oksiin ja esineisiin tarttumiseen. Kädellisiä on ollut olemassa ainakin 70 miljoonaa vuotta, ja ne ovat kehittyneet nelijalkaisista nisäkkäistä. Kun kädelliset olivat kehittymässä, niiden nelijalkaisten esi-isien etujalat kehittyivät käsiksi.

Näin ollen voidaan sanoa, että kädet ovat itse asiassa tarttumiseen erikoistuneet etujalat, ja amerikkalaista jalkapalloakin pelataan pääosin näillä tarttumiseen erikoistuneilla etujaloilla. Emme kuitenkaan sukella syvemmälle tähän aihepiiriin, koska se kuuluu biologian eikä matematiikan alaan.