



Näppärää numerologiaa

Petri Laarne

Väitöskirjatutkija, Helsingin yliopisto

<https://www.nollakohta.fi>

Päässä-lasku on hauska harrastus. Monesta laskusta selviää nopeammin kuin kaveri ehtii avata kännykkänsä, kunhan osaa pyöritellä pieniä lukuja ja tuntee muutamien muistisääntöjen. Matemaattiselta kannalta jotkin säännöt menevät *numerologian* puolelle, eli kyse on enemmänkin satunnaisista yhteyksistä, mutta viihdyttäviä ne ovat yhtä kaikki.

Tästä listasta löytyy muutama laskutemppu, joilla voi ihastuttaa ystäviään ja hämmästyttää vihollisiaan – ja kaikki temput eivät olekaan sattumaa.

Lisää “matemaattisen ninjan” temppuja voit oppia esimerkiksi Colin Beveridgen blogista (englanniksi) [1].

Maileista kilometreihin

Fibonacci-lukujonolla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... on monta jännää ominaisuutta. Niistä yksi on, että peräkkäisten termien suhde lähestyy kultaista leikkausta, joka on likimain 1,618.

Vähemmän taianomainen juttu on, että yksi maili on noin 1,609 kilometriä. Tämä on kovin lähellä edellistä suhdelukua! Jos siis ihmettelet tienviittaa brittiläisen imperiumin jäänteillä, voit muuntaa yksiköiden välillä Fibonacci-jonoa käyttäen. 5 mailia on noin 8 kilsaa, ja 13 kilometriä vastaa noin 8 mailia.

(Toinen läheinen sattuma: $\ln(5) \approx 1,609$. Logaritmien soveltaminen päässä-laskuun on ihan oma tarinansa.)

Kymmenellä jaollisten mailien kohdalla 1,6 saattaa olla näppärämpi muuntosuhde – 20 mailia on 32 kilometriä. Kakkosen potenssit kunniaan!

Kakkosen neliöjuuri

Kakkosesta puheen ollen: tiesitkö, että $\sqrt{2} \approx 1,414$? Mutta vielä jännempää – tämän käänteisluku $1/\sqrt{2}$ on likimain 0,707. Desimaalit jaetaankin siis vain kahdella. Kun pohdit asiaa tarkemmin, huomaat ettei tämä ole ollenkaan sattumaa.

Paperimitta

Kakkosen neliöjuureen törmää usein vaikkapa geometriassa. Yksi näppärä trikki liittyy tavalliseen paperiarkiin. A4-arkin koko on $21 \times 29,7$ senttimetriä. Pitkä sivu on millimetrin tarkkuudella $\sqrt{2}$ kertaa niin pitkä kuin lyhyt.

Omituiset senttimitat selittyvät hienolla logiikalla. Kun A4-kokoisen paperin taittaa kahtia, saadaan A5-arkki. Tämän pitkä sivu on taas $\sqrt{2}$ -kertainen suhteessa lyhyeen sivuun. Toisin päin puolestaan kaksi vierekäistä A4-arkkia muodostaa A3-arkin, jolla on sama suhdeluku.

Kaiken alku ja juuri on A0-arkki, jonka pinta-ala on... täsmälleen yksi neliometri! Siispä A4:n pinta-ala on $(1/2)^4 = 1/16$ neliometriä.

Paperin vahvuus ilmoitetaan yleensä grammoina per neliometri. Esimerkiksi tavallinen tulostuspaperi on noin 80 g/m^2 . Tästä voi näppärästi laskea, että yksi A4-arkki painaa 5 grammaa.

Korkojen 72-sääntö

Jos suosimasi paperi on enemmän setelin muotoinen, kannattaa seuraava temppu panna korvan taakse.

Mikäli teet p prosenttia vuodessa kasvavan sijoituksen, menee sijoituksen tuplaantumiseen noin $72/p$ vuotta. Esimerkiksi kuuden prosentin korolla alkupanos tuplaantuu suunnilleen 12 vuodessa.

Tämä sääntö on tunnettu jo vuoden 1500 tienoilla. 72 ei ole aina tarkin mahdollinen luku, mutta kahdella ja kolmella jaollisuus tekee siitä näppärän päässälasukuun. Viidellä jaollisiin prosentteihin 70 on toki helppo suhdeluku.

Laskukaavan taustalla on totta kai oikeaa matikkaa. Tarpeeksi tiheästi maksettavaa korkoa voidaan arvioida eksponenttifunktiolla, ja yhtälöstä $(1 + p/100)^n = 2$ voidaan ratkaista

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1 + p/100)} \approx \frac{72}{p}.$$

Arvio on tarkin muutaman prosentin tienoilla, joten pikavippien vuosikorkoihin tätä ei kannata käyttää!

Riittävän tarkat π ja e

Lienee pakko mainita myös se vakio, jota on muodikasta opetella ulkoa. "How I need a drink, alcoholic in nature, after the heavy lectures involving quantum mechanics..." Lorun sisältöä en ala suomentaamaan, mutta sanojen pituuksia laskemalla saa selvitettyä 14 desimaalin edestä piitä. Se riittää ihan kaikkeen.

Sanon siltikin: tylsää! Tällä likiarvolla ei laske ilman apuvälineitä juuri mitään. Sitä paitsi kansainvälisen matikkapäivän juhliminen π rakoita nauttien 14.3. on takaperoista ja kovin... amerikkalaista.

Paljon paremmat bileet ovat 22. heinäkuuta. Nimittäin $22/7$ on erittäin hyvä likiarvo piille, ja murtolukuna se sopii päässälasukuun. Eikä tämän arvion desimaaleihin tarvita laskinta – jatka lukemista!

Sitä ennen kuitenkin pieni historiallinen tärppi. Luvun e desimaalien 2,7 1828 1828 4... alussa toistuu neljän

numeron pätkä. Luonnolliseen logaritmiin voi siis hyvin liittää jonkin menneen tapahtuman: vuonna 1828 yliopisto muutti Turusta Helsinkiin, Elias Lönnrot lähti ekalle runonkeruureissulleen, ja esimerkiksi Jules Verne syntyi. Kaksi faktaa yhdellä muistisäännöllä!

Seitsemäsosan desimaalit

Toistuvista desimaaleista ehkä kummallisin liittyy seitsemällä jakamiseen. Huomaatko kuvion?

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0,142857\ 142857\dots \\ \frac{2}{7} &= 0,285714\ 285714\dots \\ \frac{3}{7} &= 0,428571\ 428571\dots \\ \frac{4}{7} &= 0,571428\ 571428\dots \\ \frac{5}{7} &= 0,714285\ 714285\dots \\ \frac{6}{7} &= 0,857142\ 857142\dots \end{aligned}$$

Jokaisessa desimaalikehitelmässä toistuu loputtomiin sarja 142857, vain eri kohdasta aloitettuna. Sarjankin voi pilkkoa vielä tuplautuviin osiin 14, 28 ja $56 + 1$.

Tämä kaikki ei voi olla yhteensattumaa. Mistä on kyse?

No, $1/7$ on jakolaskuna "0, jää 1". Kerrotaan jakojäännös kymmenellä, ja $10/7$ on "1, jää 3". Siispä ensimmäinen desimaali on 1. Toista desimaalia varten lasketaan $30/7$ eli "4, jää 2", kolmatta varten $20/7$, ja niin edelleen.

Jatka itse tätä laskua! Huomaat pian, että lasket samaa laskua toista kertaa. Jäännökset muodostavat kuuden luvun mittaisen syklin, ja vieläpä sellaisen, jossa esiintyvät luvut 1, ..., 6 mutta eri järjestyksessä. Eri jakolaskut $n/7$ vastaavat eri aloituskohtia tässä syklissä.

Samanlaisia sääntöjä, mutta toki huomattavasti pidempiä sellaisia, löytyy tietyille muillekin alkuluvuille. Seitsemästä seuraava on 17. Koko lista löytyy OEIS-tietokannasta [2].

Viitteet

- [1] <https://flyingcoloursmaths.co.uk/blog/>
- [2] A001913: *Full reptend primes: primes with primitive root 10*. Online Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org/A001913>