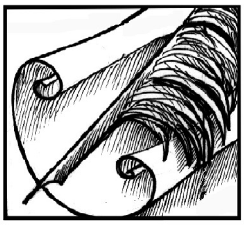
SOLMU

MATEMATIIKKALEHTI 1/2024

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys



Olympiamenestys matematiikassa ja matematiikan harrastaminen

Pääkirjoitus

Tänä kesänä Suomi on jo osallistunut matematiikan, kemian ja tietotekniikan kansainvälisiin olympialaisiin. Uutisissa on paljon kerrottu urheiluolympialaisten poikkeuksellisen heikosta mitalisaaliista. Tiedeolympialaisten kohdalla tilanne on toisenlainen. Tietotekniikasta tuli kaksi hopeamitalia ja kemiasta kolme pronssia.

Olen ollut mukana matematiikan olympiavalmennuksessa pian 30 vuotta, ensin kilpailijana, sitten valmentajana. Tämän vuoden menestys on sellaista, jota en olisi pitänyt realistisena ennen tämän vuoden EGMO:a. Ensin Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisissa Aino Aulangon pisteet olivat kaikkien eurooppalaisten kilpailijoiden parhaat. (Kilpailuun osallistuu myös maita Euroopan ulkopuolelta. Yhdysvaltojen kilpailija sai koko kisan parhaat pisteet.) Ainon 38 pistettä on aivan käsittämätön suoritus, kun 42 on täydet pisteet. Kesällä kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa tuli hopeaa ja pronssia, sekä kolme kunniamainintaa. Mitaleita on tullut aiemminkin, mutta lisäksi Aino sai Maryam Mirzakhani -palkinnon maanosan parhaasta naispuolisen kilpailijan suorituksesta. Muun joukkueen suorituksessa erityisesti ilahdutti se, että kaikki saivat joko kokonaisen tehtävän ratkaistua tai pientä huolimattomuusvirhettä vaille koko tehtävän ratkaistua, eli suoritus oli siltä osin tasaisesti vahva. Moni kilpailijoista oli nuoria, mutta tätä ei olisi arvannut heidän ratkaisuistaan. Joukkueenjohtajana ratkaisuja lukiessani yllätyin usein positiivisesti: Oho, tämä tyyppi osaa argumentoida näinkin! Vaikuttavaa. Moni joukkueesta voi osallistua kilpailuihin myöhemminkin.

Mielenkiintoista uutisoinnissa on myös ollut se, että urheilun kohdalla on usein vähintään vihjattu, että eräs ongelma on se, että olympiakomitea ei satsaa riittävästi huippuihin, vaan koko kansan liikuttamiseen. Matematiikassa tilanne taas on se, että tulevaisuus on alkanut näyttää paljon valoisammalta, kun olemme saaneet mukaan aiempaa enemmän nuoria osallistujia, mikä puolestaan on vaatinut enemmän perusteiden opettamista. Syy eroon on selvä: siinä missä monia urheilulajeja voi harrastaa monissa kaupungeissa, ei matematiikassa ole vastaavia harrastusmahdollisuuksia, jolloin harrastuksen tarjoaminen jää monin paikoin olympiavalmennuksen vastuulle. Tämä on toisaalta sääli, mutta sopii sikäli hyvin toimintaan, että olemme aina pitäneet tärkeänä matematiikan ilosanoman ja matemaattisen yleissivistyksen levittämistä. Matematiikka on tärkeää monella alalla. Moni ei pääse olympiajoukkueeseen, mutta moni voi oppia paljon hyödyllisiä asioita valmennuksessa ja hyödyntää niitä opinnoissaan myöhemmin.

Näin lukuvuoden aluksi onkin hyvä muistuttaa erilaisista materiaaleista, joita voi käyttää, jos luokkahuoneessa joku näyttää kaipaavan lisähaasteita. Solmun matematiikkadiplomit sopivat monille kouluasteille. Matematiikan olympiavalmennuksen materiaaleja löytyy myös verkosta ja kuka tahansa voi ladata kirjevalmennustehtäväsarjoja verkosta ja ryhtyä ratkomaan tehtäviä ja palauttamaan ratkaisuja. Luonnollisestikin myös esimerkiksi opettajat voivat hyödyntää olympiavalmennuksen materiaaleja vaikka matematiikkakerhoissa. Materiaalien vaikeustaso vaihtelee huomattavasti – ensimmäinen peruskoulun valmennustehtäväsarja edustaa ehkä helpointa laitaa, kun taas esimerkiksi eri aiheiden täsmämateriaaleissa voidaan päästä todella pitkälle. Myös yliopistoilla on paljon kursseja joko tarjolla verkossa tai muuten lukiolaisten saatavilla. Osa kursseista on niin sanottuja kurkistuskursseja, eli nimenomaan lukiolaisille suunnattuja kursseja. Kuitenkin myös esimerkiksi matematiikan perusopintojen kursseja voi suositella osalle lukiolaisista. Näillä saa mahdolliset tulevaisuuden matematiikan opinnot hyvään alkuun, ja jos alaksi valikoituukin jokin muu, niin diskreetin matematiikan tai analyysin perusteet eivät ole haitaksi.

Mukavaa alkanutta lukuvuotta!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Tarinoita polynomeista (osa 5)

Jukka Tuomela
Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
jukka.tuomela@uef.fi

Kertaus

Jatketaan tässä polynomien tarkastelua hieman eri kontekstissa kuin aiemmissa kirjoituksissa [8, 9, 10, 11]. Jälleen suosittelen kirjaa [3] kaikille polynomeista kiinnostuneille. Tämän kirjoituksen laskut on helppo laskea Sagella [1].[1]

Helppoa polynomialgebraa

Kun lasketaan rationaalikertoimisilla polynomeilla, niin pitkissä laskuissa helposti rationaalilukujen koko kasvaa nopeasti; siis osoittajassa ja nimittäjässä voi olla hyvin suuria kokonaislukuja. Ei siis etukäteen tiedetä, kuinka monta bittiä vastauksen ja välitulosten esittämiseen tarvitaan. Tämän takia tietokonetoteutuksen pitää varautua siihen, että muistitilaa pitää kasvattaa laskun kuluessa. Olisikin paljon mukavampaa laskea siten, että kertoimien koko ei kasvaisi. Korvataan siis rationaaliluvut äärellisellä joukolla seuraavasti.

Olkoon $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ja määritellään tässä joukossa yhteen- ja kertolasku seuraavasti:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Merkitään $f \in \mathbb{Z}_2[x]$, jos

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j, \quad c_j \in \mathbb{Z}_2.$$

Nyt voidaan esimerkiksi laskea

$$(x+1)^4 = x^4 + 1,$$
$$(x^3 + x + 1)(x^5 + x^2) = x^8 + x^6 + x^3 + x^2.$$

Jätän harjoitustehtäväksi sen pohtimisen, millä k:n arvoilla pätee $(x+1)^k = x^k + 1$.

Kaikki tavalliset polynomeihin liittyvät laskutoimitukset pätevät, koska $\mathbb{Z}_2$ on kunta. Tarkka määritelmä löytyy Metsänkylän ja Näätäsen kirjasta [5], mutta kunnassa siis voidaan laskea yhteen, kertoa ja jakaa, kuten rationaalilukujen tapauksessa on totuttu. Erityisesti siis kirjoituksessa [8] esitelty jakolaskualgoritmi toimii sellaisenaan myös renkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$. Esimerkiksi jos $f = x^{11} + x^6 + x^4 + x$ ja $g = x^5 + x^2 + 1$, niin jakolaskualgoritmi antaa

$$f = (x^6 + x^3 + 1)g + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Toivoisin, että lukija laskisi tämän jakokulman avulla ja huomaisi, miten helppoa se on.

Sagen avulla lasketaan seuraavasti.

[1] https://www.sagemath.org/index.html

```
R0 = PolynomialRing(GF(2), 'x');
x = R0.gen()
```

Ensimmäisellä rivillä annetaan renkaan $\mathbb{Z}_2[x]$ nimeksi R0 ja toisella rivillä kerrotaan, että kirjain x on muuttujan nimi. GF(2) on kunnan $\mathbb{Z}_2$ nimi.[2] Sitten voidaan määritellä polynomit:

```
f=x^(11)+x^6+x^4+x;
g=x^5+x^2+1
```

Nyt f voidaan jakaa tekijöihin komennolla f.factor(), mikä antaa

$$f = x(x+1)^3(x^7 + x^6 + x^3 + x + 1).$$

Nolla on siis f:n yksinkertainen nollakohta, ja yksi on kolminkertainen nollakohta. Tekijällä $x^7+x^6+x^3+x+1$ ei ole nollakohtia ollenkaan.

Komennolla f.quo_rem(g) saadaan sitten osamäärä ja jakojäännös. Vastaus on lista, jonka ensimmäinen alkio on osamäärä ja toinen on jakojäännös.

Täsmälleen samoin voidaan laskea, jos on useampia muuttujia:

$$\begin{aligned} h &= (x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2) \\ &= x_1^5 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^2 + x_2^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Skeptinen lukija kenties on samaa mieltä siitä, että laskut helpottuvat, mutta hän voi epäillä koko jutun hyödyllisyyttä ja/tai mielekkyyttä. On kuitenkin osoittautunut, että polynomeja, joitten kertoimet ovat äärellisestä kunnasta, esiintyy monilla matematiikan aloilla. Esimerkiksi:

(i) Äärellisiä kuntia ja polynomeja käytetään koodausteoriassa [13].

(ii) Jos halutaan jakaa rationaalikertoiminen polynomi tekijöihin, niin ensin suoritetaan tämä tekijöihinjako äärellisessä kunnassa, koska se on helpompaa. Tämän avulla sitten löydetään myös rationaaliset tekijät [12].

Tässä kirjoituksessa katsotaan, miten polynomien avulla voidaan helposti analysoida monimutkaisia loogisia lausekkeita. Ennen sitä pitää kuitenkin katsoa, mitä eroa on polynomeilla ja funktioilla.

Polynomit ja funktiot

Olkoon sitten $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ jokin polynomi. Selvästi näin voidaan määritellä myös funktio $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$. Mutta nyt on varsin selvää, että polynomien ja funktioitten välillä ei ole bijektiota. Helposti löydetään polynomeja, jotka eivät ole nollapolynomeja, mutta ne ovat nollafunktioita, esimerkiksi $\hat{f} = x+x^3+x^4+x^7$. Itse asiassa kun vähän pohtii asiaa, niin on vain 4 eri funktiota $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0, \quad & f_1(x) &= 1, \\ f_2(x) &= x, \quad & f_3(x) &= x+1. \end{aligned} \tag{2}$$

Huomaa, että nämä ovat täsmälleen kaikki polynomit, joitten aste on korkeintaan yksi.

Jos sitten annetaan jokin mielivaltainen polynomi f, niin funktiona se vastaa jotain noista neljästä funktiosta. Tässä tietenkin tarvitaan jakolaskualgoritmia. Olkoon $g = x^2 + x$; tämä on yksinkertaisin polynomi, joka ei ole nollapolynomi, mutta on nollafunktio. Jaetaan siis g:llä, jolloin saadaan

$$f = qg + r,$$

missä r on jokin ensimmäisen asteen polynomi, koska g on toisen asteen polynomi. Siis $r = f_j$ jollekin $0 \le j \le 3$. Mutta koska $g(x) = 0$, niin

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) = r(x).$$

Funktiona f ja sen jakojäännös r ovat samoja, vaikka ne ovat eri polynomeja. Merkitään tätä jakojäännöstä $\mathsf{NF}(f)$.

Tämä idea yleistyy sellaisenaan monen muuttujan tapaukseen. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja olkoon edelleen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ja merkitään

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Mielivaltainen $f \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Miten sitten löydettäisiin $\mathsf{NF}(f)$? Huomaa, että funktioina $x_j^k = x_j$ kaikilla $k \ge 1$, joten jokaisessa monomissa x^α voidaan α korvata indeksivektorilla β, missä

$$\beta_j = \begin{cases} 0, & \alpha_j = 0, \\ 1, & \alpha_j \ge 1. \end{cases} \tag{3}$$

Siispä $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$; huomaa, että erilaisia indeksivektoreita, ja vastaavia monomeja x^β, on 2^n kappaletta. Tästä edelleen seuraa, että kaikki mahdolliset funktiot $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ ovat muotoa

$$\tilde{f} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_2^n} c_\beta x^\beta, \quad c_\beta \in \mathbb{Z}_2. \tag{4}$$

Siispä mahdollisia funktioita $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ on 2^{2^n} kappaletta, mikä antaa 4 kappaletta tapauksessa $n = 1$, kuten jo yllä todettiin. Polynomeja, jotka ovat muotoa (4) on tapana kutsua Zhegalkinin polynomeiksi [4].[3]

[2] Äärellistä kuntaa (finite field) sanotaan myös Galois'n kunnaksi (Galois field).

[3] Artikkeli [4] on kirjoitettu venäjäksi, mutta siinä oli ranskankielinen lyhennelmä, joten nimi kirjoitettiin ranskalaisittain Gégalkine.

Nyt vaikkapa polynomin (1) tapauksessa

$$\mathsf{NF}(h) = x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_2 = x_1 + x_2.$$

Käsin laskien on kätevä käyttää kaavaa (3), mutta tietokoneella laskiessa on näppärämpää edetä toisin. Olkoon $g_j = x_j^2 + x_j$ ja jaetaan vuorotellen jokaisen polynomin g_j suhteen:

$$\begin{aligned} f &= q_1g_1 + r_1, \\ r_1 &= q_2g_2 + r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= q_ng_n + r_n. \end{aligned}$$

Nyt r_n on Zhegalkinin polynomi ja voidaan kirjoittaa $r_n = \mathsf{NF}(f)$. Esimerkiksi jos otetaan yhtälön (1) polynomi, niin

$$\begin{aligned} h &= (x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + 1)g_1 + x_1 + x_2^3, \\ x_1 + x_2^3 &= (x_2 + 1)g_2 + x_1 + x_2, \end{aligned}$$

joten $\mathsf{NF}(h) = x_1 + x_2$, kuten äsken jo nähtiin.

Nyt voidaan sitten testata, milloin kaksi polynomia ovat funktioina samoja: f ja g ovat funktioina samoja, jos $\mathsf{NF}(f) = \mathsf{NF}(g)$ tai ekvivalentisti, jos $\mathsf{NF}(f+g) = 0$. Zhegalkin päätyi polynomeihinsa, kun hän tarkasteli loogisten lausekkeitten totuusarvoja. Katsotaan tätä seuraavaksi.

Logiikka 0

Lewis Carroll kuvaili logiikkaa seuraavasti [2]:

> 'I know what you're thinking about,' said Tweedledum: 'but it isn't so, nohow.'
>
> 'Contrariwise,' continued Tweedledee, 'if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.'

Jätän harjoitustehtäväksi sen pohtimisen, miten hyvin Carroll on tuossa tavoittanut logiikan syvimmän olemuksen. Metsänkylä ja Näätänen [5] ovat ottaneet perinteisemmän näkökulman logiikkaan. Kirjan luvussa nolla on esitelty logiikan peruskäsitteet, joten jos alempana jokin termi tai merkintä ei ole ennestään tuttu, niin tuolta löytyy lisätietoa.

Merkitään isoilla kirjaimilla joitain väitteitä, kuten X on väite, että reaaliluku $a \geq 1$. Tämän negaatio $\neg X$ on väite $a < 1$. Tarkkaavainen lukija kenties huomaa, että tässä ollaan heti heikoilla jäillä, koska voisihan ajatella, että eräänlainen negaatio olisi väite: a ei ole reaaliluku. Väitteillä pitää tavallaan olla jokin konteksti, mutta tämä konteksti varmaankin on selvä esimerkeissä, ja joka tapauksessa tätä kontekstia ei puhtaan loogisesti edes tarvita. Matematiikassahan voidaan määritellä tiettyjä asioita riippumatta niitten merkityksestä.

Kun esitetään jokin väite, niin se voi olla matematiikassa joko tosi tai epätosi. Todellisessa elämässähän väitteet ovat usein epämääräisiä ja/tai epäilyttäviä, mutta keskitytään tässä vain matemaattisiin väitteisiin.

Jos on siis annettu jokin väite X, joka voi olla tosi tai epätosi, niin sehän on oikeasti jokin funktio, jonka arvojoukko on $\mathbb{Z}_2$: funktion arvo on 0, jos X on epätosi, ja 1, jos se on tosi. Laitetaan siis väitettä X vastaamaan muuttuja x, jolloin voidaan sanoa, että X määrittää funktion f_2, joka oli yhtälössä (2).

Olkoon sitten $\mathbb{E}$ väite, joka on epätosi, ja $\mathbb{T}$ väite, joka on tosi; tällöin väitettä $\mathbb{E}$ vastaa nollafunktio ja väitettä $\mathbb{T}$ vastaa funktio, joka aina saa arvon yksi. Lopuksi vielä negaatiota $\neg X$ vastaa yhtälön (2) funktio $f_3 = 1+x$. Voidaan siis kirjoittaa:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\quad\longleftrightarrow\quad 0, \\ \mathbb{T} &\quad\longleftrightarrow\quad 1, \\ X &\quad\longleftrightarrow\quad x, \\ \neg X &\quad\longleftrightarrow\quad 1 + x. \end{aligned}$$

Huomaa, että oikealla puolella on täsmälleen yhtälössä (2) annetut yhden muuttujan Zhegalkinin polynomit.

Logiikassa on kuitenkin tyypillisesti useampia väitteitä. Jos on annettu väitteet X ja Y, niin liitetään näihin vastaavat muuttujat x ja y. Kuten yllä todettiin, niin on $2^{2^2} = 16$ eri kahden muuttujan Zhegalkinin polynomia, joten mikä tahansa kahden väitteen lauseke voidaan esittää näitten avulla. Koska yhden muuttujan tapaus on erikoistapaus kahden muuttujan tapauksesta, niin jäljelle jää vain 10 aidosti kahta väitettä kuvaavaa funktiota.

Logiikassa on tapana käyttää seuraavia merkintöjä näille funktioille:

$$\begin{aligned} X \vee Y &\quad\longleftrightarrow\quad x + y + xy, \\ X \wedge Y &\quad\longleftrightarrow\quad xy, \\ X \Rightarrow Y &\quad\longleftrightarrow\quad 1 + x + xy, \\ Y \Rightarrow X &\quad\longleftrightarrow\quad 1 + y + xy, \\ X \Leftrightarrow Y &\quad\longleftrightarrow\quad 1 + x + y. \end{aligned} \tag{5}$$

Kun otetaan vielä näitten negaatiot, niin saadaan kaikki 10 funktiota. Tämä muuten selittää logiikassa käytettävien merkintöjen lukumäärän. Yhden väitteen tapauksessa on kätevää käyttää symbolia $\neg$, koska silloin kaikki Zhegalkinin polynomeja vastaavat lausekkeet voidaan esittää lyhyesti. Kahden väitteen tapauksessa lyhyet esitysmuodot Zhegalkinin polynomeille saadaan, kun otetaan käyttöön lisäksi $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$. Puhtaan loogisesti vähempikin symbolimäärä riittäisi, mutta tällöin lausekkeista tulisi paljon vaikeammin hahmotettavia.

Nyt voidaan helposti laskea esimerkiksi, että

$$\begin{aligned} \neg(X \vee Y) &\longleftrightarrow 1 + x + y + xy = (1+x)(1+y) \\ &\longleftrightarrow \neg X \wedge \neg Y. \end{aligned} \tag{6}$$

Yllä esitellyt merkinnät on tapana lukea seuraavasti:

$$\begin{aligned} X \vee Y &: \quad \mathsf{X\ tai\ Y}, \\ X \wedge Y &: \quad \mathsf{X\ ja\ Y}, \\ X \;\Rightarrow\; Y &: \quad \mathsf{X : stä\ seuraa\ Y}, \\ X \;\Leftrightarrow\; Y &: \quad \mathsf{X\ ja\ Y\ ovat\ ekvivalentteja.} \end{aligned}$$

Sivupolku

René Thom eräässä kirjoituksessaan [7] analysoi muun muassa logiikan soveltuvuutta luonnollisen kielen analyysiin, ja tekee siinä mielestäni hauskan havainnon. Thom antaa esimerkkejä tapauksista, joissa sanojen JA ja TAI käyttö poikkeaa logiikan käytännöistä. Tarkastellaan väitettä:

> Suomen lippu on sininen ja valkoinen.[4]

Luulisin, että kaikki pitävät väitettä totena. Mutta logiikan mukaan tällöin myös väite ”Suomen lippu on sininen” on tosi. Kuitenkin jos joku esittäisi tällaisen väitteen, niin vastaus todennäköisesti olisi: ”ei se ole sininen, sehän on sininen ja valkoinen”. Thomin ajatus on, että lippu ajatellaan pintana ja sana JA ei viittaa varsinaisesti logiikkaan, vaan siihen, että siniset ja valkoiset alueet ovat geometrisesti lähekkäin.

Tavallaan tässä ollaan tilanteessa, joka on hyvin erilainen kuin mitä logiikassa normaalisti opetetaan. Yleensähän ajatellaan, että JA tarkoittaa, että kaksi eri asiaa on voimassa yhtä aikaa. Lipun tapauksessa kuitenkin vain jompikumpi asioista on voimassa: jokainen lipun piste on joko sininen TAI valkoinen.

Joukko-opillisesti JA usein yhdistetään leikkaukseen. Lipun tapauksessa JA kuitenkin vastaa yhdistettä, koska Suomen lippu on yhdiste valkoisista ja sinisistä alueista.

Jacques Prévertin runo *Composition française* (ranskalainen ainekirjoitus) [6] alkaa näin:

> Tout jeune, Napoléon était très maigre et officier d'artillerie.
>
> Nuorena Napoleon oli hyvin laiha ja tykistöupseeri.

Tämä taas on loogisesti (ja varmaankin myös historiallisesti) täysin oikein, mutta kielellisesti väärin, koska ei ole tapana yhdistää adjektiivia ja substantiivia JA-sanalla. Geometrisesti tämän voisi ajatella niin, että adjektiivit ja substantiivit ovat kategorioina niin ”kaukana” toisistaan, että niitten yhdistäminen tällä tavalla ei ole mielekästä. Alkeislogiikka on siis varsin hyödytön työkalu luonnollisen kielen analyysiin.

Logiikka 1

Palataan sitten logiikan kaavoihin. Zhegalkin sai idean polynomien käyttämisestä logiikassa lukiessaan Whiteheadin ja Russellin kuuluisaa kirjaa *Principia Mathematica* [14].[5] Ensimmäisen osan sivuilla 98–126 on kymmeniä ellei peräti satoja alkeislogiikan aputuloksia. Tarkkaa lukumäärää on hiukan hankala määrittää, koska lauseet on numeroitu niin epäloogisesti. Kirjan ensimmäisessä osassa myös luvun 5 jälkeen seuraa luku 9. Jotenkin tuntuisi, että tämänkaltaiset käytännöt eivät olisi hyvää mainosta logiikkaa käsittelevälle teokselle. Joka tapauksessa kaikki nuo logiikan kaavat voidaan helposti todistaa polynomien avulla, kuten Zhegalkin huomasi.

Ennen kuin katsotaan tätä tarkemmin tarvitaan vielä yksi käsite: tautologia. Olkoon F jokin looginen lauseke, jossa esiintyy väitteitä X ja Y. F on siis jokin mielekäs kombinaatio merkinnöistä, jotka ovat yhtälössä (5) vasemmalla puolella. Olkoon f vastaava polynomi, joka saadaan käyttämällä yhtälön (5) oikeaa puolta; siis $f \in \mathbb{Z}_2[x, y]$. Nyt sanotaan, että F on tautologia, jos $\mathsf{NF}(f) = 1$.

Tarkastellaan lauseketta

$$F = \big(\neg(X \vee Y)\big) \Leftrightarrow \big(\neg X \wedge \neg Y\big).$$

Yhtäsuuruusmerkki tulkitaan tässä niin, että F on yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella oleva merkkijono, joka voidaan muuttaa polynomiksi f käyttämällä vastaavuuksia (5). Nyt F on muotoa $F = F_0 \Leftrightarrow F_1$, joten $f = 1 + f_0 + f_1$. Mutta yhtälössä (6) laskettiin, että $f_0 = f_1$, joten $f = 1$ mistä seuraa, että F on tautologia.

Logiikan tulokset hyvin usein muotoillaan niin, että sanotaan, että jokin lauseke on tautologia. Esimerkiksi suurin osa (tai ehkä kaikki) Principian sivuilla 98–126 olevista tuloksista on tautologioita. Yleisesti ottaen loogisia lausekkeita voidaan sieventää, kun lasketaan lauseketta vastaava Zhegalkinin polynomi. Olkoon

$$\begin{aligned} F &= \Big(X \vee \big(Y \Rightarrow \neg X\big) \wedge \Big(\big(\neg Y \vee \neg X\big) \Rightarrow \big(\neg X \Rightarrow Y\big)\Big) \\ &= F_0 \wedge F_1 = (X \vee F_2) \wedge (F_3 \Rightarrow F_4). \end{aligned}$$

[4] Vaikka Thom ei puhu Suomen lipusta, hänen esimerkissään tosiaan on sinivalkoinen lippu.

[5] Nämä ovat myös netissä:
https://archive.org/details/dli.ernet.247278/page/n1/mode/2up
https://archive.org/details/PrincipiaMathematicaVol2/mode/2up
https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.220247/mode/2up

Vastaavat polynomit ovat

$$\begin{aligned}
f_2 &= 1 + y + (1 + x)y, \\
f_3 &= 1 + xy, \\
f_4 &= 1 + 1 + x + (1 + x)y, \\
f_0 &= x + f_2 + xf_2, \\
f_1 &= 1 + f_3 + f_3 f_4, \\
f &= f_0 f_1 \\
&= x^4y^3 + x^4y^2 + x^3y^2 + x^2y^3 + x^3y + x + y.
\end{aligned}$$

Nyt laskemalla jakojäännökset tai käyttämällä kaavaa (3) saadaan $\mathsf{NF}(f) = x + y + xy$. Voidaan siis sanoa, että F sieveni muotoon $X \vee Y$, ja tämä voidaan ilmaista niin, että

$$F \Leftrightarrow X \vee Y$$

on tautologia.

Jos sitten on enemmän väitteitä, niin otetaan käyttöön enemmän muuttujia. Esimerkiksi pitäisi osoittaa, että seuraava lauseke on tautologia [5, s. 3, kaava (3)], [14, vol. 1, s. 118, lause 4·4]:

$$F = \big(X \wedge (Y \vee Z)\big) \Leftrightarrow \big((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)\big).$$

Tätä vastaa polynomi $f \in \mathbb{Z}_2[x, y, z]$; käyttämällä kaavoja (5) saadaan

$$\begin{aligned}
f &= 1 + x(y + z + yz) + xy + xz + x^2yz \\
&= 1 + xyz + x^2yz.
\end{aligned}$$

Koska $x^2 + x$ on nollafunktio, niin $\mathsf{NF}(f) = 1$, joten F on tautologia.

Todistus etenee aina samalla tavalla:

(i) Olkoon annettu jokin logiikan kaava F, joka sisältää väitteitä $X_1, \ldots, X_n$.

(ii) Muodostetaan kaavaa F vastaava polynomi $f \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ käyttäen vastaavuuksia (5).

(iii) Lasketaan polynomia f vastaava Zhegalkinin polynomi $\mathsf{NF}(f)$. Jos $\mathsf{NF}(f) = 1$, niin F on tautologia.

Tulkitaan tämä vielä hiukan toisin. Yllä mainittu polynomi f on myös funktio $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$, ja sitä vastaava Zhegalkinin polynomi $\mathsf{NF}(f)$ on kanoninen muoto tälle funktiolle. Huomaa, että logiikan oppikirjoissa ei käytetä sanaa funktio, vaan totuusarvotaulu(kko).

Katsotaan vielä eräs esimerkki [14, vol. 1, s. 113, lause 3·47]. Pitäisi osoittaa, että seuraava lauseke on tautologia. Whitehead ja Russell sanovat, että tämä tulos on peräisin Leibnizilta.

$$\begin{aligned}
F = \big((A \Rightarrow X) \wedge (B \Rightarrow Y)\big) \Rightarrow \\
\big(A \wedge B \Rightarrow X \wedge Y\big).
\end{aligned}$$

Jaetaan taas lauseke osiin:

$$\begin{aligned}
F &= F_0 \Rightarrow F_1, \\
F_0 &= (A \Rightarrow X) \wedge (B \Rightarrow Y), \\
F_1 &= A \wedge B \Rightarrow X \wedge Y.
\end{aligned}$$

ja lasketaan vastaavat polynomit:

$$\begin{aligned}
f_0 &= (1 + a + ax)(1 + b + by), \\
f_1 &= 1 + ab + abxy, \\
f &= 1 + f_0 + f_0 f_1, \\
&= a^2b^2x^2y^2 + a^2b^2x^2y + a^2b^2xy^2 + a^2bx^2y + \\
&\quad ab^2xy^2 + a^2b^2x + a^2b^2y + a^2bxy + ab^2xy + \\
&\quad a^2b^2 + a^2bx + ab^2y + abxy + a^2b + ab^2 + ab + 1.
\end{aligned}$$

Laskemalla jakojäännökset nähdään, että $\mathsf{NF}(f) = 1$, joten F on tautologia. Tämä esimerkki oli jo hiukan työläs käsin laskien, mutta Sagen avulla hyvin helppo:

```
R1 = PolynomialRing(GF(2), 'a, b, x,y');
a,b,x,y = R1.gens();
f0=(1+a+a*x)*(1+b+b*y);
f1=1+a*b+a*b*x*y; f=1+f0+f0*f1;
g0=a^2+a; g1=b^2+b;
g2=x^2+x; g3=y^2+y;
qr=f.quo_rem(g0);r1=qr[1];
qr=r1.quo_rem(g1);r2=qr[1];
qr=r2.quo_rem(g2);r3=qr[1];
qr=r3.quo_rem(g3);r4=qr[1];
```

Polynomi r4 on $\mathsf{NF}(f)$, ja yllä olevat laskut antavat $\mathsf{NF}(f) = 1$.

Metsänkylän ja Näätäsen kirjassa [5] on sivulla 3 lueteltu 12 tautologiaa. Lukija voi harjoitustehtävänä tarkistaa, että todistukset polynomien avulla ovat hyvin helppoja.

$1 + 1 = 2$

Jos googlettaa hakusanoilla ”principia mathematica 1+1=2”, niin saa yli 300000 osumaa. Tällä viitataan usein kuvassa 1 olevaan lauseeseen 54·43, jossa ei kuitenkaan vielä varsinaisesti todisteta, että $1 + 1 = 2$, vaan vasta pohjustetaan tätä.

∗54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . {*}54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[{*}51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[{*}13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . {*}11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . {*}11{\cdot}54 . {*}52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Kuva 1: Whiteheadin ja Russellin kuuluisa lause.

Oleellisesti lause sanoo, että jos $A = \{p\}$, $B = \{q\}$ ja $p \neq q$, niin joukossa $A \cup B = \{p, q\}$ on kaksi alkiota.[6]

Kyseinen lause on sivulla 362, ja koko kirjassa on yli 700 sivua, mutta Lauseeseen 110·643, jossa $1+1=2$ sitten lopulta todistetaan, päästään kuitenkin vasta kirjasarjan toisessa osassa, sivulla 83. Tarkkaan ottaen merkkiä + ei käytetä, vaan jostain syystä on valittu muoto $1 +_\circ 1 = 2$. Kirjoittajat huomauttavat lauseen todistuksen jälkeen:

> The above proposition is occasionally useful.

En tiedä, missä vaiheessa kertolasku määritellään, vai päästäänkö edes niin pitkälle.

Viitteet

[1] G. V. Bard, *Sage for undergraduates*, 2nd ed., American Mathematical Society, 2022.

[2] L. Carroll, *Through the looking-glass, and what Alice found there*, 1871.

[3] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[4] I. I. Gégalkine, *Sur le calcul des propositions dans la logique symbolique*, Mat. Sb. **34** (1927), no. 1, 9–28.

[5] T. Metsänkylä and M. Näätänen, *Algebra*, 2010, https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/algebra.pdf.

[6] J. Prévert, *Paroles*, Gallimard, 1976.

[7] R. Thom, *"Modern" mathematics: An educational and philosophic error?*, American Scientist **59** (1971), no. 6, 695–699.

[8] J. Tuomela, *Tarinoita polynomeista (osa 1)*, Solmu (2022), no. 2.

[9] ———, *Tarinoita polynomeista (osa 2)*, Solmu (2022), no. 3.

[10] ———, *Tarinoita polynomeista (osa 3)*, Solmu (2023), no. 2.

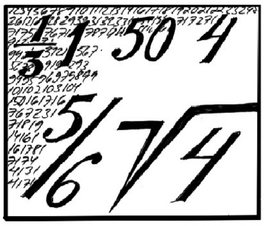
[11] ———, *Tarinoita polynomeista (osa 4)*, Solmu (2023), no. 3.

[12] J. von zur Gathen and J. Gerhard, *Modern computer algebra*, 3rd ed., Cambridge University Press, 2013.

[13] J. Walker, *Codes and curves*, Student Mathematical Library, vol. 7, American Mathematical Society, 2000.

[14] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica, vols. I–III*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1925-27.

[6] Lausetta ja sen todistusta on tarkemmin pohdittu täällä: https://blog.plover.com/math/PM.html



Näppärää numerologiaa

Petri Laarne
Väitöskirjatutkija, Helsingin yliopisto
`https://www.nollakohta.fi`

Päässälasku on hauska harrastus. Monesta laskusta selviää nopeammin kuin kaveri ehtii avata kännykkänsä, kunhan osaa pyöritellä pieniä lukuja ja tuntee muutaman muistisäännön. Matemaattiselta kannalta jotkin säännöt menevät *numerologian* puolelle, eli kyse on enemmänkin satunnaisista yhteyksistä, mutta viihdyttäviä ne ovat yhtä kaikki.

Tästä listasta löytyy muutama laskutemppu, joilla voi ihastuttaa ystäviään ja hämmästyttää vihollisiaan – ja kaikki temput eivät olekaan sattumaa.

Lisää "matemaattisen ninjan" temppuja voit oppia esimerkiksi Colin Beveridgen blogista (englanniksi) [1].

Maileista kilometreihin

Fibonaccin lukujonolla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … on monta jännää ominaisuutta. Niistä yksi on, että peräkkäisten termien suhde lähestyy kultaista leikkausta, joka on likimain 1,618.

Vähemmän taianomainen juttu on, että yksi maili on noin 1,609 kilometriä. Tämä on kovin lähellä edellistä suhdelukua! Jos siis ihmettelet tienviittaa brittiläisen imperiumin jäänteillä, voit muuntaa yksiköiden välillä Fibonaccin jonoa käyttäen. 5 mailia on noin 8 kilsaa, ja 13 kilometriä vastaa noin 8 mailia.

(Toinen läheinen sattuma: $\ln(5) \approx 1{,}609$. Logaritmien soveltaminen päässälaskuun on ihan oma tarinansa.)

Kymmenellä jaollisten mailien kohdalla 1,6 saattaa olla näppärämpi muuntosuhde – 20 mailia on 32 kilometriä. Kakkosen potenssit kunniaan!

Kakkosen neliöjuuri

Kakkosesta puheen ollen: tiesitkö, että $\sqrt{2} \approx 1{,}414$? Mutta vielä jännempää – tämän käänteisluku $1/\sqrt{2}$ on likimain 0,707. Desimaalit jaetaankin siis vain kahdella. Kun pohdit asiaa tarkemmin, huomaat ettei tämä ole ollenkaan sattumaa.

Paperimitta

Kakkosen neliöjuureen törmää usein vaikkapa geometriassa. Yksi näppärä trikki liittyy tavalliseen paperiarkkiin. A4-arkin koko on $21 \times 29{,}7$ senttimetriä. Pitkä sivu on millimetrin tarkkuudella $\sqrt{2}$ kertaa niin pitkä kuin lyhyt.

Omituiset senttimitat selittyvät hienolla logiikalla. Kun A4-kokoisen paperin taittaa kahtia, saadaan A5-arkki. Tämän pitkä sivu on taas $\sqrt{2}$-kertainen suhteessa lyhyeen sivuun. Toisin päin puolestaan kaksi vierekkäistä A4-arkkia muodostaa A3-arkin, jolla on sama suhdeluku.

Kaiken alku ja juuri on A0-arkki, jonka pinta-ala on... täsmälleen yksi neliömetri! Siispä A4:n pinta-ala on $(1/2)^4 = 1/16$ neliömetriä.

Paperin vahvuus ilmoitetaan yleensä grammoina per neliömetri. Esimerkiksi tavallinen tulostuspaperi on noin 80 g/m^2. Tästä voi näppärästi laskea, että yksi A4-arkki painaa 5 grammaa.

Korkojen 72-sääntö

Jos suosimasi paperi on ennemmin setelin muotoinen, kannattaa seuraava temppu panna korvan taakse.

Mikäli teet p prosenttia vuodessa kasvavan sijoituksen, menee sijoituksen tuplaantumiseen noin $72/p$ vuotta. Esimerkiksi kuuden prosentin korolla alkupanos tuplaantuu suunnilleen 12 vuodessa.

Tämä sääntö on tunnettu jo vuoden 1500 tienoilla. 72 ei ole aina tarkin mahdollinen luku, mutta kahdella ja kolmella jaollisuus tekee siitä näppärän päässälaskuun. Viidellä jaollisiin prosentteihin 70 on toki helpompi suhdeluku.

Laskukaavan taustalla on totta kai oikeaa matikkaa. Tarpeeksi tiheästi maksettavaa korkoa voidaan arvioida eksponenttifunktiolla, ja yhtälöstä $(1+p/100)^n = 2$ voidaan ratkaista

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1+p/100)} \approx \frac{72}{p}.$$

Arvio on tarkin muutaman prosentin tienoilla, joten pikavippien vuosikorkoihin tätä ei kannata käyttää!

Riittävän tarkat π ja e

Lienee pakko mainita myös se vakio, jota on muodikasta opetella ulkoa. “How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics...” Lorun sisältöä en ala suomentamaan, mutta sanojen pituuksia laskemalla saa selvitettyä 14 desimaalin edestä piitä. Se riittää ihan kaikkeen.

Sanon siltikin: tylsää! Tällä likiarvolla ei laske ilman apuvälineitä juuri mitään. Sitä paitsi kansainvälisen matikkapäivän juhliminen πrakoita nauttien 14.3. on takaperoista ja kovin... amerikkalaista.

Paljon paremmat bileet ovat 22. heinäkuuta. Nimittäin $22/7$ on erittäin hyvä likiarvo piille, ja murtolukuna se sopii päässälaskuun. Eikä tämän arvion desimaaleihin tarvita laskinta – jatka lukemista!

Sitä ennen kuitenkin pieni historiallinen tärppi. Luvun e desimaalien 2,7 1828 1828 4... alussa toistuu neljän numeron pätkä. Luonnolliseen logaritmiin voi siis hyvin liittää jonkin menneen tapahtuman: vuonna 1828 yliopisto muutti Turusta Helsinkiin, Elias Lönnrot lähti ekalle runonkeruureissulleen, ja esimerkiksi Jules Verne syntyi. Kaksi faktaa yhdellä muistisäännöllä!

Seitsemäsosan desimaalit

Toistuvista desimaaleista ehkä kummallisin liittyy seitsemällä jakamiseen. Huomaatko kuvion?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= 0{,}142857\ 142857\ldots \\
\frac{2}{7} &= 0{,}285714\ 285714\ldots \\
\frac{3}{7} &= 0{,}428571\ 428571\ldots \\
\frac{4}{7} &= 0{,}571428\ 571428\ldots \\
\frac{5}{7} &= 0{,}714285\ 714285\ldots \\
\frac{6}{7} &= 0{,}857142\ 857142\ldots
\end{aligned}$$

Jokaisessa desimaalikehitelmässä toistuu loputtomiin sarja 142857, vain eri kohdasta aloitettuna. Sarjankin voi pilkkoa vielä tuplautuviin osiin 14, 28 ja $56 + 1$.

Tämä kaikki ei voi olla yhteensattumaa. Mistä on kyse?

No, $1/7$ on jakolaskuna “0, jää 1”. Kerrotaan jakojäännös kymmenellä, ja $10/7$ on “1, jää 3”. Siispä ensimmäinen desimaali on 1. Toista desimaalia varten lasketaan $30/7$ eli “4, jää 2”, kolmatta varten $20/7$, ja niin edelleen.

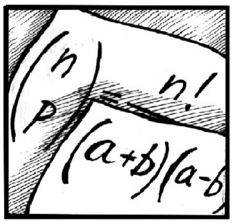
Jatka itse tätä laskua! Huomaat pian, että lasket samaa laskua toista kertaa. Jäännökset muodostavat kuuden luvun mittaisen syklin, ja vieläpä sellaisen, jossa esiintyvät luvut $1, \ldots, 6$ mutta eri järjestyksessä. Eri jakolaskut $n/7$ vastaavat eri aloituskohtia tässä syklissä.

Samanlaisia sääntöjä, mutta toki huomattavasti pidempiä sellaisia, löytyy tietyille muillekin alkuluvuille. Seitsemästä seuraava on 17. Koko lista löytyy OEIS-tietokannasta [2].

Viitteet

[1] `https://flyingcoloursmaths.co.uk/blog/`

[2] A001913: *Full reptend primes: primes with primitive root 10.* Online Encyclopedia of Integer Sequences. `https://oeis.org/A001913`



Funktioiden sortteeraamisesta

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

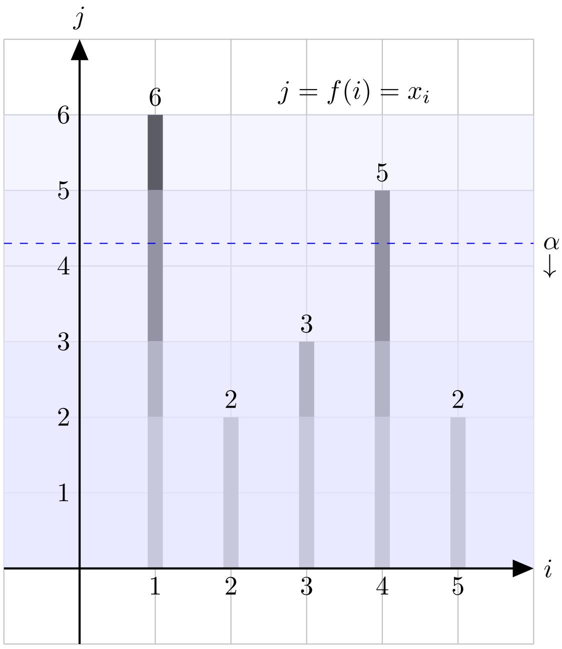
Arvot järjestykseen — johdatusta arvokeskusteluun

Päättyvän lukujonon alkioiden järjestäminen[1] esimerkiksi laskevaan suuruusjärjestykseen on helppoa ainakin, jos luvut ovat pieniä positiivisia kokonaislukuja, niitä on vähän, ja ne on esitetty arabialaisilla numeroilla suoraan, turhia venkoilematta:

$$(6,2,3,5,2) \xrightarrow{\text{sort}} (6,5,3,2,2).$$

Epävarmuutta aiheuttaa korkeintaan se, kumpi kakkosista tulee laittaa viimeiseksi. Tässä artikkelissa ei puututa filosofisiin kysymyksiin. Tarkoituksena ei myöskään ole esitellä erilaisia lajittelualgoritmeja. Artikkelin tavoitteena on tutkia, mitä lajittelulla tarkoitetaan silloin, kun lajiteltavia lukuja on äärettömän monta. Varsinainen ongelma on, miten reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion eli reaalifunktion arvot laitetaan suuruusjärjestykseen; toisin sanoen kuinka funktio järjestetään uudeksi funktioksi niin, että jälkimmäisessä on edellisen arvot vaikkapa laskevaan suuruusjärjestykseen lajiteltuina? Voidaanko järjestäminen toteuttaa jonkinlaisella reaalilukuvälin permutoinnilla?

Esimerkkilukujono esitetään ohessa pylväsdiagrammina. Funktioiden järjestämistä ennakoiden luodaan havainnollinen mielikuva, jossa pylväät ovat aluksi veden pinnan alla uppeluksissa. Veden vähetessä pylväät pulpahtavat esiin yksi tai useampi kerrallaan. Vedenpinnan tasoa merkitään kreikkalaisella kirjaimella α. Kun vesi laskee eli α pienenee, ensimmäisenä veden alta ilmestyy korkein pylväs. Silloin $\alpha = 6$. Vedenpinnan edelleen laskiessa pylväät ilmestyvät näkyviin laskevassa suuruusjärjestyksessä, jolloin ne on helppoa poimia jonoon samassa järjestyksessä. Kun pinta saavuttaa tason $\alpha = 2$, viimeisinä vedenpinnan puhkaisevat kaksi lyhintä pylvästä.



Päättyvä lukujono $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liittää indeksi-

[1] Järjestämisestä käytetään myös nimityksiä lajittelu, sorttaus, sortteeraaminen ja uudelleenjärjestäminen.

joukon $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ jokaiseen alkioon i reaaliluvun x_i. Itse asiassa lukujono onkin funktio, nimittäin kuvaus

$$f : I_n \to \mathbb{R}, \quad f(i) = x_i.$$

Jos jono $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ on saatu jonosta $\boldsymbol{x}$ permutoimalla jälkimmäisen alkiot laskevaan suuruusjärjestykseen, on muodostettu uusi funktio

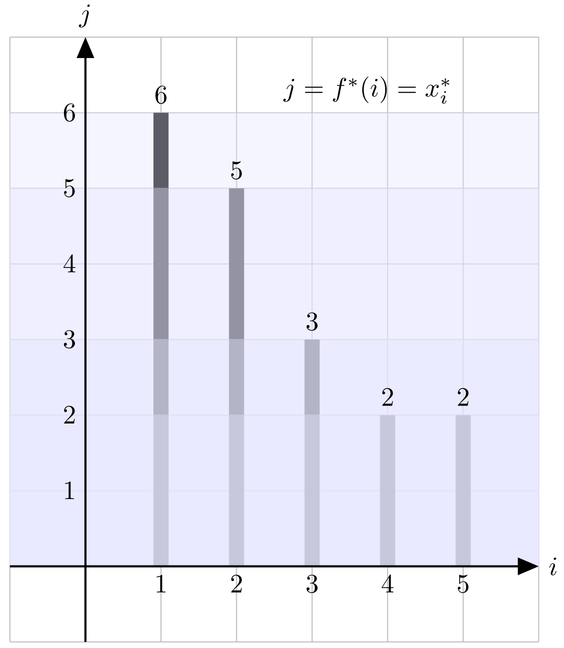
$$f^* : I_n \to \mathbb{R}, \quad f^*(i) = x_i^*.$$

Tälle uudelle funktiolle pätee

$$f^*(1) \geq f^*(2) \geq \ldots \geq f^*(n).$$

Jos funktio f saa tietyn arvon k kertaa, toisin sanoen kyseinen luku esiintyy k kertaa jonossa $\boldsymbol{x}$, myös funktio f^* saa tuon arvon tasan k kertaa. Tämä on tärkeä havainto siirryttäessä päättyvistä jonoista päättymättömiin ja lopulta reaalifunktioihin.

Järjestämisen jälkeen esimerkkipylväikkö näyttää tältä:



Koska jonossa $\boldsymbol{x}^*$ on täsmälleen samat luvut kuin jonossa $\boldsymbol{x}$, summan vaihdannaisuuden seurauksena

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^*.$$

Jos $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on toinen jono, vektorien pistetulon kaltaisille tulojen summille pätevät **uudelleenjärjestelyepäyhtälöt** (engl. *rearrangement inequality*)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* y_{n+1-i}^* \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i^*.$$

Ne on hyvin helppoa todistaa *binäärisille* eli pelkistä nollista ja ykkösistä muodostetuille jonoille. Yleisen tapauksen todistus on esitetty Wikipedian sivulla [5]. Itse asiassa vasen ja oikea epäyhtälö ovat yksi ja sama tulos kahdella eri tavalla esitettynä, mikä nähdään tarkastelemalla jonon $\boldsymbol{y}$ sijaan vastajonoa $-\boldsymbol{y} = (-y_1, -y_2, \ldots, -y_n)$.

Uudelleenjärjestelyepäyhtälöllä on hauska fysikaalinen tulkinta. Lukuja y_i voidaan ajatella painoina, jotka on kiinnitetty vaakasuoraan tankoon etäisyyksien x_i päähän tangon toisessa päässä sijaitsevasta referenssipisteestä. Suurin momentti $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ saadaan aikaan, kun raskaimmat painot kiinnitetään mahdollisimman kauas referenssipisteestä. Kun isot painot ovat lähellä referenssipistettä, momentti on vastaavasti pienin.

Sananen päättymättömistä jonoista

Päättymättömän jonon järjestäminen ei aina onnistu. Esimerkiksi positiivisten rationaalilukujen jonossa

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{2i-1}{2i}, \frac{2i+2}{2i+1}, \ldots\right)$$

on ääretön määrä sekä ykköstä pienempiä alkioita että ykköstä suurempia alkioita. Vaikka ne laitettaisiin mihin tahansa järjestykseen, ensimmäisen ykköstä pienemmän alkion jälkeen olisi jossain kohdassa ykköstä suurempi alkio, ja sen jälkeen taas jossain kohdassa ykköstä pienempi alkio. Ei sellainen jono ole sen enempää nouseva kuin laskevakaan. Jonolta pitää vaatia jotain, että se voidaan järjestää.

Jos rajoitutaan positiivisiin lukuihin ja niiden järjestämiseen laskevaksi jonoksi, riittävä joskaan ei välttämätön ehto jonon järjestämisen onnistumiseksi on, että jonolla on raja-arvo nolla. Sortteeraaminen tehdään samalla vedensäännöstelytoimenpiteellä kuin päättyvänkin jonon järjestely. Yhtälö $\sum_i x_i = \sum_i x_i^*$ ja epäyhtälö $\sum_i x_i y_i \leq \sum_i x_i^* y_i^*$ pätevät myös päättymättömille summille ainakin, jos ne suppenevat. Todistus on ilmeisin muutoksin sama kuin päättyvillekin summille.

Reaalifunktion järjestäminen

Eteen tulevia hankalan näköisiä kaavoja ei tule pelästyä. Lajittelun idean ymmärtäminen onnistuu ilman kaavojakin muun tekstin ja kuvien avulla. Tarkkaa lukijaa varten sanottakoon, että turhan monimutkaisuuden välttämiseksi funktioiden uudelleenjärjestelyssä rajoitutaan sellaisiin reaalimuuttujan reaaliarvoisiin funktioihin f, että

i) f on kuvaus $[0, \infty[\to \mathbb{R}$;

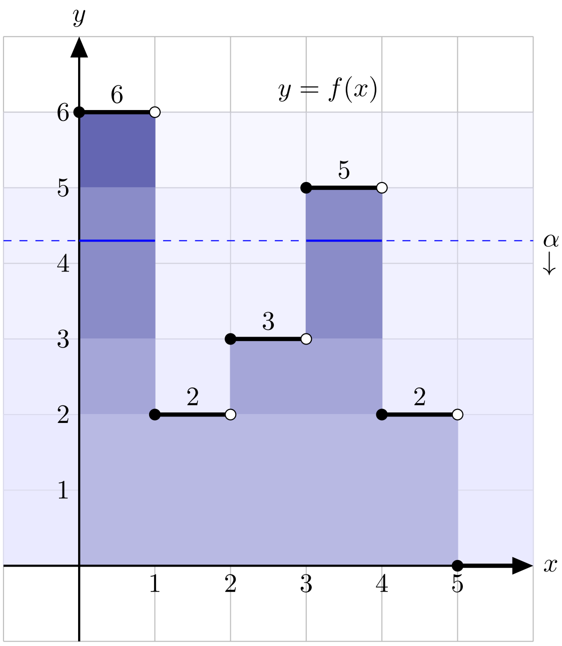
ii) f on jatkuva ainakin paloittain[2];

iii) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$;

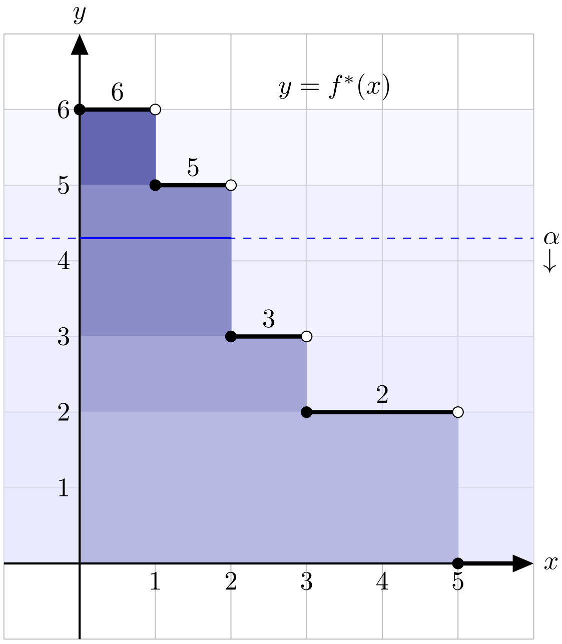
iv) $f(x) = 0$ riittävän suurilla x.

Viimeinen ehto tarkoittaa sellaisen positiivisen (ja yleensä hyvin suuren) luvun M olemassaoloa, että $f(x) = 0$ kaikilla lukua M suuremmilla muuttujan x arvoilla; ts. f yhtyy nollafunktioon (so. vakiofunktioon nolla), kunhan mennään tarpeeksi kauas origosta. Ehdon ansiosta vältytään eräiltä raja-arvotarkasteluilta. Samoin vältytään tilanteelta, jossa erään funktion arvoksi tulisi joskus ääretön.

Sortteeraamisen tarkastelu aloitetaan yksinkertaisesta esimerkistä, nimittäin paloittain vakiosta funktiosta, jolla on samat arvot kuin edellä tarkastellulla viiden alkion mittaisella jonolla. Funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ saa väleillä $[0, 1[$, $[1, 2[$, $[2, 3[$, $[3, 4[$, $[4, 5[$ ja $[5, \infty[$ arvot 6, 2, 3, 5, 2 ja 0 tässä järjestyksessä. Jokainen arvo tulee äärettömän monessa pisteessä. Voidaanko kuvitella mitään järkevää tapaa järjestää funktio f laskevaksi funktioksi f^*?



Aikaisemmin sanotusta tulee varmaankin ensimmäisenä mieleen funktion f upottaminen uppeluksiin veden alle, minkä jälkeen annetaan vedenpinnan laskea. Pylväiden tapaan funktio f paljastuu pikkuhiljaa esiin veden alta, korkeimmat osat ensiksi. Funktiohan muistuttaakin pylväikköä, pylväät ovat vaan leveämpiä ja kiinni toisissaan. Voidaan siis tehdä samat temput kuin pylväille. Näin syntyy seuraavan kuvan esittämä uusi funktio $f^* : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.



Huomataan, että vedenkorkeudella α sekä järjestetyn funktion että alkuperäisen funktion kuvaaja kulkee täsmälleen saman vaakasuuntaisen matkan vedenpinnan yläpuolella (katkoviivaa täydentävät katkottomat osuudet). Täsmällisesti ilmaisten vedenpinnan tasoon α liittyvän **tasojoukon** (engl. *level set*)

$$E_\alpha(f) = \{\, x \in [0, \infty[\mid f(x) > \alpha \,\}$$

mitta[3] (engl. *measure*)

$$\mu(E_\alpha(f)),$$

ei muutu funktiota järjestettäessä. Tämä mitan muuttumattomuus on juuri se ominaisuus, joka tekee funktion uudelleenjärjestelystä laskevaksi funktioksi (engl. *decreasing rearrangement*) järkevän: kaikilla $\alpha \geq 0$

$$\mu(E_\alpha(f^*)) = \mu(E_\alpha(f)).$$

Mitta voidaan esittää myös integraalina:

$$\mu(E_\alpha(f)) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{f>\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{1}_{f^*>\alpha}(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä on merkitty

$$\mathbb{1}_{f>\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > \alpha \\ 0, & f(x) \leq \alpha. \end{cases}$$

Funktion f^* arvo pisteessä x syntyy niin, että annetaan vedenpinnan laskea niin kauan kuin mitta $\mu = \mu(E_\alpha(f))$ on korkeintaan x. Tasan siinä kohdassa, jossa ehto $\mu \leq x$ lakkaa olemasta voimassa, ja sen tilalle

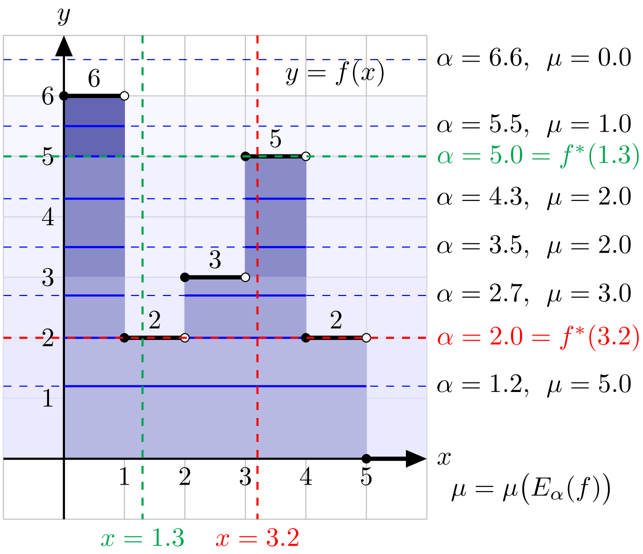
[2] Paloittain jatkuvalla funktiolla on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, joissa sillä on äärelliset toispuoleiset raja-arvot.

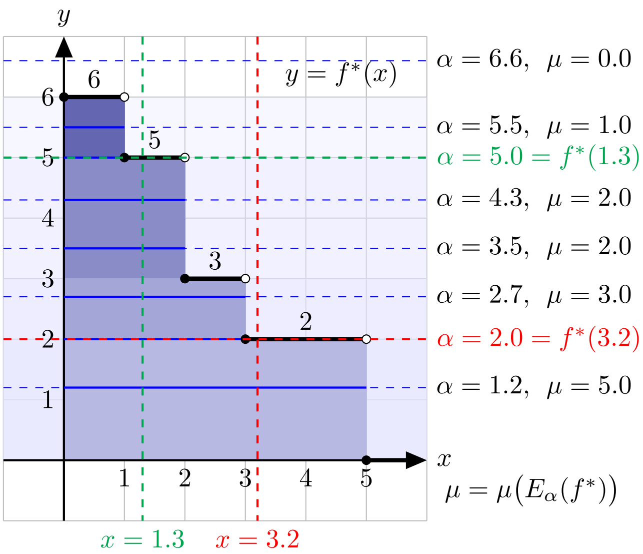
[3] Mitta on yleinen matemaattinen käsite. Tämän artikkelin lukijalle riittää tietää, että erillisistä jananpätkistä koostuvan joukon mitta on sama kuin kyseisten jananpätkien yhteenlaskettu pituus.

astuu ehto $\mu > x$, asetetaan $f^*(x) = \alpha$. Toisin sanoen: kun vedenpinta laskee niin paljon, että saarien yhteenlaskettu mitta on ylittämäisillään arvon x, merkitään vedenkorkeus α muistiin, jolloin $f^*(x) = \alpha$. Lukijaa kehotetaan miettimään asiaa seuraavien kahden kuvan avulla. Vahvennetut katkoviivat havainnollistavat arvojen $f^*(1.3)$ ja $f^*(3.2)$ määräytymistä. Laskeva funktio f^* tietyssä mielessä pannaan kokoon vaakasuorista viipaleista

$$E_\alpha(f) \times \{\alpha\} = \{\, (x, \alpha) \,|\, x \geq 0,\ f(x) > \alpha \,\}$$

liu'uttamalla ne kullakin tasolla erikseen peräkkäin vasemmalle tiiviiksi, katkeamattomaksi janaksi.





Kuuluisa *Cavalierin periaate* [2] takaa sen, että funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala ei muutu liu'uttamisen seurauksena:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f^*(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kun kaksi funktiota f ja g uudelleenjärjestetään laskeviksi funktioiksi f^* ja g^*, funktionelikolle pätee **Hardyn-Littlewoodin epäyhtälö** (engl. *Hardy-Littlewood inequality*)

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty f^*(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x,$$

joka todistetaan hieman muunnetussa yleisemmässä tilanteessa Wikipedian sivulla [3]. Aikaisemmin esiintyneet yhtälö $\sum_i x_i = \sum_i x_i^*$ ja epäyhtälö $\sum_i x_i y_i \leq \sum_i x_i^* y_i^*$ ovat samaa sukujuurta vastaavien integraaliyhtälön ja -epäyhtälön kanssa (summa on erikoistapaus yleisestä integraalin käsitteestä).

Matematiikan kieli pyrkii olemaan täsmällistä, eikä mitään määritelmää tai tulosta ole sallittua jättää pelkästään havainnollisen mielikuvan varaan. Funktion f^* täsmällinen määritelmä on tämä:

$$f^* : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f^*(x) = \inf \{\, \alpha \geq 0 \,|\, \mu\big(E_\alpha(f)\big) \leq x \,\}.$$

Tässä inf tarkoittaa alhaalta rajoitetun joukon infimumia eli suurinta alarajaa. Jos käsite ei ole lukijalle tuttu, se kannattaa opiskella esimerkiksi Wikipedian sivulta [4]. Itse asiassa funktion f^* määritelmässä joukko, jolle infimum muodostetaan, on aina tyyppiä $[a, \infty[$, missä a on reaaliluku. Sille, vastaavalle avoimelle välille $]a, \infty[$ ja yleisemminkin ei-tyhjälle välille infimum on välin vasen päätepiste eli tässä tapauksessa a.

Epäaito epäyhtälö $\mu\big(E_\alpha(f)\big) \leq x$ funktion f^* määritelmässä takaa sen, että funktio f^* on oikealta jatkuva samoin kuin esimerkiksi todennäköisyysjakaumien kertymäfunktiot:

$$\lim_{h \to 0^+} f^*(x + h) = f^*(x).$$

Seuraavat kaksi kuvaa esittävät jatkuvan funktion järjestämistä alenevaan järjestykseen vedenlaskuperiaatteella. Ensimmäisen kuvan funktio konstruoidaan jatkamalla sinikäyrän jaksopari nollafunktiona äärettömyyteen:

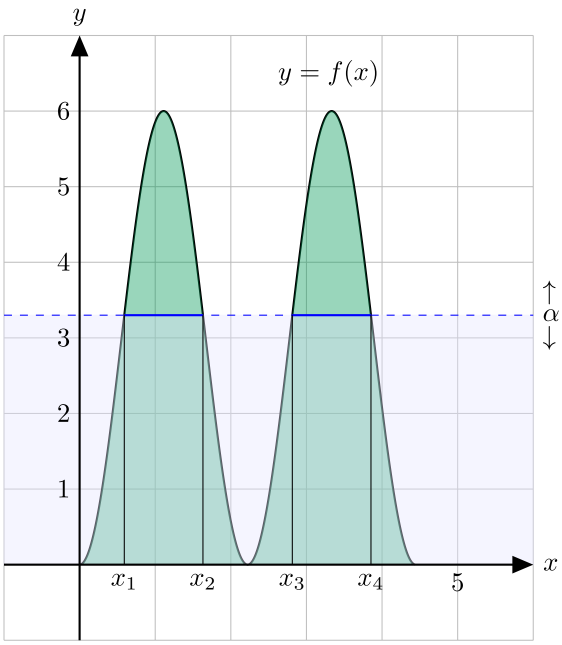
$$f(x) = \begin{cases} A\sin^2(wx)\,, & 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{w} \\ 0\,, & x > \frac{2\pi}{w}\,, \end{cases}$$

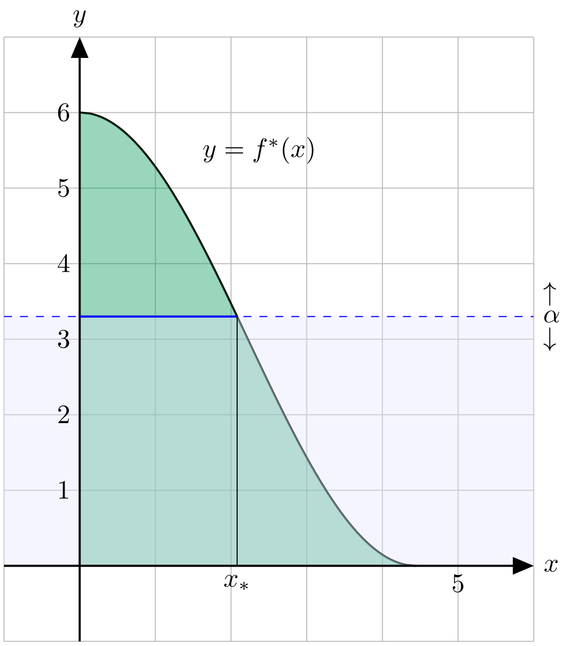
missä

$$A = 6, \quad w = \frac{9\pi}{20}\,.$$

Jälkimmäinen kuva esittää järjestettyä funktiota. Sillä on lauseke

$$f^*(x) = \begin{cases} A\cos^2\left(\frac{1}{4}\,wx\right), & 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{w} \\ 0\,, & x > \frac{2\pi}{w}\,. \end{cases}$$

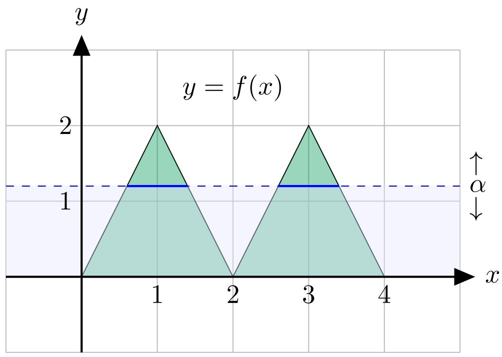




Kohdissa x_1, x_2, x_3 ja x_4 olevat pylväät kuvautuvat järjestettäessä yhdeksi pylvääksi kohtaan x_*. Tällainen ei ole sallittua lukujonojen sorttauksessa, permutoitaessa eri pylväät säilyvät erillisinä. Huomaa kuitenkin, että yhteen sulautuvien x-arvojen joukko on nollamittainen. Lukusuorallahan mitta on joukon pituus, ja yhden pisteen mitta on nolla. Sen takia äärellisen monen pisteen muodostaman joukonkin mitta on nolla. Myös äärettömän joukon mitta on usein nolla, esimerkkinä vaikkapa luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se koostuu nollamittaisista pisteistä, joiden yhteenlaskettu mitta on $0 + 0 + 0 + \ldots = 0$.

Kaksoiskolmio – lukujonon ja funktion vertailua

Funktion uudelleenjärjestämisen kannalta kahden aallon sinifunktio on oleellisesti samanlainen kuin pelkistetty ja laskennallisesti helpompi kaksoiskolmiofunktio, jonka kuvaaja on piirretty alle.



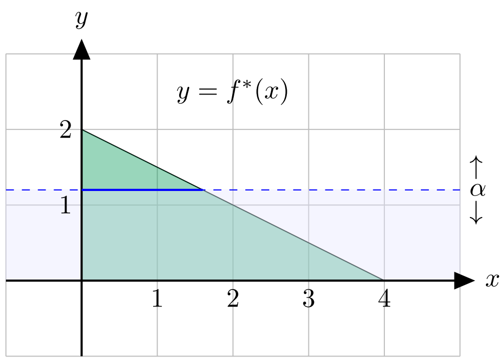
Funktion arvo pisteessä x on

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x & , \quad 1 \le x < 2 \\ 2x - 4 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 8 - 2x & , \quad 3 \le x < 4 \\ 0 & , \quad 4 \le x. \end{cases}$$

Kaksoiskolmio on helppoa järjestää laskevaksi viistouttamalla (engl. *shear*) kolmiot vasemmalle niin, että niiden kannat pysyvät paikoillaan, ja ylimmät kärjet siirtyvät vaakasuunnassa y-akselille pisteeseen $(0, 2)$. Viistoutus saadaan aikaan muunnoksella

$$(x', y') = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\, y,\ y\right) , & 0 \le x < 2 \\ \left(x - \frac{3}{2}\, y,\ y\right) , & 2 \le x, \end{cases}$$

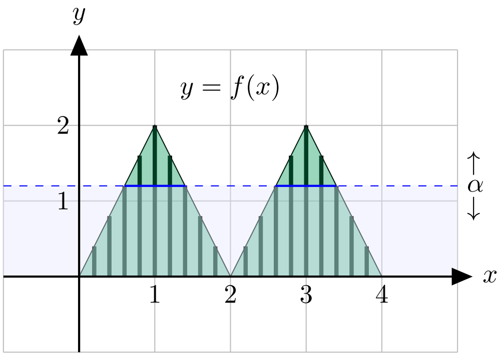
missä tason piste (x, y) muuntuu pisteeksi (x', y'), ja lopputulos näyttää tältä:



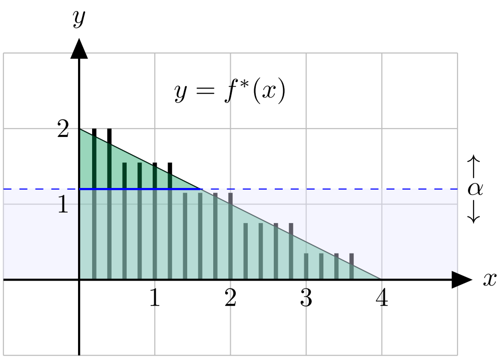
Järjestetyllä funktiolla on lauseke

$$f^*(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}\, x , & 0 \le x < 4 \\ 0 , & 4 \le x. \end{cases}$$

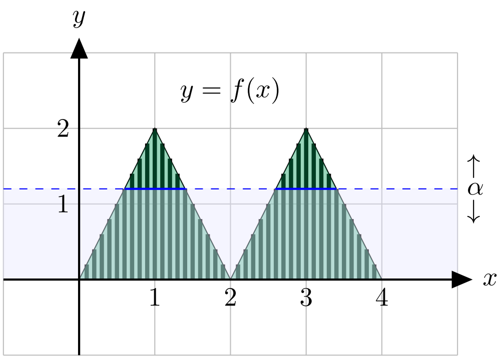
Kun jatkuva kaksoiskolmiofunktio niin sanotusti *diskretoidaan* ottamalla mukaan funktion arvot ainoastaan tasavälisessä pisteistössä, saadaan kuvaan piirrettyä pylväikköä vastaava lukujono, jonka lopussa on äärettömän monta nollaa.

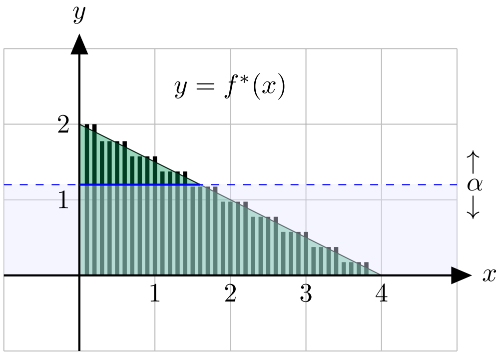


Funktio ja pylväät järjestetään erikseen laskevaan suuruusjärjestykseen, jolloin samanpituiset pylväät muodostavat tasanteita, ja niistä syntyy vasemmalle nouseva portaikko.

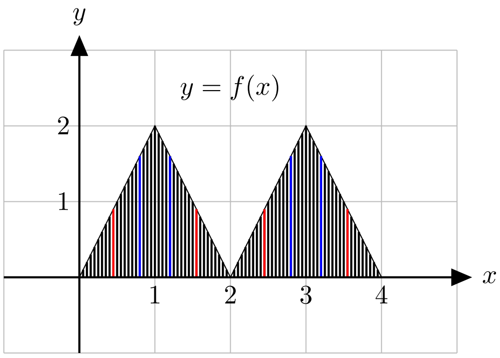


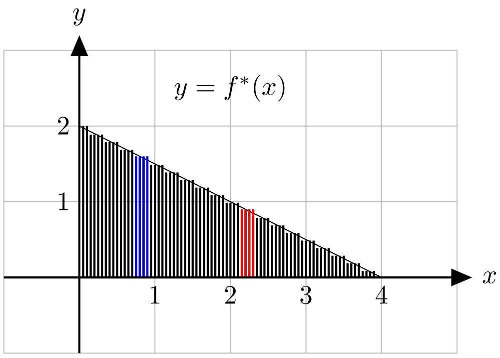
Pylväikköä tihennettäessä tasanteet kapenevat, ja järjestettyjen pylväiden yläpäät ovat lähempänä järjestetyn funktion kuvaajaa kuin aikaisemmin.





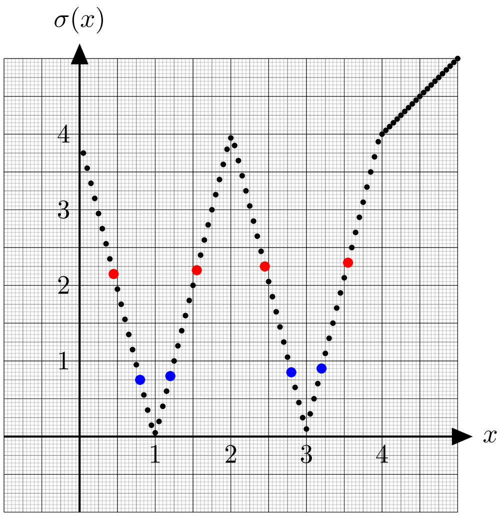
Seuraavissa kuvissa pylväikköä on tihennetty edelleen. Tietyt kahdeksan pylvästä, neljä sinistä ja neljä punaista, on otettu erityistarkkailuun.



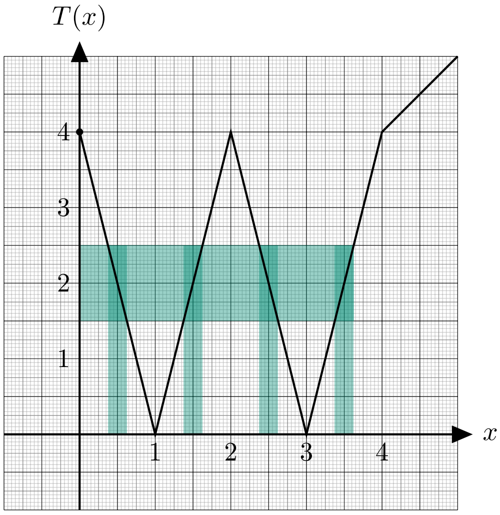


Tihennystä ajatellaan jatkettavan loputtomiin. Silloin tasapituiset pylväsnelikot lopulta sulautuvat yhdeksi äärettömän ohueksi pylvääksi, nelikon “raja-arvoksi”. Näin syntyy jo edellä siniaallon järjestelyn yhteydessä havaittu ilmiö. Yhteensulautumisen takia funktion arvoja ei yleensä saada järjestykseen permutoimalla argumentin x arvoja!

Jos x-arvoja ei permutoida, millaisella kuvauksella niitä sitten muutellaan? Seuraavista kuvista nähdään, miten pylvään x-koordinaatti muuttuu siirrettäessä pylväs suuruusjärjestyksen määräämälle paikalle. Ensimmäinen kuva liittyy diskretoituun funktioon, joka järjestyy permutaatiolla. Vaaka-akselilla ovat pylväiden paikat x ennen sorttausta ja pystyakselilla paikat $\sigma(x)$ sorttauksen jälkeen; toisin sanoen pisteistö on permutaatiofunktion σ kuvaaja. Siniset ja punaiset pisteet liittyvät edellisten kuvien sinisiin ja punaisiin pylväisiin.



Jälkimmäinen kuva esittää permutaatiota vastaavaa funktiota T, sanottakoon sitä vaikkapa *kvasipermutaatioksi*, joka järjestää diskretoimattoman kaksoiskolmion. Järjestettävä funktio f on jatkuva ja muutenkin yksinkertainen (äärellinen määrä huippuja). Silloin järjestäminenkin sujuu siistillä jatkuvalla funktiolla T. Järjestävän kvasipermutaation ei kuitenkaan tarvitse olla siisti, sillä funktion arvoja $f(x) = 0$ vastaavia argumentin x arvoja voidaan permutoida keskenään hyvinkin villisti; häntä oikeassa ylänurkassa voidaan "pörhistää ja laittaa heilumaan".



Sinivihreät varjostukset kuvassa havainnollistavat sitä tosiseikkaa, että kuvauksessa T kuvapuolen välin U mitta on yhtäsuuri kuin alkukuvan $T^{-1}(U)$ mitta. Tämä on oleellista. Vaatimus mittojen yhtymisestä tulee suoraan järjestämisen periaatteesta.

Kiitän Heikki Vistiä käsikirjoituksen lukemisesta ja arvokkaista kommenteista.

Viitteet

[1] Almut Burchard, Galia Dafni & Ryan Gibara: *New Bounds and Continuity for Rearrangements on BMO and VMO.* October 28, 2020. Artikkeli arXiv palvelussa. `https://arxiv.org/pdf/2010.15024.pdf`

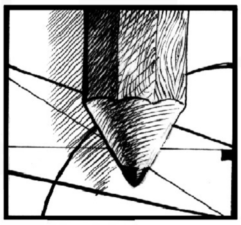
[2] Wikipedia: *Cavalieri's principle.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri's_principle`

[3] Wikipedia: *Hardy-Littlewood inequality.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Hardy-Littlewood_inequality`

[4] Wikipedia: *Infimum and supremum.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Infimum_and_supremum`

[5] Wikipedia: *Rearrangement inequality.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Rearrangement_inequality`

[6] Wikipedia: *Symmetric decreasing rearrangement.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_decreasing_rearrangement`



Solmun 3/2023 tehtävien ratkaisut

1. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=7-\frac{9}{x},$$

kun x on reaaliluku.

Ratkaisu. Yhtälön vasemman puolen arvo on positiivinen, joten on oltava $7-\frac{9}{x}>0$ eli $x>\frac{9}{7}$. Tällöin myös termi $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ja yhtälön vasen puoli on määritelty.

Sijoituksella $a=7-\frac{9}{x}$ saadaan yhtälö

$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=a,$$

missä $a>0$. Neliöimällä yhtälö puolittain saadaan

$$a^2-\frac{3}{\sqrt{x}}=7. \qquad (1)$$

Koska

$$\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{9}{x},$$

niin sijoittamalla $b=\frac{3}{\sqrt{x}}$ aikaisempaan sijoitukseen $a=7-\frac{9}{x}$ saadaan

$$a+b^2=7, \qquad (2)$$

missä $b>0$. Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan nyt

$$a^2-b=a+b^2,$$

josta seuraa

$$a^2-b^2=a+b$$

ja edelleen

$$(a+b)(a-b)=a+b$$

eli

$$(a+b)(a-b-1)=0. \qquad (3)$$

Koska $a,b>0$, niin $a+b>0$. Näin ollen yhtälö (3) voi toteutua vain, jos $a-b-1=0$ eli $a=b+1$.

Yhtälöstä (2) saadaan nyt

$$b+1+b^2=7,$$

toisin sanoen

$$b^2+b-6=0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$b=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm5}{2},$$

joten $b=-3$ tai $b=2$. Koska $b>0$, niin ratkaisuksi kelpaa vain $b=2$. Tekemästämme sijoituksesta $b=\frac{3}{\sqrt{x}}$ saadaan nyt

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=2 \iff \frac{9}{x}=4 \iff x=\frac{9}{4}.$$

Tarkistetaan vielä, että $x=\frac{9}{4}$ on yhtälön ratkaisu:

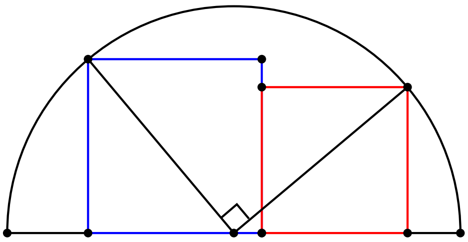
$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{4}}}}=\sqrt{7+\frac{3\cdot2}{3}}=\sqrt{9}=3$$

ja

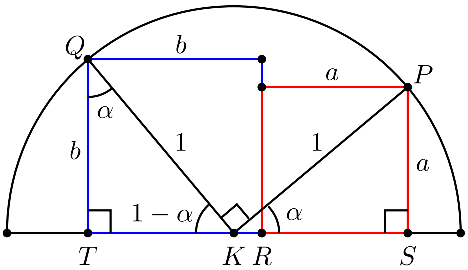
$$7-\frac{9}{x}=7-\frac{9}{\frac{9}{4}}=7-\frac{9\cdot4}{9}=7-4=3.$$

Saatiin siis, että yhtälön kummankin puolen arvo on 3, kun $x=\frac{9}{4}$, joka on näin ollen yhtälön ratkaisu.

2. Yksikköpuoliympyrän (eli puoliympyrän, jonka säde on 1) sisään piirretään kaksi neliötä siten, että molempien neliöiden yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja yksi kärki on puoliympyrällä sekä yksi kummankin neliön sivuista sijaitsee samalla suoralla (katso alla oleva kuva). Ympyrän keskipisteestä neliöiden puoliympyrällä sijaitseviin kärkiin piirrettyjen janojen välinen kulma on suora. Osoita, että näin piirrettyjen neliöiden pinta-alojen summa on aina sama.

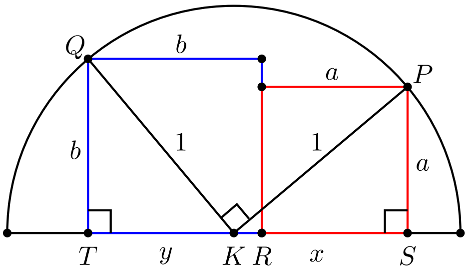


Ratkaisu 1. Merkitään neliöiden puoliympyrällä olevia kärkiä P ja Q sekä puoliympyrän halkaisijalla olevia kärkiä R, S ja T. Ympyrän keskipiste on K ja neliön sivut ovat a ja b (katso alla oleva kuva).



Merkitään $\alpha = \angle KQT$, jolloin $\angle QKT = 90° - \alpha$. Koska ympyrän keskipisteestä K neliöiden puoliympyrällä sijaitseviin kärkiin P ja Q piirrettyjen janojen välinen kulma on suora, niin $\angle PKS = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Näin ollen suorakulmaiset kolmiot QKT ja PKS ovat yhtenevät, koska kummankin kolmion hypotenuusan pituus on 1. Tästä seuraa Pythagoraan lauseen perusteella, että $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

Ratkaisu 2. Ratkaisun 1 alussa esiteltyjen merkintöjen lisäksi merkitään $KS = x$ ja $KT = y$.



Suorakulmaisille kolmioille QKT ja PKS on Pythagoraan lauseen mukaan voimassa

$$a^2 + x^2 = 1 = b^2 + y^2,$$

joten

$$a^2 - b^2 = y^2 - x^2$$

eli

$$(a + b)(a - b) = (y + x)(y - x).$$

Lisäksi tiedämme, että

$$x + y = a + b,$$

joten

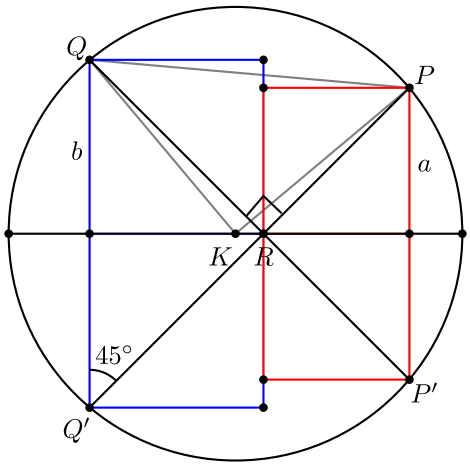
$$a - b = y - x.$$

Laskemalla edelliset kaksi yhtälöä puolittain yhteen saadaan

$$2a = 2y.$$

Tästä seuraa, että $y = a$, ja näin ollen $x = b$. Ratkaisun loppu on samanlainen kuin ratkaisussa 1: Pythagoraan lauseen perusteella $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

Ratkaisu 3. Käytetään tässäkin ratkaisussa ratkaisun 1 alussa esiteltyjä merkintöjä. Heijastetaan puoliympyrä ja neliöt puoliympyrän halkaisijan suhteen ja merkitään saatuja ympyrän kehällä olevia uusia pisteitä P' ja Q'.



Koska janat RP ja RQ ovat vierekkäin olevien neliöiden lävistäjät ja R on molempien neliöiden kärki, niin kulma $\angle PRQ$ on suora. Heijastuksen ominaisuuksien perusteella kulma $\angle P'RQ'$ on kulman $\angle PRQ$ ristikulma. Näin ollen myös kulma $\angle P'RQ'$ on suora. Erityisesti saadaan, että janat PQ' ja QP' ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tästä seuraa, että $\angle RQ'Q = 45°$ (katso kuva).

Ympyrän jänne PQ vastaa näin ollen $45°$ kehäkulmaa, joten kehäkulmalauseen perusteella jänne PQ vastaa $2 \cdot 45° = 90°$ keskuskulmaa $\angle PKQ$. Näin ollen jänteen

PQ pituus on säde $\cdot\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta PRQ saadaan nyt Pythagoraan lauseen perusteella yhtälö

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(b\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2,$$

sillä $RP = a\sqrt{2}$ ja $RQ = b\sqrt{2}$. Näin ollen $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

3. Ravintolassa tarjottava keitto osoittautui liian suolaiseksi. Kokki päätti laimentaa keittoa edellisenä päivänä yli jääneellä keitolla, jossa ei ollut tarpeeksi suolaa. Suolaisen keiton suolapitoisuus on 5 prosenttia ja edellisen päivän keiton suolapitoisuus on 1,2 prosenttia. Kuinka paljon kumpaakin keittoa tulee lisätä, jotta sekoitettua keittoa saadaan 72 desilitraa ja sen suolapitoisuus on 3,48 prosenttia?

Ratkaisu. Olkoon x dl sekoitettuun keittoon lisätyn suolaisen keiton määrä, jolloin vähäsuolaisen keiton määrä on $72 - x$ dl. Sekoitetun keiton suolaisen keiton osuudessa on suolaa $0{,}05 \cdot x$ dl ja vähäsuolaisen keiton osuudessa $0{,}012 \cdot (72 - x)$ dl. Sekoitetussa keitossa tulee olla suolaa $0{,}0348 \cdot 72$ dl $= 2{,}5056$ dl, joten saadaan (ilman yksiköitä) yhtälö

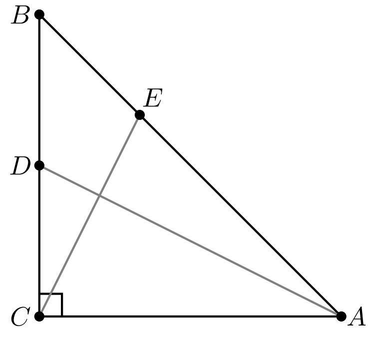
$$0{,}05 \cdot x + 0{,}012 \cdot (72 - x) = 2{,}5056.$$

Sulut avaamalla ja termejä siirtämällä saadaan

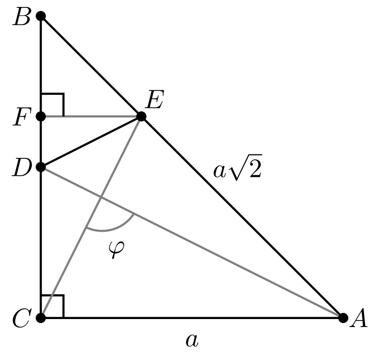
$$0{,}038 \cdot x = 1{,}6416 \quad \text{eli} \quad x = 43{,}2.$$

Sekoitettuun keittoon tulee siis lisätä suolaista keittoa 43,2 dl = 4,32 litraa ja 72 dl − 43,2 dl = 28,8 dl = 2,88 litraa vähäsuolaista edellisen päivän keittoa.

4. Suorakulmaisessa tasakylkisessä kolmiossa ABC kateetin BC keskipiste on D ja hypotenuusalla AB lähempänä kärkeä B oleva piste E jakaa hypotenuusan suhteessa $1 : 2$. Osoita, että janat AD ja CE ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



Ratkaisu 1. Olkoon a kolmion kateetin pituus, jolloin hypotenuusan pituus on $a\sqrt{2}$. Merkitään lisäksi F:llä janalla BC olevaa pistettä, joka muodostaa pisteiden B ja E kanssa suorakulmaisen kolmion BFE (katso seuraava kuva).



Suorakulmaiset kolmiot ACB ja EFB ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC} = \frac{EF}{a}.$$

Koska $\frac{BE}{BA} = \frac{1}{3}$, niin saadaan $EF = \frac{a}{3}$. Koska $BD = \frac{a}{2}$, niin kolmion EBD pinta-ala on

$$A_{EBD} = \frac{BD \cdot EF}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}}{2} = \frac{a^2}{12}. \tag{1}$$

Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion ABC pinta-ala on $A_{ABC} = \frac{a^2}{2}$, joten nelikulmion $AEDC$ pinta-ala on

$$A_{AEDC} = A_{ABC} - A_{EBD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} = \frac{5a^2}{12}. \tag{2}$$

Suorakulmaisista kolmioista CEF ja ADC saadaan Pythagoraan lauseen perusteella

$$CE^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{5a^2}{9}$$

ja

$$AD^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4},$$

joten

$$CE = \frac{a\sqrt{5}}{3} \quad \text{ja} \quad AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Janat CE ja AD ovat yksinkertaisen (konveksin) nelikulmion $AEDC$ lävistäjät, joten nelikulmion pinta-ala on

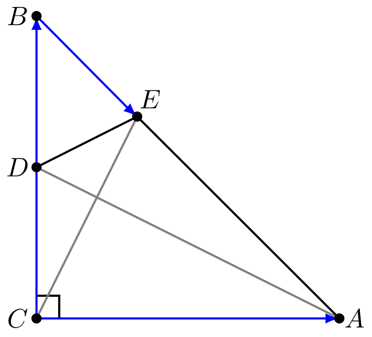
$$A_{AEDC} = \frac{CE \cdot AD \cdot \sin\varphi}{2},$$

missä φ on lävistäjien välinen kulma. Tästä saaadaan kaavoja (2) ja (3) käyttäen

$$\frac{5a^2}{12} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{5a^2 \cdot \sin\varphi}{12},$$

joten $\sin\varphi = 1$. Näin ollen $\varphi = 90°$, siis janat AD ja CE ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu 2. Käytetään samoja merkintöjä kuin ratkaisussa 1. Ratkaistaan tehtävä käyttämällä vektoreita ja merkitään $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.



Vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat yhtä pitkät ja niiden pistetulolle pätee $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, koska ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, niin

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right),$$

joten vektoreiden yhteenlaskusääntöjen perusteella

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}. \qquad (4)$$

Koska $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{b}$, niin

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}. \qquad (5)$$

Vektoreiden $\overrightarrow{CE}$ ja $\overrightarrow{AD}$ pistetuloksi saadaan kaavoja (4) ja (5) käyttäen

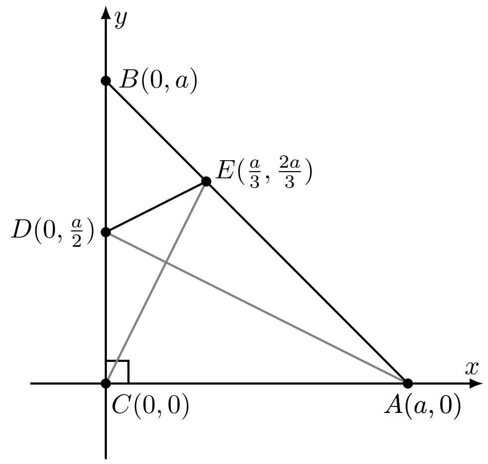
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\right),\end{aligned}$$

sillä $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Koska vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat yhtä pitkät, niin niiden pituuksien neliöt $|\vec{a}|^2$ ja $|\vec{b}|^2$ ovat yhtä suuret. Näin ollen

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\right) = 0.$$

Tästä seuraa, että vektorit $\overrightarrow{CE}$ ja $\overrightarrow{AD}$ (täten myös janat CE ja AD) ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu 3. Käytetään tässäkin ratkaisussa samoja merkintöjä kuin ratkaisussa 1. Sijoitetaan kolmio (x, y)-koordinaatistoon niin, että piste C on origossa (katso seuraava kuva). Merkitään pisteitä niin, että kirjaimen perässä on suluissa pisteen koordinaatit, esimerkiksi $C(0, 0)$.



Pisteiden $A(a, 0)$ ja $D(0, \frac{a}{2})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AD} = \frac{\frac{a}{2} - 0}{0 - a} = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$$

ja pisteiden $C(0, 0)$ ja $E(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{CE} = \frac{\frac{2a}{3} - 0}{\frac{a}{3} - 0} = \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{3 \cdot 2a}{3a} = 2.$$

Koska kulmakertoimien tulo $k_{AD} \cdot k_{CE} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, niin pisteiden $A(a, 0)$ ja $D(0, \frac{a}{2})$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $C(0, 0)$ ja $E(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3})$ kautta kulkevan suoran kanssa. Näin ollen janat CE ja AD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

5. Tarkastellaan funktioita

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{ja} \quad f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)),$$

kun n on positiivinen kokonaisluku. Laske $f_{2023}(2023)$.

Ratkaisu. Funktion f_0 määritelmä vaatii, että $x \neq 1$. Kun $n = 1$, niin

$$f_1(x) = f_0(f_{1-1}(x)) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

missä $x \neq 0$. Kun $n = 2$, niin

$$f_2(x) = f_0(f_{2-1}(x)) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Kun $n = 3$, niin

$$f_3(x) = f_0(f_{3-1}(x)) = f_0(f_2(x)) = f_0(x).$$

Kun $n = 4$, niin

$$f_4(x) = f_0(f_{4-1}(x)) = f_0(f_3(x)) = f_0(f_0(x)) = f_1(x).$$

Kun $n = 5$, niin

$$f_5(x) = f_0(f_{5-1}(x)) = f_0(f_4(x)) = f_0(f_1(x)) = f_2(x).$$

Huomataan, että funktion f_n arvot toistuvat kolmen jaksoissa, toisin sanoen

$$f_{n+3}(x) = f_n(x)$$

kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla n. Näin ollen

$$f_{2023}(x) = f_{674\cdot 3+1}(x) = f_1(x),$$

joten

$$f_{2023}(2023) = f_1(2023) = \frac{2023-1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

6. Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa *lattiafunktiota* reaaliluvusta x, jonka arvo on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin x, siis

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}.$$

Esimerkiksi $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor = -1$ ja $\lfloor 10 \rfloor = 10$.

Tarkastellaan funktioita

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+5}, \\ g(x) &= \frac{-2x+8}{5}, \\ h(x) &= \lfloor x+3 \rfloor. \end{aligned}$$

Määritä funktioiden kuvaajien yhteiset pisteet.

Ratkaisu. Jos funktioiden kuvaajilla on yhteinen piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on x, niin $f(x) = g(x) = h(x)$. Ratkaistaan ensin yhtälö $f(x) = g(x)$ eli

$$\sqrt{x+5} = \frac{-2x+8}{5}. \tag{1}$$

Neliöimällä saadaan yhtälö

$$x+5 = \left(\frac{-2x+8}{5}\right)^2 = \frac{4x^2-32x+64}{25} \tag{2}$$

eli

$$25x+125 = 4x^2-32x+64.$$

Termejä siirtelemällä ja yhdistämällä saadaan toisen asteen yhtälö

$$4x^2-57x-61=0,$$

jonka ratkaisu on

$$x = \frac{-(-57) \pm \sqrt{(-57)^2-4\cdot 4\cdot(-61)}}{2\cdot 4} = \frac{57 \pm 65}{8}.$$

Yhtälön (2) ratkaisut ovat siis $x_1 = -1$ ja $x_2 = 15{,}25$. Koska neliöimällä saatu yhtälö (2) ei ole ekvivalentti yhtälön (1) kanssa, niin tarkistetaan ratkaisut: Koska

$$\sqrt{-1+5} = 2 = \frac{-2\cdot(-1)+8}{5},$$

niin $x_1 = -1$ on yhtälön (1) ratkaisu. Koska

$$\sqrt{15{,}25+5} = 4{,}5 \ne -4{,}5 = \frac{-2\cdot 15{,}25+8}{5},$$

niin $x_2 = 15{,}25$ ei ole yhtälön (1) ratkaisu. Näin ollen yhtälön (1) ainoa ratkaisu on $x = -1$.

Sijoittamalla $x = -1$ funktion h lausekkeeseen saadaan

$$h(-1) = \lfloor -1+3 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2.$$

Koska myös $f(-1) = g(-1) = 2$, niin funktioiden f, g ja h kuvaajilla on täsmälleen yksi yhteinen piste $(-1, 2)$.

7. Olkoot $a > 2$, b ja c reaalilukuja. Tarkastellaan seuraavia kolmea väittämää.

(1) Yhtälöllä $ax^2+bx+c=0$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

(2) Yhtälöllä $(a-1)x^2+(b-1)x+(c-1)=0$ on yksi reaalinen ratkaisu.

(3) Yhtälöllä $(a-2)x^2+(b-2)x+(c-2)=0$ on kaksi reaalista ratkaisua.

(a) Jos väittämät (1) ja (2) ovat totta, niin onko myös väittämä (3) totta?

(b) Jos väittämät (2) ja (3) ovat totta, niin onko myös väittämä (1) totta?

Ratkaisu 1. Havaitaan, että jokaisen kolmen väittämän yhtälössä termin x^2 kerroin on positiivinen ja erityisesti nollasta poikkeava, koska $a > 2$. Näin ollen kaikki yhtälöt ovat toisen asteen yhtälöitä, jolloin ratkaisujen määrä riippuu diskriminantin suuruudesta: jos diskriminantti on positiivinen, niin ratkaisuja on kaksi, jos diskriminantti on nolla, niin ratkaisuja on yksi, ja jos diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Merkitään $A = a-1$, $B = b-1$ ja $C = c-1$, jolloin $A > 1$ ja väittämät voidaan ilmaista diskriminantin avulla seuraavasti:

(1) $(B+1)^2-4(A+1)(C+1) < 0$,

(2) $B^2-4AC=0$,

(3) $(B-1)^2-4(A-1)(C-1) > 0$.

Ensimmäinen ja kolmas väittämä voidaan uudelleenmuotoilla

(1) $(B^2-4AC)+(2B-4A-4C) < 3$,

(3) $(B^2-4AC)-(2B-4A-4C) > 3$.

Jos väittämät (2) ja (3) pätevät, niin

$$(B^2-4AC)-(2B-4A-4C) = -2B+4A+4C > 3,$$

toisin sanoen $2B-4A-4C < -3$. Näin ollen $2B-4A-4C < 3$ ja väite (1) pätee. Vastaus kohtaan (b) on siis kyllä.

Jos väittämät (1) ja (2) pätevät, niin

$$(B^2-4AC)+(2B-4A-4C) = 2B-4A-4C < 3.$$

Nyt pitää selvittää, että päteekö väittämä (3) eli $2B - 4A - 4C < -3$. Jos ehdot $-3 \leq 2B - 4A - 4C < 3$, $B^2 - 4AC = 0$ ja $A > 1$ voivat olla voimassa yhtä aikaa, niin silloin $2B - 4A - 4C < -3$ ei päde, mutta muuten se pätee. Toisen väittämän perusteella $B = \pm 2\sqrt{AC}$, joten pitää selvittää, onko olemassa arvoja $A > 1$ ja $C \geq 0$, joilla

$$-\frac{3}{4} \leq \pm\sqrt{AC} - A - C < \frac{3}{4}. \qquad (*)$$

Koska $-\sqrt{AC} - A - C \leq -1$, niin vain $+\sqrt{AC}$ on mahdollinen. Kerrotaan epäyhtälöketju $(*)$ tällöin luvulla -1, jolloin saadaan

$$-\frac{3}{4} < A + C - \sqrt{AC} \leq \frac{3}{4}.$$

Koska

$$A + C - \sqrt{AC} = \left(\sqrt{C} - \frac{1}{2}\sqrt{A}\right)^2 + \frac{3}{4}A > \frac{3}{4},$$

niin epäyhtälöketju $(*)$ ei voi toteutua vaadituilla A:n ja C:n arvoilla. Näin ollen myös kohtaan (a) vastaus on kyllä.

Ratkaisu 2. Oletetaan, että yhtälöllä $A'x^2 + B'x + C' = 0$ on korkeintaan yksi reaalinen ratkaisu joillakin $A' > 0$, B' ja C'. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $A'x^2 + B'x + C' \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x, koska $x \mapsto A'x^2 + B'x + C'$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Tarkastellaan sitten yhtälöä

$$(A' + 1)x^2 + (B' + 1)x + (C' + 1) = 0. \qquad (\dagger)$$

Koska nyt

$$\begin{aligned}&(A' + 1)x^2 + (B' + 1)x + (C' + 1)\\ &= (A'x^2 + B'x + C') + (x^2 + x + 1)\\ &\geq 0 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},\end{aligned}$$

niin yhtälöllä $(\dagger)$ ei ole ratkaisuja. Kun valitaan $A' = a - 1$, $B' = b - 1$ ja $C' = c - 1$, niin edellä esitetyn perusteella väittämästä (2) yksin seuraa väittämä (1). Vastaus kohtaan (b) on näin ollen kyllä.

Valitaan sitten $A' = a - 2$, $B' = b - 2$ ja $C' = c - 2$. Jos väittämä (3) ei nyt toteudu (eli yhtälöllä $(a-2)x^2 + (b-2)x + (c-2) = 0$ on korkeintaan yksi reaalinen ratkaisu), niin myöskään väittämä (2) ei voi toteutua, koska yllä esitetyn perusteella yhtälöllä $(a-1)x^2 + (b-1)x + (c-1) = 0$ ei olisi reaalisia ratkaisuja. Näin ollen, josa väittämä (2) toteutuu, niin myös väittämän (3) on toteuduttava, joten vastaus kohtaan (a) on kyllä.

8. Onko totta, että jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin myös jokaisen kulman kosini on rationaalinen?

Ratkaisu. Merkitään tavalliseen tapaan kolmion kulmia α, β ja γ sekä näiden vastakkaisia sivuja a, b ja c. Kosinilauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

joten sinilauseen perusteella

$$\begin{aligned}\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin lauseke (1) on rationaalinen, joten $\cos\gamma$ on rationaalinen. Näin ollen, jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin myös jokaisen kulman kosini on rationaalinen.

9. Osoita, että jos $0 < a, b < 1$, niin

$$(a + b - ab)(a^b + b^a) > a + b.$$

Ratkaisu. Todistuksessa tarvitaan painotetun aritmeettisen keskiarvon ja painotetun geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä, jonka mukaan

$$\frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots \omega_n x_n}{\omega} \geq \sqrt[\omega]{x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \cdots x_n^{\omega_n}},$$

kun luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja painot $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ovat ei-negatiivisia ja $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n > 0$. Epäyhtälössä pätee yhtälö täsmälleen silloin, kun kaikki luvut x_k painoilla $\omega_k > 0$ ovat samoja. Sovelletaan epäyhtälöä luvuille 1 ja a painoilla b ja $1 - b$, jolloin saadaan

$$a + b - ab = b \cdot 1 + (1 - b) \cdot a \geq 1^b \cdot a^{1-b} = a^{1-b}.$$

Kertomalla puolittain luvulla a^b saadaan epäyhtälö

$$(a + b - ab)a^b \geq a^{1-b}a^b = a,$$

jossa pätee yhtälö vain, jos $a = 1$. Tehtävänannon mukaan $a < 1$, joten $(a + b - ab)a^b > a$. Vaihtamalla a:n ja b:n rooleja saadaan samanlaisella päättelyllä, että $(a + b - ab)b^a > b$. Näin ollen

$$\begin{aligned}(a + b - ab)(a^b + b^a) &= (a + b - ab)a^b + (a + b - ab)b^a\\ &> a + b.\end{aligned}$$

□

10. 5×5-ruudukko täytetään satunnaisessa järjestyksessä kirjoittamalla jokaiseen ruutuun luku. Ruutuun kirjoitettava luku määräytyy sen mukaan, kuinka moni vieressä olevassa ruutu on jo täytetty. Vierekkäin olevia ruutuja ovat ne, joilla on yhteinen sivu. Esimerkiksi alla oleva ruudukko on täytetty luvuilla seuraavassa järjestyksessä: a5, b5, c5, d5, e5, e4, e3, e2, a4, a3, a2, a1, b1, c1, d1, e1, b4, c4, b3, b2, c2, d2, d3, d4, c3.

5	0	1	1	1	1
4	1	2	2	4	1
3	1	2	4	2	1
2	1	3	2	3	2
1	1	1	1	1	2
	a	b	c	d	e

Täytä ruudukko kahdella muulla tavalla säääntöjä noudattaen. Osoita, että ruudukkoon täytettyjen lukujen summa on aina 40 riippumatta siitä, missä järjestyksessä ruudukko on sääntöjä noudattaen täytetty.

Ratkaisu. Esitetään tässä vain yksi toisenlainen tapa täyttää ruudukko sääntöjä noudattaen:

5	0	2	0	2	2
4	2	2	3	0	1
3	3	0	3	1	3
2	0	3	4	3	0
1	1	2	0	1	2
	a	b	c	d	e

Ruudukon 25 ruutua on erotettu toisistaan $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ yhteisellä sivulla. Jokainen näistä 40 sivusta lasketaan ruudukon lukuihin täsmälleen kerran: silloin kun vierekkäisten ruutujen toinen ruutu täytetään. Näin ollen ruudukkoon täytettyjen lukujen summa on aina 40.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja

Solmu 1/2024

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

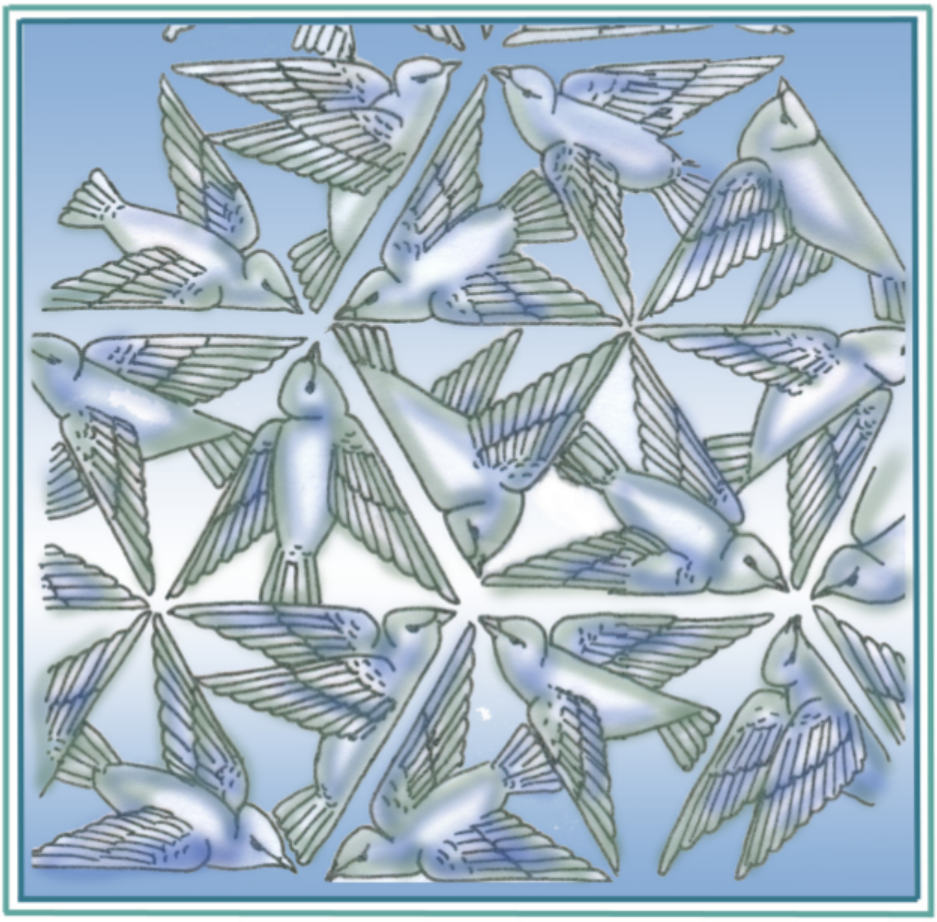
Julkaisija:
Suomen matemaattinen yhdistys ry
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

Kansikuva:
Noora Isoeskeli

Painopaikka:
Painosalama Oy

Numeroon 2/2024 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 13.10.2024 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



SOLMU

MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi