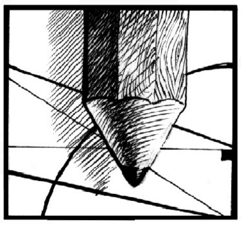


Solmun 3/2023 tehtävien ratkaisut

1. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=7-\frac{9}{x},$$

kun x on reaaliluku.

Ratkaisu. Yhtälön vasemman puolen arvo on positiivinen, joten on oltava $7-\frac{9}{x}>0$ eli $x>\frac{9}{7}$. Tällöin myös termi $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ja yhtälön vasen puoli on määritelty.

Sijoituksella $a=7-\frac{9}{x}$ saadaan yhtälö

$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=a,$$

missä $a>0$. Neliöimällä yhtälö puolittain saadaan

$$a^2-\frac{3}{\sqrt{x}}=7. \tag{1}$$

Koska

$$\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{9}{x},$$

niin sijoittamalla $b=\frac{3}{\sqrt{x}}$ aikaisempaan sijoitukseen $a=7-\frac{9}{x}$ saadaan

$$a+b^2=7, \tag{2}$$

missä $b>0$. Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan nyt

$$a^2-b=a+b^2,$$

josta seuraa

$$a^2-b^2=a+b$$

ja edelleen

$$(a+b)(a-b)=a+b$$

eli

$$(a+b)(a-b-1)=0. \tag{3}$$

Koska $a,b>0$, niin $a+b>0$. Näin ollen yhtälö (3) voi toteutua vain, jos $a-b-1=0$ eli $a=b+1$.

Yhtälöstä (2) saadaan nyt

$$b+1+b^2=7,$$

toisin sanoen

$$b^2+b-6=0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$b=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm5}{2},$$

joten $b=-3$ tai $b=2$. Koska $b>0$, niin ratkaisuksi kelpaa vain $b=2$. Tekemästämme sijoituksesta $b=\frac{3}{\sqrt{x}}$ saadaan nyt

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=2 \iff \frac{9}{x}=4 \iff x=\frac{9}{4}.$$

Tarkistetaan vielä, että $x=\frac{9}{4}$ on yhtälön ratkaisu:

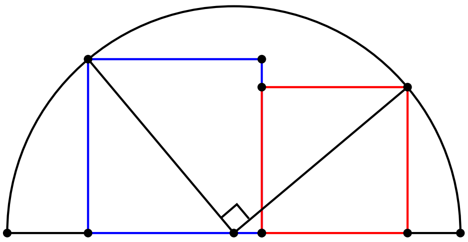
$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{4}}}}=\sqrt{7+\frac{3\cdot2}{3}}=\sqrt{9}=3$$

ja

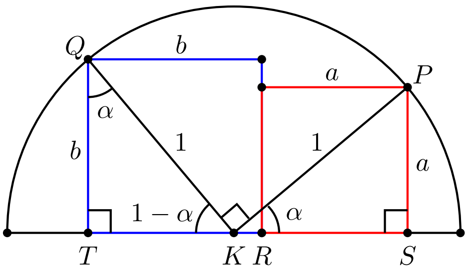
$$7-\frac{9}{x}=7-\frac{9}{\frac{9}{4}}=7-\frac{9\cdot4}{9}=7-4=3.$$

Saatiin siis, että yhtälön kummankin puolen arvo on 3, kun $x=\frac{9}{4}$, joka on näin ollen yhtälön ratkaisu.

2. Yksikköpuoliympyrän (eli puoliympyrän, jonka säde on 1) sisään piirretään kaksi neliötä siten, että molempien neliöiden yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja yksi kärki on puoliympyrällä sekä yksi kummankin neliön sivuista sijaitsee samalla suoralla (katso alla oleva kuva). Ympyrän keskipisteestä neliöiden puoliympyrällä sijaitseviin kärkiin piirrettyjen janojen välinen kulma on suora. Osoita, että näin piirrettyjen neliöiden pinta-alojen summa on aina sama.

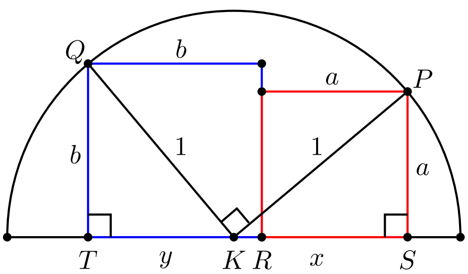


Ratkaisu 1. Merkitään neliöiden puoliympyrällä olevia kärkiä P ja Q sekä puoliympyrän halkaisijalla olevia kärkiä R, S ja T. Ympyrän keskipiste on K ja neliön sivut ovat a ja b (katso alla oleva kuva).



Merkitään $\alpha = \angle KQT$, jolloin $\angle QKT = 90° - \alpha$. Koska ympyrän keskipisteestä K neliöiden puoliympyrällä sijaitseviin kärkiin P ja Q piirrettyjen janojen välinen kulma on suora, niin $\angle PKS = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Näin ollen suorakulmaiset kolmiot QKT ja PKS ovat yhtenevät, koska kummankin kolmion hypotenuusan pituus on 1. Tästä seuraa Pythagoraan lauseen perusteella, että $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

Ratkaisu 2. Ratkaisun 1 alussa esiteltyjen merkintöjen lisäksi merkitään $KS = x$ ja $KT = y$.



Suorakulmaisille kolmioille QKT ja PKS on Pythagoraan lauseen mukaan voimassa

$$a^2 + x^2 = 1 = b^2 + y^2,$$

joten

$$a^2 - b^2 = y^2 - x^2$$

eli

$$(a + b)(a - b) = (y + x)(y - x).$$

Lisäksi tiedämme, että

$$x + y = a + b,$$

joten

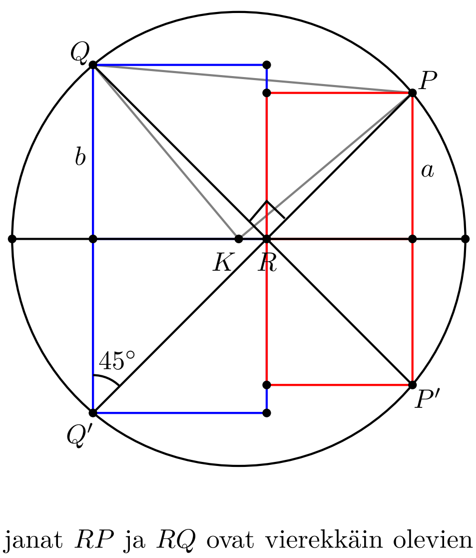
$$a - b = y - x.$$

Laskemalla edelliset kaksi yhtälöä puolittain yhteen saadaan

$$2a = 2y.$$

Tästä seuraa, että $y = a$, ja näin ollen $x = b$. Ratkaisun loppu on samanlainen kuin ratkaisussa 1: Pythagoraan lauseen perusteella $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

Ratkaisu 3. Käytetään tässäkin ratkaisussa ratkaisun 1 alussa esiteltyjä merkintöjä. Heijastetaan puoliympyrä ja neliöt puoliympyrän halkaisijan suhteen ja merkitään saatuja ympyrän kehällä olevia uusia pisteitä P' ja Q'.



Koska janat RP ja RQ ovat vierekkäin olevien neliöiden lävistäjät ja R on molempien neliöiden kärki, niin kulma $\angle PRQ$ on suora. Heijastuksen ominaisuuksien perusteella kulma $\angle P'RQ'$ on kulman $\angle PRQ$ ristikulma. Näin ollen myös kulma $\angle P'RQ'$ on suora. Erityisesti saadaan, että janat PQ' ja QP' ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tästä seuraa, että $\angle RQ'Q = 45°$ (katso kuva).

Ympyrän jänne PQ vastaa näin ollen $45°$ kehäkulmaa, joten kehäkulmalauseen perusteella jänne PQ vastaa $2 \cdot 45° = 90°$ keskuskulmaa $\angle PKQ$. Näin ollen jänteen

PQ pituus on säde $\cdot\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta PRQ saadaan nyt Pythagoraan lauseen perusteella yhtälö

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(b\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2,$$

sillä $RP = a\sqrt{2}$ ja $RQ = b\sqrt{2}$. Näin ollen $a^2 + b^2 = 1$, joten neliöiden pinta-alojen summa on aina vakio 1.

3. Ravintolassa tarjottava keitto osoittautui liian suolaiseksi. Kokki päätti laimentaa keittoa edellisenä päivänä yli jääneellä keitolla, jossa ei ollut tarpeeksi suolaa. Suolaisen keiton suolapitoisuus on 5 prosenttia ja edellisen päivän keiton suolapitoisuus on 1,2 prosenttia. Kuinka paljon kumpaakin keittoa tulee lisätä, jotta sekoitettua keittoa saadaan 72 desilitraa ja sen suolapitoisuus on 3,48 prosenttia?

Ratkaisu. Olkoon x dl sekoitettuun keittoon lisätyn suolaisen keiton määrä, jolloin vähäsuolaisen keiton määrä on $72 - x$ dl. Sekoitetun keiton suolaisen keiton osuudessa on suolaa $0{,}05 \cdot x$ dl ja vähäsuolaisen keiton osuudessa $0{,}012 \cdot (72 - x)$ dl. Sekoitetussa keitossa tulee olla suolaa $0{,}0348 \cdot 72$ dl $= 2{,}5056$ dl, joten saadaan (ilman yksiköitä) yhtälö

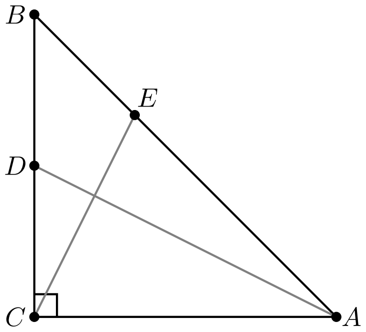
$$0{,}05 \cdot x + 0{,}012 \cdot (72 - x) = 2{,}5056.$$

Sulut avaamalla ja termejä siirtämällä saadaan

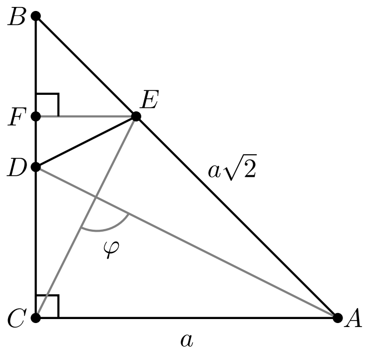
$$0{,}038 \cdot x = 1{,}6416 \quad \text{eli} \quad x = 43{,}2.$$

Sekoitettuun keittoon tulee siis lisätä suolaista keittoa 43,2 dl = 4,32 litraa ja 72 dl − 43,2 dl = 28,8 dl = 2,88 litraa vähäsuolaista edellisen päivän keittoa.

4. Suorakulmaisessa tasakylkisessä kolmiossa ABC kateetin BC keskipiste on D ja hypotenuusalla AB lähempänä kärkeä B oleva piste E jakaa hypotenuusan suhteessa $1 : 2$. Osoita, että janat AD ja CE ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.



Ratkaisu 1. Olkoon a kolmion kateetin pituus, jolloin hypotenuusan pituus on $a\sqrt{2}$. Merkitään lisäksi F:llä janalla BC olevaa pistettä, joka muodostaa pisteiden B ja E kanssa suorakulmaisen kolmion BFE (katso seuraava kuva).



Suorakulmaiset kolmiot ACB ja EFB ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC} = \frac{EF}{a}.$$

Koska $\frac{BE}{BA} = \frac{1}{3}$, niin saadaan $EF = \frac{a}{3}$. Koska $BD = \frac{a}{2}$, niin kolmion EBD pinta-ala on

$$A_{EBD} = \frac{BD \cdot EF}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}}{2} = \frac{a^2}{12}. \qquad (1)$$

Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion ABC pinta-ala on $A_{ABC} = \frac{a^2}{2}$, joten nelikulmion $AEDC$ pinta-ala on

$$A_{AEDC} = A_{ABC} - A_{EBD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} = \frac{5a^2}{12}. \qquad (2)$$

Suorakulmaisista kolmioista CEF ja ADC saadaan Pythagoraan lauseen perusteella

$$CE^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{5a^2}{9}$$

ja

$$AD^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4},$$

joten

$$CE = \frac{a\sqrt{5}}{3} \quad \text{ja} \quad AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \qquad (3)$$

Janat CE ja AD ovat yksinkertaisen (konveksin) nelikulmion $AEDC$ lävistäjät, joten nelikulmion pinta-ala on

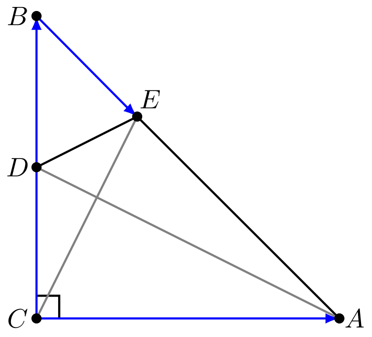
$$A_{AEDC} = \frac{CE \cdot AD \cdot \sin\varphi}{2},$$

missä φ on lävistäjien välinen kulma. Tästä saaadaan kaavoja (2) ja (3) käyttäen

$$\frac{5a^2}{12} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{5a^2 \cdot \sin\varphi}{12},$$

joten $\sin\varphi = 1$. Näin ollen $\varphi = 90°$, siis janat AD ja CE ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu 2. Käytetään samoja merkintöjä kuin ratkaisussa 1. Ratkaistaan tehtävä käyttämällä vektoreita ja merkitään $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.



Vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat yhtä pitkät ja niiden pistetulolle pätee $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, koska ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, niin

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right),$$

joten vektoreiden yhteenlaskusääntöjen perusteella

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}. \tag{4}$$

Koska $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{b}$, niin

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}. \tag{5}$$

Vektoreiden $\overrightarrow{CE}$ ja $\overrightarrow{AD}$ pistetuloksi saadaan kaavoja (4) ja (5) käyttäen

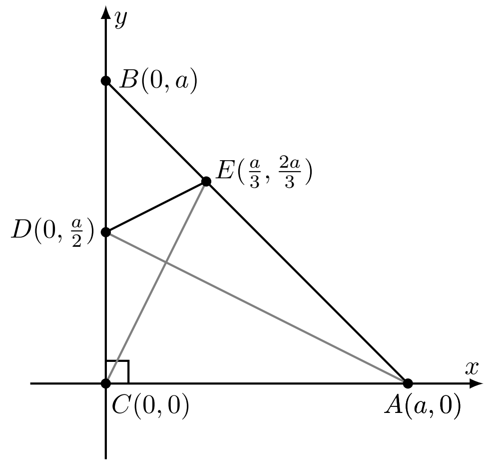
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\right),\end{aligned}$$

sillä $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Koska vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat yhtä pitkät, niin niiden pituuksien neliöt $|\vec{a}|^2$ ja $|\vec{b}|^2$ ovat yhtä suuret. Näin ollen

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\right) = 0.$$

Tästä seuraa, että vektorit $\overrightarrow{CE}$ ja $\overrightarrow{AD}$ (täten myös janat CE ja AD) ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu 3. Käytetään tässäkin ratkaisussa samoja merkintöjä kuin ratkaisussa 1. Sijoitetaan kolmio (x, y)-koordinaatistoon niin, että piste C on origossa (katso seuraava kuva). Merkitään pisteitä niin, että kirjaimen perässä on suluissa pisteen koordinaatit, esimerkiksi $C(0, 0)$.



Pisteiden $A(a, 0)$ ja $D(0, \frac{a}{2})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AD} = \frac{\frac{a}{2} - 0}{0 - a} = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$$

ja pisteiden $C(0, 0)$ ja $E(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{CE} = \frac{\frac{2a}{3} - 0}{\frac{a}{3} - 0} = \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{3 \cdot 2a}{3a} = 2.$$

Koska kulmakertoimien tulo $k_{AD} \cdot k_{CE} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, niin pisteiden $A(a, 0)$ ja $D(0, \frac{a}{2})$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $C(0, 0)$ ja $E(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3})$ kautta kulkevan suoran kanssa. Näin ollen janat CE ja AD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

5. Tarkastellaan funktioita

$$f_0(x) = \frac{1}{1 - x} \quad \text{ja} \quad f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)),$$

kun n on positiivinen kokonaisluku. Laske $f_{2023}(2023)$.

Ratkaisu. Funktion f_0 määritelmä vaatii, että $x \neq 1$. Kun $n = 1$, niin

$$f_1(x) = f_0(f_{1-1}(x)) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x - 1}{x},$$

missä $x \neq 0$. Kun $n = 2$, niin

$$f_2(x) = f_0(f_{2-1}(x)) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Kun $n = 3$, niin

$$f_3(x) = f_0(f_{3-1}(x)) = f_0(f_2(x)) = f_0(x).$$

Kun $n = 4$, niin

$$f_4(x) = f_0(f_{4-1}(x)) = f_0(f_3(x)) = f_0(f_0(x)) = f_1(x).$$

Kun $n = 5$, niin

$$f_5(x) = f_0(f_{5-1}(x)) = f_0(f_4(x)) = f_0(f_1(x)) = f_2(x).$$

Huomataan, että funktion f_n arvot toistuvat kolmen jaksoissa, toisin sanoen

$$f_{n+3}(x) = f_n(x)$$

kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla n. Näin ollen

$$f_{2023}(x) = f_{674\cdot 3+1}(x) = f_1(x),$$

joten

$$f_{2023}(2023) = f_1(2023) = \frac{2023-1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

6. Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa *lattiafunktiota* reaaliluvusta x, jonka arvo on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin x, siis

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}.$$

Esimerkiksi $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor = -1$ ja $\lfloor 10 \rfloor = 10$.

Tarkastellaan funktioita

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+5}, \\ g(x) &= \frac{-2x+8}{5}, \\ h(x) &= \lfloor x+3 \rfloor. \end{aligned}$$

Määritä funktioiden kuvaajien yhteiset pisteet.

Ratkaisu. Jos funktioiden kuvaajilla on yhteinen piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on x, niin $f(x) = g(x) = h(x)$. Ratkaistaan ensin yhtälö $f(x) = g(x)$ eli

$$\sqrt{x+5} = \frac{-2x+8}{5}. \tag{1}$$

Neliöimällä saadaan yhtälö

$$x+5 = \left(\frac{-2x+8}{5}\right)^2 = \frac{4x^2-32x+64}{25} \tag{2}$$

eli

$$25x + 125 = 4x^2 - 32x + 64.$$

Termejä siirtelemällä ja yhdistämällä saadaan toisen asteen yhtälö

$$4x^2 - 57x - 61 = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$x = \frac{-(-57) \pm \sqrt{(-57)^2 - 4\cdot 4\cdot(-61)}}{2\cdot 4} = \frac{57 \pm 65}{8}.$$

Yhtälön (2) ratkaisut ovat siis $x_1 = -1$ ja $x_2 = 15{,}25$. Koska neliöimällä saatu yhtälö (2) ei ole ekvivalentti yhtälön (1) kanssa, niin tarkistetaan ratkaisut: Koska

$$\sqrt{-1+5} = 2 = \frac{-2\cdot(-1)+8}{5},$$

niin $x_1 = -1$ on yhtälön (1) ratkaisu. Koska

$$\sqrt{15{,}25+5} = 4{,}5 \ne -4{,}5 = \frac{-2\cdot 15{,}25+8}{5},$$

niin $x_2 = 15{,}25$ ei ole yhtälön (1) ratkaisu. Näin ollen yhtälön (1) ainoa ratkaisu on $x = -1$.

Sijoittamalla $x = -1$ funktion h lausekkeeseen saadaan

$$h(-1) = \lfloor -1+3 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2.$$

Koska myös $f(-1) = g(-1) = 2$, niin funktioiden f, g ja h kuvaajilla on täsmälleen yksi yhteinen piste $(-1, 2)$.

7. Olkoot $a > 2$, b ja c reaalilukuja. Tarkastellaan seuraavia kolmea väittämää.

(1) Yhtälöllä $ax^2+bx+c = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

(2) Yhtälöllä $(a-1)x^2+(b-1)x+(c-1) = 0$ on yksi reaalinen ratkaisu.

(3) Yhtälöllä $(a-2)x^2+(b-2)x+(c-2) = 0$ on kaksi reaalista ratkaisua.

(a) Jos väittämät (1) ja (2) ovat totta, niin onko myös väittämä (3) totta?

(b) Jos väittämät (2) ja (3) ovat totta, niin onko myös väittämä (1) totta?

Ratkaisu 1. Havaitaan, että jokaisen kolmen väittämän yhtälössä termin x^2 kerroin on positiivinen ja erityisesti nollasta poikkeava, koska $a > 2$. Näin ollen kaikki yhtälöt ovat toisen asteen yhtälöitä, jolloin ratkaisujen määrä riippuu diskriminantin suuruudesta: jos diskriminantti on positiivinen, niin ratkaisuja on kaksi, jos diskriminantti on nolla, niin ratkaisuja on yksi, ja jos diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Merkitään $A = a-1$, $B = b-1$ ja $C = c-1$, jolloin $A > 1$ ja väittämät voidaan ilmaista diskriminantin avulla seuraavasti:

(1) $(B+1)^2 - 4(A+1)(C+1) < 0$,

(2) $B^2 - 4AC = 0$,

(3) $(B-1)^2 - 4(A-1)(C-1) > 0$.

Ensimmäinen ja kolmas väittämä voidaan uudelleenmuotoilla

(1) $(B^2 - 4AC) + (2B - 4A - 4C) < 3$,

(3) $(B^2 - 4AC) - (2B - 4A - 4C) > 3$.

Jos väittämät (2) ja (3) pätevät, niin

$$(B^2 - 4AC) - (2B - 4A - 4C) = -2B + 4A + 4C > 3,$$

toisin sanoen $2B - 4A - 4C < -3$. Näin ollen $2B - 4A - 4C < 3$ ja väite (1) pätee. Vastaus kohtaan (b) on siis kyllä.

Jos väittämät (1) ja (2) pätevät, niin

$$(B^2 - 4AC) + (2B - 4A - 4C) = 2B - 4A - 4C < 3.$$

Nyt pitää selvittää, että päteekö väittämä (3) eli $2B - 4A - 4C < -3$. Jos ehdot $-3 \leq 2B - 4A - 4C < 3$, $B^2 - 4AC = 0$ ja $A > 1$ voivat olla voimassa yhtä aikaa, niin silloin $2B - 4A - 4C < -3$ ei päde, mutta muuten se pätee. Toisen väittämän perusteella $B = \pm 2\sqrt{AC}$, joten pitää selvittää, onko olemassa arvoja $A > 1$ ja $C \geq 0$, joilla

$$-\frac{3}{4} \leq \pm\sqrt{AC} - A - C < \frac{3}{4}. \qquad (*)$$

Koska $-\sqrt{AC} - A - C \leq -1$, niin vain $+\sqrt{AC}$ on mahdollinen. Kerrotaan epäyhtälöketju $(*)$ tällöin luvulla -1, jolloin saadaan

$$-\frac{3}{4} < A + C - \sqrt{AC} \leq \frac{3}{4}.$$

Koska

$$A + C - \sqrt{AC} = \left(\sqrt{C} - \frac{1}{2}\sqrt{A}\right)^2 + \frac{3}{4}A > \frac{3}{4},$$

niin epäyhtälöketju $(*)$ ei voi toteutua vaadituilla A:n ja C:n arvoilla. Näin ollen myös kohtaan (a) vastaus on kyllä.

Ratkaisu 2. Oletetaan, että yhtälöllä $A'x^2 + B'x + C' = 0$ on korkeintaan yksi reaalinen ratkaisu joillakin $A' > 0$, B' ja C'. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $A'x^2 + B'x + C' \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x, koska $x \mapsto A'x^2 + B'x + C'$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Tarkastellaan sitten yhtälöä

$$(A' + 1)x^2 + (B' + 1)x + (C' + 1) = 0. \qquad (\dagger)$$

Koska nyt

$$\begin{aligned}
&(A' + 1)x^2 + (B' + 1)x + (C' + 1)\\
&= (A'x^2 + B'x + C') + (x^2 + x + 1)\\
&\geq 0 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

niin yhtälöllä $(\dagger)$ ei ole ratkaisuja. Kun valitaan $A' = a - 1$, $B' = b - 1$ ja $C' = c - 1$, niin edellä esitetyn perusteella väittämästä (2) yksin seuraa väittämä (1). Vastaus kohtaan (b) on näin ollen kyllä.

Valitaan sitten $A' = a - 2$, $B' = b - 2$ ja $C' = c - 2$. Jos väittämä (3) ei nyt toteudu (eli yhtälöllä $(a-2)x^2 + (b-2)x + (c-2) = 0$ on korkeintaan yksi reaalinen ratkaisu), niin myöskään väittämä (2) ei voi toteutua, koska yllä esitetyn perusteella yhtälöllä $(a-1)x^2 + (b-1)x + (c-1) = 0$ ei olisi reaalisia ratkaisuja. Näin ollen, josa väittämä (2) toteutuu, niin myös väittämän (3) on toteuduttava, joten vastaus kohtaan (a) on kyllä.

8. Onko totta, että jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin myös jokaisen kulman kosini on rationaalinen?

Ratkaisu. Merkitään tavalliseen tapaan kolmion kulmia α, β ja γ sekä näiden vastakkaisia sivuja a, b ja c. Kosinilauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

joten sinilauseen perusteella

$$\begin{aligned}
\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin lauseke (1) on rationaalinen, joten $\cos\gamma$ on rationaalinen. Näin ollen, jos kolmion jokaisen kulman sini on rationaalinen, niin myös jokaisen kulman kosini on rationaalinen.

9. Osoita, että jos $0 < a, b < 1$, niin

$$(a + b - ab)(a^b + b^a) > a + b.$$

Ratkaisu. Todistuksessa tarvitaan painotetun aritmeettisen keskiarvon ja painotetun geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä, jonka mukaan

$$\frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots \omega_n x_n}{\omega} \geq \sqrt[\omega]{x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \cdots x_n^{\omega_n}},$$

kun luvut $x_1, x_2, \dots, x_n$ ja painot $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ovat ei-negatiivisia ja $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n > 0$. Epäyhtälössä pätee yhtälö täsmälleen silloin, kun kaikki luvut x_k painoilla $\omega_k > 0$ ovat samoja. Sovelletaan epäyhtälöä luvuille 1 ja a painoilla b ja $1 - b$, jolloin saadaan

$$a + b - ab = b \cdot 1 + (1 - b) \cdot a \geq 1^b \cdot a^{1-b} = a^{1-b}.$$

Kertomalla puolittain luvulla a^b saadaan epäyhtälö

$$(a + b - ab)a^b \geq a^{1-b}a^b = a,$$

jossa pätee yhtälö vain, jos $a = 1$. Tehtävänannon mukaan $a < 1$, joten $(a + b - ab)a^b > a$. Vaihtamalla a:n ja b:n rooleja saadaan samanlaisella päättelyllä, että $(a + b - ab)b^a > b$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
(a + b - ab)(a^b + b^a) &= (a + b - ab)a^b + (a + b - ab)b^a\\
&> a + b. \qquad \square
\end{aligned}$$

10. 5×5-ruudukko täytetään satunnaisessa järjestyksessä kirjoittamalla jokaiseen ruutuun luku. Ruutuun kirjoitettava luku määräytyy sen mukaan, kuinka moni vieressä olevassa ruutu on jo täytetty. Vierekkäin olevia ruutuja ovat ne, joilla on yhteinen sivu. Esimerkiksi alla oleva ruudukko on täytetty luvuilla seuraavassa järjestyksessä: a5, b5, c5, d5, e5, e4, e3, e2, a4, a3, a2, a1, b1, c1, d1, e1, b4, c4, b3, b2, c2, d2, d3, d4, c3.

5	0	1	1	1	1
4	1	2	2	4	1
3	1	2	4	2	1
2	1	3	2	3	2
1	1	1	1	1	2
	a	b	c	d	e

Täytä ruudukko kahdella muulla tavalla säääntöjä noudattaen. Osoita, että ruudukkoon täytettyjen lukujen summa on aina 40 riippumatta siitä, missä järjestyksessä ruudukko on sääntöjä noudattaen täytetty.

Ratkaisu. Esitetään tässä vain yksi toisenlainen tapa täyttää ruudukko sääntöjä noudattaen:

5	0	2	0	2	2
4	2	2	3	0	1
3	3	0	3	1	3
2	0	3	4	3	0
1	1	2	0	1	2
	a	b	c	d	e

Ruudukon 25 ruutua on erotettu toisistaan $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ yhteisellä sivulla. Jokainen näistä 40 sivusta lasketaan ruudukon lukuihin täsmälleen kerran: silloin kun vierekkäisten ruutujen toinen ruutu täytetään. Näin ollen ruudukkoon täytettyjen lukujen summa on aina 40.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja