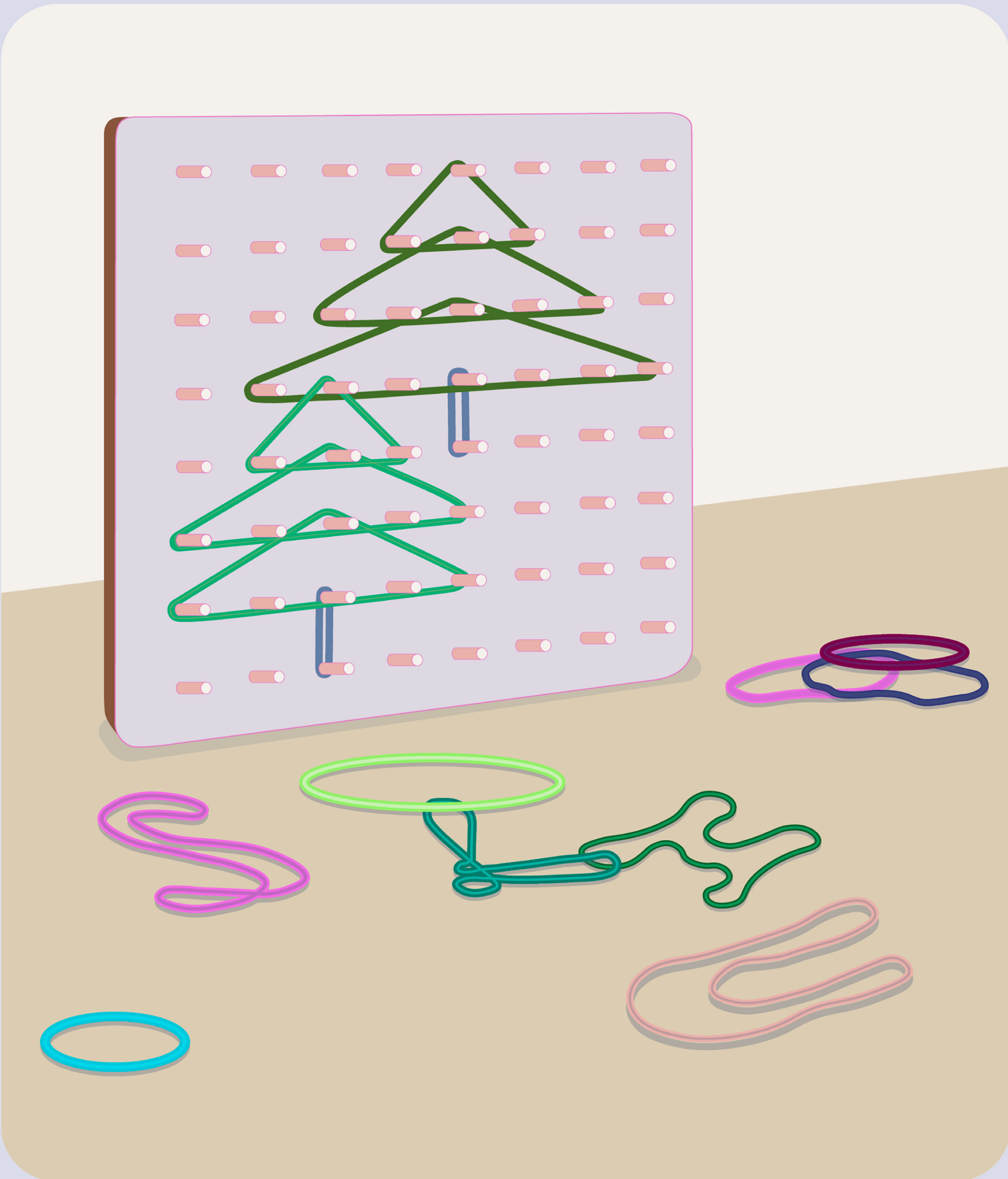
SOLMU

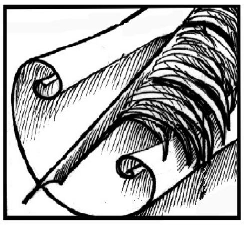
MATEMATIIKKALEHTI 2/2023

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Kilpailutoiminnan taloudellinen epävarmuus (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) 3
Tarinoita polynomeista (osa 3) (Jukka Tuomela) 5
Vertailevaa geometrian opetusta (Hannu Korhonen) 13
Solmun 3/2022 tehtävien 11–20 ratkaisut 20
Mietteitä matematiikasta (Jukka Liukkonen) 25



Kilpailutoiminnan taloudellinen epävarmuus

Pääkirjoitus

Olen viime viikkojen aikana käynyt eduskunnassa kolmesti osana MAOL:n, BMOL:n ja FETO:n delegaatiota keskustelemassa eri ihmisten kanssa kilpailutoiminnan jatkuvuudesta ja jatkuvuuden taloudellisista edellytyksistä.

Suomella on pitkä historia tiedeolympialaisiin osallistumisessa. Esimerkiksi kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin Suomi on osallistunut ensimmäisen kerran vuonna 1965. Menestys on ollut vaihtelevaa, mutta kilpailutoiminta ja valmennus ovat motivoineet monia koululaisia. Näistä monet ovat myöhemmin sijoittuneet yliopistoihin. Kilpailutoiminta ja tieteen harrastaminen antavat kuitenkin hyvän pohjan muullekin kuin akateemiselle uralle.

Koululaisille kilpailut antavat myös vertaistukea: koulussa ei välttämättä ole kovinkaan monta matematiikan tai fysiikan tai vaikkapa filosofian harrastajaa. Valmennuksen kautta voi tutustua muihin kaltaisiinsa nuoriin.

Toiminnassa on yksi ongelma, ja se on talous. Vaikka toiminta on kustannustehokasta, niin se vaatii rahoitusta. Rahoitus tulee OPH:n järjestömomentilta. Järjestömomentilla on kovin vähän jaettavaa rahaa hakijoiden lukumäärään ja tarpeisiin suhteutettuna. Lisäksi tältä momentilta voidaan saada rahaa vain vuodeksi kerrallaan. Kun päätös rahoituksesta tulee touko- tai kesäkuussa, niin alkuvuosi on jouduttu elämään riskillä.

Matematiikan olympiavalmennukseen tehdään valtava määrä vapaaehtoistyötunteja. Ongelma ei ole kuitenkaan vain matematiikan valmennuksen ja kilpailujen rahoituksessa, vaan kaikessa tiedekilpailutoiminnassa. Tällä hetkellä ollaan pisteessä, jossa esimerkiksi MAOL joutuu miettimään, miten kauan toimintaa enää voi jatkaa.

Jokainen poliitikko tai avustaja, jonka kanssa tilanteesta on keskusteltu, on vaikuttanut ymmärtävän ongelman ja ymmärtävän toiminnan tärkeyden. Pelkkä sympatia ei vain riitä. Pelkän sympatian ja epävarmuuden varaan ei voida perustaa pitkäjänteistä ja laadukasta toimintaa.

Yllä oleva virke on sikäli väärin, että itse asiassa sympatian ja epävarmuuden varaan on rakennettu toimintaa. Sitä on jopa kehitetty. Se on myös laadukasta. Epävarmuus on kuitenkin kuluttavaa, ja se syö aikaa ja intoa itse asiaan keskittymiseltä. Taloudellinen tilanne täytyy saada korjattua kuntoon.

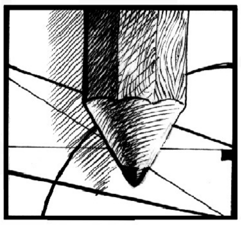
Esimerkiksi matematiikan olympiavalmennuksen toiminta on kattavaa. Materiaaleja voi hyödyntää kuka tahansa. Opettaja voi luokassa tarjota ylöspäin eriyttävää materiaalia vaikka printtaamalla peruskoululaisten ensimmäisen valmennuskirjeen. Materiaaleja voi vapaasti hakea kuka tahansa. Myös valmennusviikonloppuihin voi tulla.

Yleinen ajatus matematiikan olympiavalmennuksessa on ollut se, että toiset harrastavat erilaisia lajeja, kuten jääkiekkoa, me vain satumme harrastamaan matematiikan olympiavalmennusta. Uskomme toimintaan. Pidämme sitä hyödyllisenä. Lisäksi se on kivaa. Siksi teemme näin. Toimintaedellytykset pitäisi kuitenkin turvata.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

PS. MAOL:lla on kilpailutoiminnan rahasto, johon esim. firmat voivat lahjoittaa rahaa, jos ne haluavat tukea nuorten tiedeolympiatoimintaa: `https://maol.fi/tue-kilpailutoimintaa/`

PPS. Jos innostuit peruskoululaisten valmennuskirjeestä, niin sen löydät täältä: `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/2023/kirje1_internet.pdf`



Tarinoita polynomeista (osa 3)

Jukka Tuomela
Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
jukka.tuomela@uef.fi

Kertaus

Kirjoituksissa [9, 10] katsottiin polynomeja nimenomaan algebran näkökulmasta. Nyt puhutaan siitä, miten polynomit liittyvät geometriaan. Kuten edellisissä kirjoituksissa oletetaan, että lukija tietää mitä tarkoittaa polynomien yhteen- ja kertolasku, ja lisäksi toisen asteen polynomin ratkaisukaava oletetaan tunnetuksi. Tätä ratkaisukaavaa ei kuitenkaan tarvita; muistetaan viime kerralta [10], että juurilausekkeet ja siis ratkaisukaavat eivät oikeastaan ole kovin hyödyllisiä, joten on parempi ja kätevämpi laskea ilman niitä. Parissa kohtaa tulee ratkaistavaksi lineaarinen yhtälöryhmä, ja oletetaan, että lukija osaa ratkaista tämän.

Erinomainen kirja polynomeista kiinnostuneille on [3]. Eukleideen geometriaa modernista näkökulmasta on tarkasteltu Hartshornen kirjassa [5]. Suomeksi Matti Lehtinen on kirjoittanut laajasti Eukleideen geometriasta [7]. wxMaxima, jonka avulla esimerkkejä voi helposti laskea, on vapaasti saatavilla oleva symbolisen laskennan ohjelmisto.[1] Myös Sage on ilmainen ohjelmisto, jolla voi laskea sekä symbolisesti että numeerisesti [1].[2] Jäljempänä olevat tehtävät voi helposti laskea myös Sagen avulla.

Polynomit ja Eukleideen geometria: käytäntö

Yleensä kilpatehtävissä, ja miksei muutenkin, polynomeihin liittyvät kysymykset pidetään tiukasti erillään geometrian kysymyksistä. Odotetaan, että jos tehtävä on esitetty geometrisesti, niin ratkaisunkin pitäisi olla samaa tyyliä. Kuitenkin monet geometrian tehtävät ratkeavat systemaattisesti polynomien avulla: oikeastaan koko Eukleideen geometria voidaan tulkita polynomien avulla.

Esimerkki 1. Lehtisen tehtäväkokoelmassa *Kilpailumatematiikan lajeja ja periaatteita* oli seuraava tehtävä.

> Kolmion sivujen pituudet ovat 10, 17 ja 21. Määritä kolmion lyhimmän korkeusjanan pituus.

Olkoot kolmion pisteet $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (21,0)$ ja $p_2 = (a,b)$. Siis

$$\begin{aligned} f_0 &= a^2 + b^2 - 10^2 = 0, \\ f_1 &= (a-21)^2 + b^2 - 17^2 = 0, \end{aligned}$$

ja koska $f_0 - f_1 = 42a - 252 = 0$, niin $a = 6$, mistä sitten $b = \pm 8$, joten vastaus on 8.[3] ✩

[1] https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/index.html

[2] https://www.sagemath.org/index.html

[3] Lyhin korkeusjana vastaa pisintä sivua, mutta jos tätä ei muista, niin nyt on helppo laskea myös muitten korkeusjanojen pituudet, kun p_2 tunnetaan.

On tapana sanoa, että Eukleideen konstruktiot perustuvat viivottimen ja harpin käyttöön. Mutta viivotin on suora:

$$ax + by + c = 0,$$

siis ensimmäisen asteen polynomi, ja harppi on ympyrä:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

siis toisen asteen polynomi. Kaikki konstruktiot voidaan siis esittää (verrattain yksinkertaisten) polynomien avulla.

Luonnollisesti ei aina ole järkevää muuttaa geometrian tehtävää polynomitehtäväksi; monesti geometrinen intuitio johtaa helpompaan ratkaisuun. Tämä näkökulma kuitenkin avaa mahdollisuuden puhtaasti algoritmiseen ratkaisuun. Geometrisessa tehtävässä on joitain oletuksia, ja niistä pitäisi osoittaa jokin väite. Jos edetään systemaattisesti, niin oletukset ovat muotoa

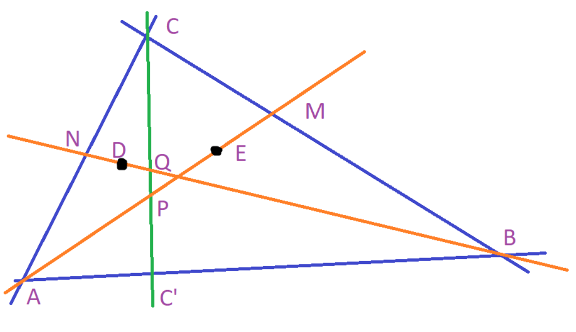
$$f_1 = \cdots = f_m = 0,$$

missä f_j ovat polynomeja, ja väite on $h = 0$, missä h on polynomi. Jos väite on totta, niin pitäisi olla olemassa polynomit q_j siten, että

$$h = q_1 f_1 + \cdots + q_m f_m.$$

Jos siis löydetään tällaiset polynomit, niin tämä todistaa väitteen. Tämän voi ajatella niin, että jaetaan h polynomeilla f_j, polynomit q_j ovat osamääriä, ja väite pätee, jos jakojäännös on nolla. Palataan myöhemmin siihen, miten tarkkaan ottaen jaetaan monella polynomilla, ja katsotaan tässä vain esimerkkejä.

Koska tämäntyyppisessä ratkaisussa esiintyy varsin paljon muuttujia/parametreja, niin kannattaa aina valita koordinaatit siten, että lausekkeet ovat mahdollisimman yksinkertaisia. Äskeisessä esimerkissä oli kätevää valita yksi kolmion pisteistä origoksi. Näin voidaan geometrian tehtävissä aina tehdä, koska väitteet eivät riipu pisteitten absoluuttisesta paikasta vaan vain niitten keskinäisistä suhteista. Tämän takia koordinaatistoa voidaan myös kiertää, joten kun on valittu jokin piste $p = (0, 0)$, niin edelleen voidaan valita, että jokin toinen piste on $q = (a, 0)$. Lisäksi usein geometrian tehtävät/väitteet eivät riipu valitusta skaalasta, jolloin voidaan vielä asettaa $a = 1$.



Kuva 1: Esimerkin 2 tilanne.

Esimerkki 2. Katsotaan kuvan 1 tilannetta, joka on Lehtisen tehtäväkokoelmassa *Kilpailumatematiikan lajeja ja periaatteita*. Kulma ACB on suorakulma, BN ja AM ovat kulmanpuolittajia, ja D on janan QN keskipiste ja E on janan PM keskipiste.

Osoita, että DE ja AB ovat yhdensuuntaisia.

Valitaan ensin A origoksi ja olkoon $B = (1, 0)$. Olkoon edelleen $D = (x_6, y_6)$ ja $E = (x_7, y_7)$. Saadaan siis tehtävä

Osoita, että $h = y_6 - y_7 = 0$.

Olkoon $kx - y = 0$ pisteitten A, N ja C kautta kulkeva suora. Koska kulma ACB on suorakulma, niin heti saadaan, että

$$C = (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{k^2 + 1}, \frac{k}{k^2 + 1} \right).$$

Olkoon edelleen $C' = (x_1, 0)$, $P = (x_1, y_5)$, $Q = (x_1, y_4)$, $N = (x_2, y_2)$ ja $M = (x_3, y_3)$. Koska D ja E puolittavat janat, niin selvästi

$$2h = y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = kx_2 - y_3 + y_4 - y_5.$$

Huomaa, että k pitää ajatella vapaasti valittavana parametrina. Pitäisi siis osoittaa, että $h = 0$ kaikilla k:n arvoilla. Välitavoitteena pitäisi nyt laskea h:lle lauseke, jossa esiintyy vain muuttujia x_2 ja x_3 sekä parametri k.

Pisteitten B ja C kautta kulkeva suora on $x + ky - 1 = 0$, joten $x_3 + ky_3 - 1 = 0$, mistä saadaan y_3. Edelleen $x_3 y_5 - x_1 y_3 = 0$, joten

$$y_5 = \frac{1 - x_3}{k(k^2 + 1)x_3}.$$

Suora $x + cy - 1 = 0$ kulkee pisteen N kautta, jos $c = (1 - x_2)/(kx_2)$, joten y_4 voidaan ratkaista yhtälöstä $x_1 + cy_4 - 1 = 0$, mistä saadaan

$$y_4 = \frac{k^3 x_2}{(k^2 + 1)(1 - x_2)}.$$

Sijoittamalla nämä h:n lausekkeeseen saadaan

$$\begin{aligned} h &= \frac{h_1}{2kx_3(k^2 + 1)(x_2 - 1)}, \\ h_1 &= x_3(k^2 + 1)h_0 + k^2 x_3 - x_2 + 1, \\ h_0 &= x_2 x_3 + k^2 x_2^2 - x_3 - 2k^2 x_2. \end{aligned}$$

Pitäisi siis osoittaa, että $h_1 = 0$ kaikilla k:n arvoilla.

Jos AM on kulman puolittaja, niin

$$\begin{aligned} y_3^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \quad \Longrightarrow \\ f_0 &= (k^2 + 1)x_3^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vastaavasti jos BN on kulman puolittaja, niin

$$\begin{aligned} y_2^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad \Longrightarrow \\ f_1 &= (k^2+1)x_2^2 - 2(k^2+1)x_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Mutta nyt voidaan tarkistaa, että

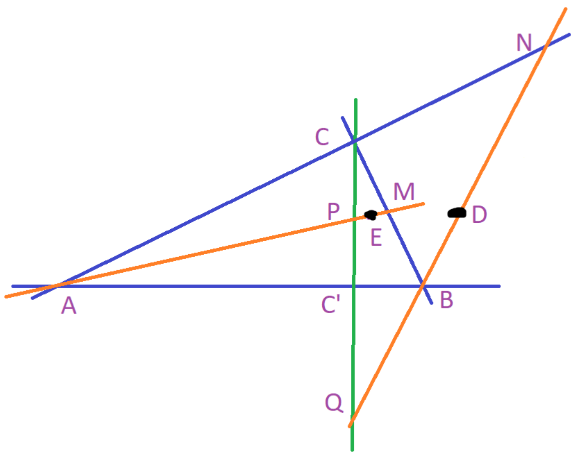
$$h_1 = (x_2 - 1)f_0 + k^2 x_3 f_1,$$

mikä todistaa väitteen.

Tässä saadaan myös bonustulos. Huomataan, että jos α ja β ovat polynomin f_1 nollakohdat, ja jos oletetaan, että $\alpha < \beta$, niin

$$0 < \alpha < 1 < \beta < 2.$$

Tapaus α vastaa kuvaa 1, ja tapaus β puolestaan kuvaa 2. Väite siis pätee molemmissa tapauksissa, koska polynomien kannalta laskut ovat samat. ✰



Kuva 2: Esimerkin 2 "vaihtoehtoinen" tilanne.

Edellisen esimerkin laskut ovat tietysti työläitä käsin laskien, mutta ne ovat sinänsä helppoja: lasketaan milloin piste on suoralla, tai missä kaksi suoraa leikkaa tai milloin kaksi janaa ovat yhtä pitkiä. Lisäksi laskussa ei varsinaisesti tarvinnut keksiä mitään erityisiä niksejä: piti vain muotoilla haluttu väite polynomiyhtälönä $h = 0$, minkä jälkeen kärsivällisesti laskettiin, että tosiaankin $h = 0$.

Katsotaan sitten esimerkki, jossa esiintyy myös ympyrä. Tätä varten on ensin kätevää johtaa eräs kaava.

Diskriminantti

Alkeisgeometrian tehtävissä usein esiintyy tilanne, jossa suora sivuaa ympyrää. Katsotaan miten tälle saadaan ehto. Olkoon annettu polynomi

$$f = c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

ja haluttaisiin tutkia, milloin f:llä on kaksinkertainen nollakohta. Olkoot nollakohdat α ja β; polynomin f *diskriminantti* on

$$\delta = \delta(f) = c_2^2(\alpha - \beta)^2 = c_1^2 - 4c_0c_2.$$

Mistä tuo viimeinen yhtäsuuruus tulee? Muistetaan viime kerralta [10], että ei lasketa nollakohtia, vaan lasketaan nollakohdilla. Koska α ja β ovat nollakohtia, niin

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 = c_2(x-\alpha)(x-\beta) \quad \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -c_1/c_2 \\ \alpha\beta = c_0/c_2. \end{cases}$$

Toisaalta

$$\begin{cases} c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 = 0 \\ c_2\beta^2 + c_1\beta + c_0 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$
$$c_2(\alpha^2 + \beta^2) = -2c_0 - c_1(\alpha+\beta) = -2c_0 + c_1^2/c_2.$$

Siispä

$$\delta(f) = c_2^2(\alpha-\beta)^2 = c_2^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) = c_1^2 - 4c_0c_2.$$

Selvästi siis f:llä on kaksinkertainen nollakohta, jos ja vain jos $\delta = 0$. Tämän idean avulla voidaan laskea, milloin suora sivuaa ympyrää. Olkoon annettu

$$\begin{aligned} &e_1x + e_2y + e_0 = 0, \\ &(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Jos $e_2 \neq 0$ ja eliminoidaan y, niin saadaan polynomi

$$\begin{aligned} f &= c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0, \\ c_2 &= e_1^2 + e_2^2, \\ c_1 &= 2\big(e_1e_2p_2 - e_2^2p_1 + e_1e_0\big), \\ c_0 &= \big(e_2p_2 + e_0\big)^2 + e_2^2(p_1^2 - r^2). \end{aligned}$$

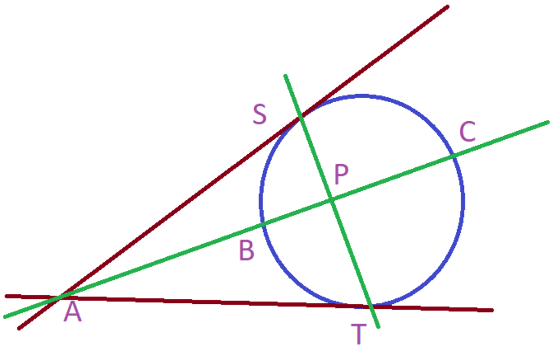
Suora sivuaa ympyrää, jos suoralla ja ympyrällä on täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin f:llä täytyy olla kaksinkertainen nollakohta, joten sen diskriminantin täytyy olla nolla. Nyt suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \delta(f) &= c_1^2 - 4c_0c_2 = -4e_2^2\delta_0, \\ \delta_0 &= \big(e_1p_1 + e_2p_2 + e_0\big)^2 - (e_1^2 + e_2^2)r^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Oletuksen mukaan $e_2 \neq 0$, joten suora sivuaa ympyrää, jos $\delta_0 = 0$. Jos oletettaisiin $e_1 \neq 0$ ja eliminoitaisiin x, niin päädyttäisiin samaan tulokseen.

Huomaa, että ehto $\delta_0 = 0$ tarkoittaa, että suoran $e_1x + e_2y + e_0 = 0$ kohtisuora etäisyys pisteestä $p = (p_1, p_2)$ on r. Joka tapauksessa tässä laskettiin tangentti käyttämättä derivaattoja. Yleisemminkin voitaisiin jonkin käyrän tangentti määritellä ilman derivaattoja vetoamalla leikkauksen moninkertaisuuteen. Siirrytään nyt kuitenkin tarkastelemaan esimerkkejä.

Esimerkkejä



Kuva 3: Esimerkin 3 tilanne.

Esimerkki 3. Seuraava tehtävä oli pohjoismaitten matematiikkakilpailussa vuonna 2007. Väitetään, että kuvan 3 tapauksessa

$$AP \cdot BC = 2\,AB \cdot PC,$$

missä siis esimerkiksi AB on pisteitten A ja B välinen etäisyys.

Ensimmäinen askel, kuten edellisessä esimerkissä, on kirjoittaa todistettava väite muodossa $h = 0$, missä h on jokin polynomi.

Olkoon A origo, ja olkoon $kx - y = 0$ pisteitten A, $B = (x_2, y_2)$, $P = (x_1, y_1)$ ja $C = (x_3, y_3)$ kautta kulkeva suora.[4] Siispä

$$\begin{aligned} AP^2 &= (1+k^2)x_1^2 \\ AB^2 &= (1+k^2)x_2^2, \\ BC^2 &= (1+k^2)(x_2-x_3)^2, \\ PC^2 &= (1+k^2)(x_1-x_3)^2. \end{aligned}$$

Olkoon edelleen

$$\begin{aligned} h &= \frac{AP^2 \cdot BC^2 - 4\,AB^2 \cdot PC^2}{(1+k^2)^2} \\ &= x_1^2(x_2-x_3)^2 - 4x_2^2(x_1-x_3)^2 = -h_0h_1, \\ h_0 &= 2x_2x_3 - x_1(x_3+x_2), \\ h_1 &= 2x_2x_3 + x_1(x_3-3x_2). \end{aligned}$$

Pitäisi siis osoittaa, että joko $h_0 = 0$ tai $h_1 = 0$.

Valitaan $T = (1, 0)$, ja olkoot ympyrän säde r ja $S = (x_0, y_0)$. Tällöin pisteitten A ja S kautta kulkeva suora on $y_0x - x_0y = 0$ ja ympyrän yhtälö on

$$f_0 = (x-1)^2 + (y-r)^2 - r^2 = 0\ .$$

Kaavan (1) perusteella suora sivuaa ympyrää, jos

$$\delta_0 = -y_0(r^2y_0 - y_0 + 2rx_0) = 0.$$

[4] Jätän harjoitustehtäväksi tapauksen, jossa $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Koska $y_0 \neq 0$, niin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} r^2y_0 - y_0 + 2rx_0 = 0 \\ (x_0-1)^2 + (y_0-r)^2 - r^2 = 0 \end{cases} \implies$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}, \frac{2r}{1+r^2}\right).$$

Huomataan, että piste S on aina yksikköympyrällä: $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Suora, joka kulkee T:n kautta, on muotoa $x + cy - 1 = 0$, ja nyt sijoittamalla (x_0, y_0) saadaan, että se kulkee myös S:n kautta, jos $c = r$. Nyt piste $P = (x_1, y_1)$ saadaan ratkaisemalla

$$\begin{cases} x_1 + ry_1 - 1 = 0 \\ kx_1 - y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{kr+1} \\ y_1 = \dfrac{k}{kr+1}. \end{cases}$$

Sijoittamalla pisteet B ja C ympyrän yhtälöön nähdään, että x_2 ja x_3 ovat polynomin

$$f_1 = (k^2+1)x^2 - 2(kr+1)x + 1$$

nollakohdat. Siis $x_2 + x_3 = 2(kr+1)/(k^2+1)$ ja $x_2x_3 = 1/(k^2+1)$, joten

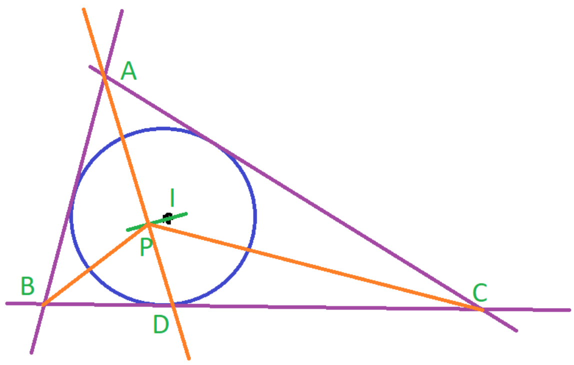
$$h_0 = \frac{2}{k^2+1} - \frac{1}{kr+1}\frac{2(kr+1)}{k^2+1} = 0,$$

ja väite on todistettu.

Tästä saadaan myös bonustulos, kuten edellisessäkin esimerkissä. Huomaa, että missään vaiheessa ei tarvittu sitä, onko $x_2 < x_3$ vai $x_3 < x_2$. Toisin sanoen, jos "vaihdetaan" B ja C, niin tulos on edelleen voimassa:

$$AP \cdot BC = 2\,AC \cdot PB.$$

☆



Kuva 4: Esimerkin 4 tilanne.

Esimerkki 4. Toinen samantyyppinen esimerkki löytyi oppaasta [6, s. 56], kuva 4. Hauskasti tässä saadaan sama ympyrän yhtälö kuin edellisessä esimerkissä.

Olkoot α kulma BPD ja β kulma DPC. Väitetään, että itse asiassa $\alpha = \beta$. Olkoon

$$h = \sin(\alpha - \beta),$$

ja haluttaisiin siis osoittaa, että $h = 0$. Nyt h pitäisi ilmaista jotenkin polynomina.

Olkoot B origo, $D = (1, 0)$, $C = (x_0, 0)$, $A = (x_1, y_1)$ ja $P = (x_2, y_2)$. Olkoon edelleen r ympyrän säde, jolloin $I = (1, r)$, ja ympyrän yhtälö on taas

$$f_0 = (x-1)^2 + (y-r)^2 - r^2 = 0.$$

Olkoon $Q = (x_2, 0)$ ja olkoot θ_0 kulma BPQ, θ_1 kulma QPD ja θ_2 kulma QPC. Selvästi $\alpha = \theta_0 + \theta_1$ ja $\beta = \theta_2 - \theta_1$. Merkitään

$$\begin{aligned} c_0 &= \cos(\theta_0), & s_0 &= \sin(\theta_0),\\ c_1 &= \cos(\theta_1), & s_1 &= \sin(\theta_1),\\ c_2 &= \cos(\theta_2), & s_2 &= \sin(\theta_2). \end{aligned}$$

Käyttäen hyväksi sitä, että $c_j^2 + s_j^2 - 1 = 0$, voidaan nyt suoraviivaisesti laskea, että

$$h = (1 - 2s_1^2)(s_0c_2 - s_2c_0) + 2c_1s_1(s_0s_2 + c_0c_2).$$

Nyt h on polynomi ja voidaan edetä kuten edellisissä esimerkeissä.

Olkoot edelleen

$$\begin{aligned} d_0^2 &= x_2^2 + y_2^2,\\ d_1^2 &= (1-x_2)^2 + y_2^2,\\ d_2^2 &= (x_0 - x_2)^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} c_0 &= y_2/d_0, & s_0 &= x_2/d_0,\\ c_1 &= y_2/d_1, & s_1 &= (1-x_2)/d_1,\\ c_2 &= y_2/d_2, & s_2 &= (x_0 - x_2)/d_2. \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä saadaan

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{d_0 d_1^2 d_2 h}{y_2}\\ &= 2(1-x_2)y_2^2 + d_1^2(2x_2 - x_0) - 2x_2^3 +\\ &\quad 6x_2^2 - 2(x_0+2)x_2 + 2x_0\\ &= (2-x_0)y_2^2 + (2-x_0)x_2^2 - 2x_2 + x_0. \end{aligned}$$

Nyt ollaan jo päästy eroon kulmamuuttujista. Lisäksi x_0 on parametri, joka voidaan valita vapaasti, joten h_0:n pitäisi olla nolla kaikilla x_0. Pitäisi vielä laskea (x_2, y_2).

Pisteen D kautta kulkeva suora on $x + k_0y - 1 = 0$ ja pisteen I kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa tätä suoraa vastaan, on $k_0x - y + r - k_0 = 0$. Siispä

$$\begin{cases} x_2 + k_0y_2 - 1 = 0\\ k_0x_2 - y_2 + r - k_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{k_0^2 - k_0r + 1}{k_0^2 + 1}\\ y_2 = \dfrac{r}{k_0^2 + 1}. \end{cases}$$

Tästä saadaan

$$h_1 = \frac{(k_0^2+1)}{r}h_0 = (2k_0 - r)x_0 + 2r - 2k_0.$$

Myös r on parametri, joka voidaan valita vapaasti, joten pitäisi osoittaa, että $h_1 = 0$ kaikilla x_0 ja r. Pitää vielä laskea k_0.

Suora $x + k_1y - x_0 = 0$ kulkee pisteen C kautta, ja pitäisi laskea k_1 siten, että suora sivuaa ympyrää. Käytetään taas kaavaa (1):

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (x_0-1)^2 - r^2 + 2k_1r(1-x_0) = 0,\\ k_1 &= \frac{(x_0-1)^2 - r^2}{2r(x_0-1)}. \end{aligned}$$

Esimerkin 3 perusteella pisteitten A ja B kautta kulkeva suora on

$$2rx - (1-r^2)y = 0,$$

joten nyt voidaan laskea A:n koordinaatit:

$$\begin{cases} 2rx_1 - (1-r^2)y_1 = 0\\ 2r(x_0-1)(x_1-x_0) + \big((x_0-1)^2 - r^2\big)y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{(1-r^2)(x_0-1)}{x_0 - r^2 - 1}\\ y_1 = \dfrac{2r(x_0-1)}{x_0 - r^2 - 1}. \end{cases}$$

Tästä sitten saadaan

$$k_0 = \frac{1-x_1}{y_1} = \frac{r(x_0-2)}{2(x_0-1)}.$$

Sijoittamalla k_0 h_1:n lausekkeeseen nähdään, että $h_1 = 0$, mikä todistaa väitteen. ✩

Polynomit ja Eukleideen geometria: teoria

Edellä polynomit tulivat esille eräänlaisena laskennallisena työkaluna. Konkreettisessa ongelmassa systemaattisesti laskettiin polynomien avulla, mikä johti ratkaisuun. Polynomit kuitenkin valaisevat myös Eukleideen systeemin teoreettisia ominaisuuksia. Esimerkiksi matemaatikkoja varsin pitkään vaivasi seuraava ongelma: voidaanko luku $\sqrt[3]{2}$ konstruoida harpilla ja viivottimella?

Polynomien avulla nähdään varsin helposti, että tämä on mahdotonta. Alkeisgeometrian konstruktioissa ”uusia” pisteitä saadaan joko suorien leikkauspisteestä, suoran ja ympyrän leikkauspisteestä tai kahden ympyrän leikkauspisteistä. Pitää siis tarkistaa nämä kolme tapausta:

1. Kahden suoran leikkaus:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

   Jos luvuissa a_j, b_j ja c_j ei esiinny kuutiojuuria, niin niitä ei selvästi voi ilmestyä lukuihin x ja y.

2. Suoran ja ympyrän leikkaus

$$\begin{aligned} &ax + by + c = 0, \\ &(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

   Nyt saadaan, että

$$\begin{cases} x = h_1(a, b, c, x_0, y_0, r) \pm \sqrt{h_2(a, b, c, x_0, y_0, r)}, \\ y = -(ax + c)/b, \end{cases}$$

   missä h_1 ja h_2 ovat rationaalifunktioita, siis funktioita, jotka ovat muotoa p/q, missä p ja q ovat polynomeja. Jälleen jos vakiot eivät alunperin sisällä kuutiojuuria, niin myöskään x ja y eivät sisällä kuutiojuuria.

3. Kahden ympyrän leikkaus

$$\begin{aligned} f_1 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = 0, \\ f_2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = 0. \end{aligned}$$

   Tästä saadaan

$$f_1 - f_2 = 2(x_1 - x_0)x + 2(y_1 - y_0)y + d,$$

   missä

$$d = x_1^2 - x_0^2 + y_1^2 - y_0^2 + r_1^2 - r_0^2.$$

   Mutta $f_3 = f_1 - f_2 = 0$ on suoran yhtälö, ja koska systeemi $f_1 = f_2 = 0$ on ekvivalentti systeemin $f_1 = f_3 = 0$ kanssa, niin tämä tapaus palautuu tapaukseen 2.

Täsmällinen lause, jossa yleisemminkin karakterisoidaan, mitkä luvut saadaan harpilla ja viivottimella, löytyy kirjasta [2, Theorem 10.1.6]. Lauseen todistus perustuu täysin yllä mainittuihin kolmeen kohtaan.

Tästä muuten myös nähdään, että viivotin on turha: kaikki konstruktiot voidaan tehdä pelkästään harpilla. Tämä seuraa kohdasta 3: koska kahden ympyrän ”erotus” on suora/viivotin, niin viivotinta voidaan aina ”simuloida” ympyröillä/harpeilla.

Tavallaan voisi sanoa, että Eukleideen systeemi oli jotenkin sopivasti sekä yksinkertainen että monipuolinen. Yksinkertainen siinä mielessä, että systeemin kokonaisuus ei levinnyt käsistä, ja monipuolinen siinä mielessä, että systeemin avulla kuitenkin saatiin paljon mielenkiintoisia tuloksia.

Eukleideen systeemissä otettiin kaksi käyrää, suora ja ympyrä, eräänlaisina annettuina muotoina, tai algoritmisesti eräänlaisina alkeisoperaatioina, jotka voidaan aina tehdä äärellisessä ajassa. Eukleideen konstruktion vaativuus voitaisiin nyt ajatella (painotettuna) summana tehtävässä tarvittavista viivotin- ja harppioperaatioista. Uskoisin, että Eukleides, kuten nykymatemaatikotkin, olisi pitänyt konstruktiota eleganttina, jos siinä on mahdollisimman vähän alkeisoperaatioita. Nykyisin tämänkaltaisia kysymyksiä tutkitaan laskennallisessa geometriassa.[5]

Eukleideen systeemin laajentaminen yleisempien tasokäyrien analyysiin on kuitenkin hankalaa. Nythän esimerkiksi voitaisiin ajatella, että paraabelin piirtäminen olisi myös alkeisoperaatio. Tästä saadaan selvästi vahvempi systeemi, koska kuutiojuuri saadaan nyt helposti: paraabelit

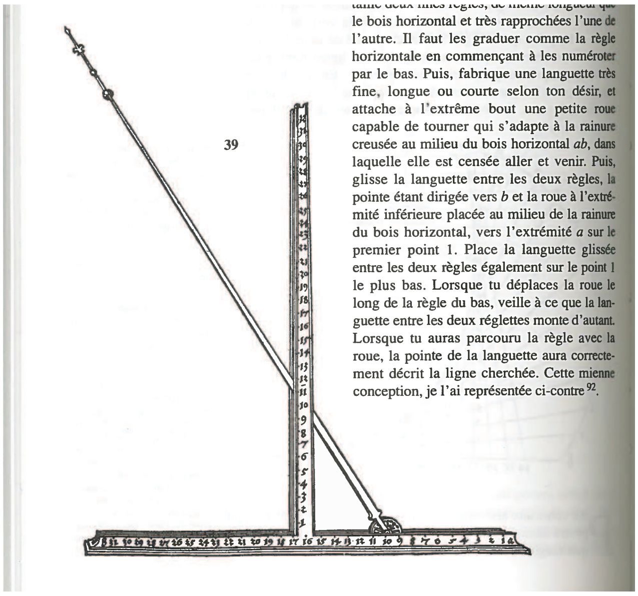
$$\begin{aligned} y - x^2 &= 0, \\ x - 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

leikkaavat origon lisäksi pisteessä $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$. Tiettävästi Menaechmus[6] ratkaisi kuutiojuuriongelman juuri näin kahden paraabelin leikkauksen avulla noin vuonna 350 eaa.

Mutta kuinka vahva näin saatu systeemi olisi? Mitä kaikkea tällaisella systeemillä voisi tehdä? Koska ei ollut mitään algebrallista tai muutakaan tapaa tarkastella yleisiä käyriä, niin monilla käyrillä oli jonkinlainen mekaaninen tai kinemaattinen määritelmä. *Arkhimedeen spiraali* saadaan, kun kiinnitetään teleskooppivavan toinen pää origoon, minkä jälkeen vavan pituus kasvaa vakionopeudella ja vapa pyörii vakiokulmanopeudella.[7] *Traktrix* puolestaan saadaan, kun vedetään pulkkaa narusta.[8]

Albrecht Dürer jopa konkreettisesti rakensi laitteen, jolla voidaan piirtää eräs käyrä, jota nykyään luonnollisesti sanotaan *Dürerin käyräksi* (Dürer’s shell curve tai conchoid of Dürer).[9] Kuva 5 on peräisin Dürerin kirjasta *Underweysung der Messung* vuodelta 1525 [4].

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_geometry
[6] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menaechmus/
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_spiral
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Tractrix
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Conchoid_of_Dürer



Kuva 5: Dürerin laite. Tarkkaan ottaen Dürerin käyrässä on kaksi haaraa, mutta laite antaa niistä vain toisen.

Nyt voitaisiin kysyä, voidaanko esimerkiksi Arkhimedeen spiraali konstruoida, jos käytössä on suorat, ympyrät ja paraabelit? Tai voidaanko paraabeli konstruoida, jos on suorat, ympyrät ja spiraalit? Ylipäätään tasokäyriin liittyvissä ongelmissa tangentin laskeminen/määrittäminen oli luonnollinen ja usein esiintyvä tehtävä. Ympyrälle tangentti saadaan Eukleideen systeemillä, mutta kaikille muille käyrille tämä oli vaikeaa. Kaiken lisäksi jos yhdelle käyrälle saatiin tangentti, niin tästä ei ollut välttämättä mitään hyötyä, kun tarkasteltiin jotain muuta käyrää. Jokainen käyrä vaati oman teoriansa. Ei siis ole ihme, että klassinen geometria ajautui umpikujaan. Geometrian umpikujavaihe kestikin sitten noin 1500 vuotta, kunnes analyyttinen geometria ja differentiaalilaskenta muuttivat kaiken.

Eukleideen systeemi ja opetus

Vaikka Eukleideen systeemi ei mitenkään rajoitu geometriaan, niin nykyään on tapana puhua nimenomaan Eukleideen geometriasta ja esittää kaikki muu materiaali moderneja käsitteitä ja merkintöjä käyttäen. Esimerkiksi *Alkeitten* toisen luvun 7. lause osoittaa, että

$$x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2$$

ja algoritmi suurimman yhteisen tekijän laskemiseksi on *Alkeitten* 7. luvun toisessa lauseessa.[10] Tuskinpa kukaan pitäisi mielekkäänä todistaa tai edes muotoilla näitä tuloksia kuten Eukleides. Samoin Pythagoraan lause (1. luvun 47. lause) voidaan helposti todistaa vektoreitten avulla.

Hiukan paradoksaalisesti siis usein painotetaan Eukleideen systeemin aksiomaattista luonnetta, vaikka kaikki tehtävät mitä opetuksessa/kilpailuissa käytetään ovat intuitiivisesti geometrisia, siis sellaisia, joista voi piirtää mielekkään ja mielenkiintoisen kuvan. Esimerkkinä epäilyttävästä tehtävästä olisi vaikkapa luvun

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}$$

konstruointi. Eukleideen systeemissä tämä voidaan selvästi tehdä. Tietääkseni tähän lukuun ei liity mitään erityistä geometrista (tai muutakaan) ominaisuutta, ja luulisin, että lukija nimenomaan intuitiivisesti (eikä aksiomaattisesti) ymmärtää, mitä tarkoitan geometrisella ominaisuudella.

Tämän takia ei oikeastaan opetuksen kannalta ole varsinaista merkitystä sillä, että aksioomasysteemiä piti hiukan paikata, kun tätä sitten 1800-luvun lopussa modernista näkökulmasta tarkemmin analysoitiin [5, 7]. Esimerkiksi Eukleides heti ensimmäisen luvun ensimmäisen lauseen todistuksessa olettaa eräitä asioita, jotka eivät seuraa aksioomista, mutta jotka ovat intuitiivisesti ja visuaalisesti selviä.

Eukleideen geometriaa voidaan tavallaan pitää eräänlaisena pelinä. Kuten edellä oli puhetta, pelin säännöt ovat riittävän yksinkertaiset, ja opetuksen kannalta on mielenkiintoista, että pelin kulku (eli eteneminen sallittujen siirtojen puitteissa kohti haluttua tavoitetta) voidaan visualisoida piirrosten avulla. Tietenkin *kaikkiin* Eukleideen konstruktioihin voidaan liittää jokin kuvio, mutta peliin valitaan vain sellaisia tehtäviä, joilla on "oikeasti" intuitiivinen geometrinen sisältö, jolloin myös pelaaja kokee mielekkääksi hahmottaa tilannetta kuvan avulla visuaalisesti.

Lisäksi todistettavien tulosten vaikeusaste vaihtelee suuresti, joten peliä voidaan pelata eri tasoilla (vai pitäisikö nykyään sanoa leveleillä). René Thom ilmaisee asian näin [8]:

> Only those topics which have a quality of "play" have educational value, and of all such games, Euclidean geometry, with its constant references to underlying intuitively understood fundamentals, is the least gratuitous and the richest in meaning.[11]

Lopuksi

Esimerkeissä tarkasteltu laskennallinen ratkaisumenetelmä voi olla hyvin työläs käsin laskien; etenkin esi-

[10] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/toc.html

[11] Sana *play* on ehkä lainausmerkeissä sen takia, että sitä vastasi alkuperäisessä kirjoituksessa *ludique*, mikä viittaa nimenomaan leikkimiseen eikä pelaamiseen.

merkin 4 ratkaisu käsin tuolla tavalla olisi ollut käytännössä mahdotonta ainakin jossain kokeessa tai kilpailussa. Toisaalta kaikki yllä olevat laskut olivat hyvin helppoja esimerkiksi wxMaximalla, tai jollain muulla laskentaohjelmalla. Ne olivat nimenomaan vain työläitä, mutta periaatteessa helppoja, kuten vaikkapa kahden hyvin ison kokonaisluvun tulon laskeminen. Ainoa ongelma on lähinnä, että jos ei ole tottunut tällaiseen ongelmanratkaisuun, niin tarvittavien muuttujien/parametrien suuri määrä voi alussa sekoittaa.

Esimerkeissä 2, 3 ja 4 ei siis tarvinnut käyttää varsinaista geometrista intuitiota, vaan todistuksessa edettiin systemaattisesti ikään kuin lopusta alkuun. Ensin muotoiltiin haluttu väite polynomiyhtälönä $h = 0$. Sitten katsottiin, mistä muuttujista h riippuu, laskettiin muuttujien arvot, ja lopuksi havaittiin, että todellakin $h = 0$ pätee. Kehotan lukijoita vertaamaan "alkuperäisiin" todistuksiin. Varmasti jotkut pitävät geometrista todistusta parempana, ehkäpä esteettisistä syistä. Jätän harjoitustehtäväksi vielä sen pohtimisen, saadaanko bonustulokset helposti perustapauksen todistuksesta vai pitääkö aloittaa kaikki alusta.

Geometrinen todistus voi vaatia jonkin näppärän idean keksimistä, ja tällaisen idean löytäminen onkin palkitsevaa, ja parhaassa tapauksessa idean ymmärtäminen auttaa hahmottamaan yleisestikin tietynlaisia tehtävätyyppejä. Toisaalta varmaankin jokainen lukija, kuten minä, on joskus (tai ehkä pikemminkin aivan liian usein) tuskaillut jonkin ongelman parissa, etsien turhaan sitä näppärää ideaa. Tällaisissa tilanteissa ainakin minusta on kivaa, että on menetelmä, jonka avulla ratkaisu varmasti löytyy.

Tietysti jos pelin säännöt vaativat Eukleideen systeemin käyttämistä, niin sitten pitää pelata sääntöjen mukaan. En tiedä hylätäänkö kilpailuissa vastaus, jos käytetään "vääriä" menetelmiä? Joka tapauksessa jos jossain ikään kuin luonnollisessa projektissa tulee vastaan geometrinen osaongelma, niin uskoisin, että polynomien käyttäminen olisi varsin luontevaa, koska tyypillisesti pelkkä Eukleideen geometria ei kuitenkaan riitä koko ongelman ratkaisuun.

Ensi kerralla palataan algebrallisempiin aiheisiin, ja katsotaan, miten jakolaskun avulla voidaan analysoida polynomiepäyhtälöitä. Lisäksi tutustutaan erääseen varsin moderniin menetelmään, jota on viime aikoina tutkittu paljon, ja jolla on yhteyksiä myös konveksiin geometriaan ja optimointiin.

Viitteet

[1] G. V. Bard, *Sage for undergraduates*, 2nd ed., American Mathematical Society, 2022.

[2] D. A. Cox, *Galois theory*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics (Hoboken), John Wiley & Sons, 2012.

[3] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[4] A. Dürer, *Géometrie (Underweysung der Messung)*, Seuil, 2016, käännös, johdanto ja kommentit J. Peiffer.

[5] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

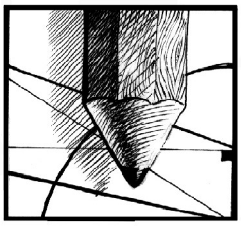
[6] O. Järviniemi, *Ollin opas olympiatason ongelmanratkaisuun*, https://matematiikkakilpailut.fi/aiheet/.

[7] M. Lehtinen, *Geometrian perusteita*, https://docplayer.fi/28732077-Geometrian-perusteita-matti-lehtinen.html.

[8] R. Thom, *"Modern" mathematics: An educational and philosophic error?*, American Scientist **59** (1971), no. 6, 695–699.

[9] J. Tuomela, *Tarinoita polynomeista (osa 1)*, Solmu (2022), no. 2.

[10] ———, *Tarinoita polynomeista (osa 2)*, Solmu (2022), no. 3.



Vertailevaa geometrian opetusta

Hannu Korhonen

Koulugeometria on valtaosin nimeämistä ja laskemista. Monet tasogeometrian perustulokset ovat liian itsestäänselvän tuntuisia ollakseen todella kiinnostavia. Vertaileminen pallon pinnan geometriaan saattaisi antaa oppimiseen syvyyttä sekä uusia näkökulmia ja virikkeitä ajatteluun.

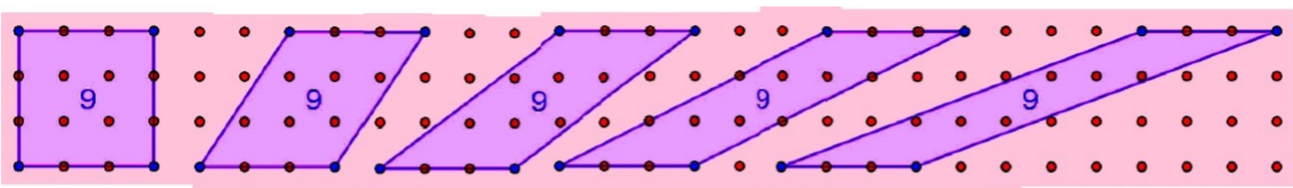
Ajattelua avartamaan

Vielä kuutisenkymmentä vuotta sitten geometria oli koulussa omana oppiaineenaan. Se jäi algebran ja analyysin jalkoihin, kun peruskouluun tultaessa muodostettiin yhteinen oppiaine nimeltään matematiikka (Coxeter & Gretzer, 1967; Silfverberg, 1999, 17–18). Nykyäänkin kuvioita kyllä tunnistetaan, nimetään ja luokitellaan, mutta varsinainen geometrinen ajattelu hahmottamisen, tarkan piirtämisen, tutkimisen ja todistamisen mielessä jäävät vähälle. Usein siirrytäänkin aivan liian nopeasti kaavojen opetteluun sekä pituuksien ja pinta-alojen laskemiseen (Sarenius, 2010).

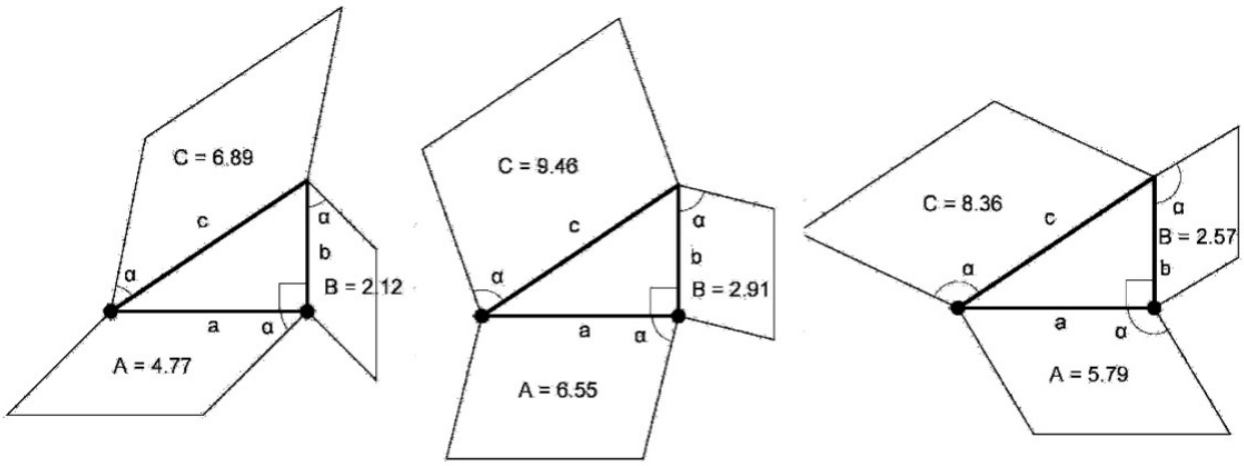
Tavanomaisen eli euklidisen tasogeometrian kuvioiden perusominaisuudet tuntuvat monesti myös niin ilmeisiltä ja yksinkertaisilta, että ne eivät innosta eivätkä tunnu antavan aihetta syvempään pohdiskeluun. Kolmion kulmasumma on aina sama 180°. Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee aina tasan yksi annetun suoran suuntainen suora. Suorakulmaisen kolmion sivuille piirretään aina vain neliöt ja niiden pinta-aloja koskevaa Pythagoraan lausetta käytetään yksinomaan laskemiseen.

Jo pienikin tavanomaisen asian tekeminen uudella tavalla saattaisi tuoda uutta innostusta, kiinnostusta tai ainakin uutuudenviehätystä. Neliön kallistaminen suunnikkaaksi geolaudalla sisältää samat ajattelun vaiheet kuin kuvasarjan piirtäminen ruutuvihkoon, mutta kumilenkki tekee kuviosta dynaamisen ja konkreettisen.

Toinen, erilainen kokemus samasta asiasta voisi olla sähköisen työvälineen, esimerkiksi Geogebran, käyttäminen. Ohjelma saadaan jopa näyttämään kuvion pinta-ala automaattisesti, jolloin huomio voidaan kohdistaa vain kuvion muodon muuttamiseen ja varsinainen havainto tulee ilman ruuduittain laskemista (Korhonen, 2018).



Kuva 1: Kun neliö kallistetaan suunnikkaaksi niin, että kanta ja korkeus pysyvät samoina, niin kuvion pinta-alakaan ei muutu.



Kuva 2: Suorakulmaisen kolmion kateeteille piirrettyjen yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen summa on yhtä suuri kuin hypotenuusalle piirretyn yhdenmuotoisen suunnikkaan pinta-ala, muutettiinpa suorakulmaisen kolmion tai sen sivuille piirretyn kuvion muotoa miten tahansa.

Monia tilanteita voidaan myös ajatella ihan uudestaan tai ainakin tavanomaista laajemmin entä jos -kysymyksen avulla. Entä jos suorakulmaisen kolmion sivuille piirretäänkin jotkin muut yhdenmuotoiset kuviot kuin neliöt (Korhonen, 2021)? Onko kateeteille piirrettyjen kuvioiden pinta-alojen summa silloinkin yhtä suuri kuin hypotenuusalle piirretyn kuvion ala? Ei enää Pythagoraan lause, vaan jonkinlainen yleistys.

Vertailevaa geometriaa

Pahimmillaan – tai parhaimmillaan – entä jos -kysymys saattaa johtaa ulos tutusta ja turvallisesta koulugeometriasta ja tehdä geometriasta yllättävää, kiinnostavaa, jopa hauskaa. Entä jos suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta ei voitaisi piirtää yhtään suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa? Onko sellaista tilannetta vaikeaa kuvitella? Tuntuuko siltä, että ainahan yhdensuuntaisen voi piirtää? Matematiikka voi kyllä tehdä mahdollisesta mahdotonta. Pitää vain valita geometria, jossa yhdensuuntaisia ei ole.

Apua saadaan Unkarista. Vertailevan geometrian opetuksen menetelmässään István Lénárt on esittänyt tasogeometrian vertaamista pallon pinnan geometriaan (Lénárt, 1995). Siihen tarkoitukseen hän on suunnitellut opetusvälineen: *Lénártin pallon*. Se on kaksikymmensenttinen läpinäkyvä muovipallo, jonka pintaan voi piirtää kuvioita tussikynällä. Lisävarusteina on pöytäteline, palloharppi, isoympyräviivain, tussikyniä sekä maapallokarttapohja (Korhonen, 2004).

Ennen kuin ryhdymme vertailemaan taso- ja pallogeometriaa, on tarpeen pohtia, mitä ominaisuuksia tavallisella tasolla on. Siinä on esimerkiksi mahdollista liikkua vain kahteen suuntaan: eteen-taakse ja oikealle-vasemmalle. Kolmatta suuntaa ylös-alas tasossa ei ole, vaikka tavallisessa kolmiulotteisessa ympäristössämme onkin. Taso on siis vain kaksiulotteinen. Kaksiulotteisuus on itse asiassa kaikkien pintojen ominaisuus, siis myös pallon pinnan. Se eroaa tasosta siinä, että se on kaareva, mutta on siis pintana vain kaksiulotteinen niin kuin tasokin.

Kuva 3. Lénártin pallo ja palloharppi (Makara & Lénárt, 2004).

Taso- ja pallopinta ovat samanlaisia myös siinä, että niitä pitkin voi kulkea ilman, että mitään rajaa tulee vastaan. Erona taas on se, että tasolla eteneminen vie aina vain yhä kauemmas, mitä kuvataan sanomalla tason jatkuvan äärettömyyteen. Pallopinnalla kulkija palaa takaisin lähtöpaikkaansa kuljettuaan pallon ympäri. Hänen maailmansa on äärellinen, sillä hän ei voi päästä kauas, vaikka mitään rajaa ei tulekaan vastaan.

Pallogeometrian perusideat

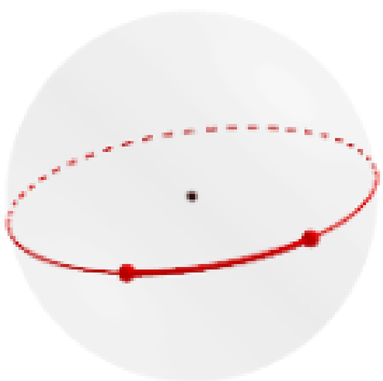
Kaarevuuden takia pallon pinnalla ei voi olla janoja eikä suoria. Sen geometria on siis sovittava uudella tavalla. Luontevin tapa lähestyä sitä on tutkia, miten mitataan pallon pinnan kahden pisteen lyhin etäisyys. Tavallinen geometrian käsityksemme saa ajattelemaan, että lyhin etäisyys olisi näiden pisteiden yhdistysjanan pituus.

Tämä määrittely ei kuitenkaan sovi pallon pinnan geometrian pohjaksi, sillä yhdistysjana ei ole pallon pinnalla, vaan kulkee pallon sisällä. Kun halutaan rakentaa pinnan geometriaa, niin lyhimmän etäisyyden määrittelevän viivan on kuljettava pinnalla. Sitä pitkin etäisyys sitten mitataan.

Tässä jutussa tarkastelen asiaa vain perushahmotuksen kannalta pyrkimättäkään varsinaisen pallogeometrian opettamisen kysymyksiin. Käsittely vastaa siis lähinnä van Hielen määrittelemiä geometrisen ajattelun tasoja 1 ja 2 (Silfverberg 1999, 27, 29).

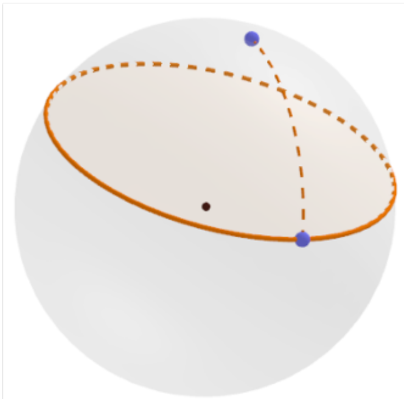
Lyhimmän etäisyyden viivan saat selville konkreettisimmin, kun otat styrox-pallon, merkitset sen pinnalle kaksi pistettä esimerkiksi nuppineuloilla ja virität kuminauhan nuppineulojen väliin. Se asettuu lyhimmän etäisyyden viivalle. Se on pallon pintaa pitkin kulkeva kaari. Tällainen kaari on aina pallon keskipisteen kautta kulkevassa tasossa.

Tämän kaaren voit kuvitella syntyvän niin, että annettujen pisteiden ja pallon keskipisteen kautta kulkeva taso leikkaa pallon pintaa. Leikkausviiva on ympyrä. Pisteet jakavat sen kahteen osaan. Näistä lyhyempi on pisteiden etäisyys pallon pinnan geometriassa. Kutsutaan sitä pisteiden *palloetäisyydeksi* ja ympyrää *isoympyräksi*, koska se on suurin ympyrä, joka voidaan piirtää pallon pinnalle. Pallokartalla päiväntasaaja ja napojen kautta kulkevat pituuspiirit ovat tällaisia. Kannattaa ehkä huomata myös, että yksi piste ei jaa isoympyrää kahdeksi osaksi niin kuin tapahtuu suoralle tasogeometriassa.



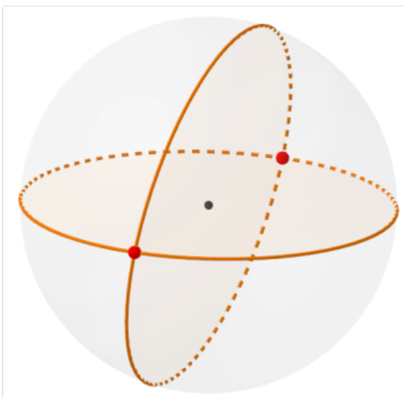
Tasossa kahden pisteen lyhin etäisyys on pisteiden yhdistysjanan pituus. Se on osa pisteiden määrittämästä suorasta. Isoympyrän kaari on vastaavasti pallon pinnalla olevien kahden pisteen välinen lyhin etäisyys. Näin ollen isoympyrällä on pallon pinnalla sama merkitys kuin suoralla on tasossa. Pallon pinnalla ei ole suoria. Siellä niitä vastaavat isoympyrät, lyhimmän etäisyyden määrittelevät viivat.

Pallon pinnalle voidaan tietysti piirtää muitakin ympyröitä kuin isoympyröitä. Määritelmä on luonnollisesti sama kuin tasogeometriassa: niiden pisteiden joukko, jotka ovat samalla etäisyydellä annetusta keskipisteestä. Etäisyys mitataan nyt vain pallon pintaa pitkin, joten ympyrän *pallosäde* on pallon pinnalla olevan keskipisteen kautta kulkevan, ympyrää vastaan kohtisuoran isoympyrän kaari.

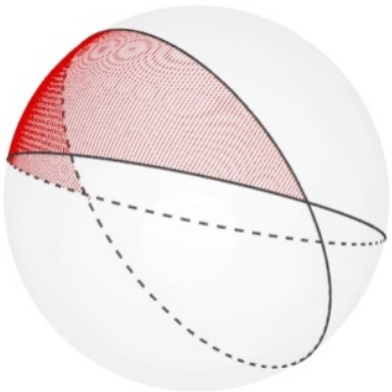


Pallokaksikulmio ja -kolmio

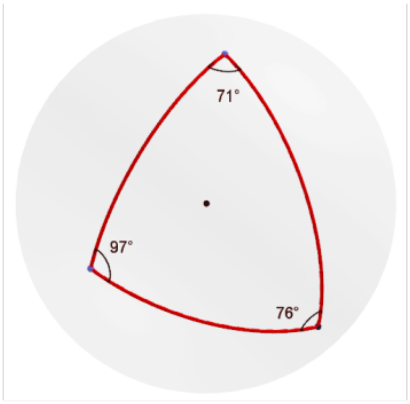
Pallomonikulmioiksi voidaan kutsua kuvioita, joita rajoittavat isoympyrät. Tasossa kaksi suoraa eivät voi rajata suljettua kuviota, mutta pallon pinnalla kaksi isoympyrää tekevät aina niin, sillä mitkä tahansa kaksi isoympyrää leikkaavat toisensa tasan kahdessa pisteessä. Leikkauspisteet ovat pallon vastakkaisilla puolilla niin kuin maapallon pohjois- ja etelänapa.



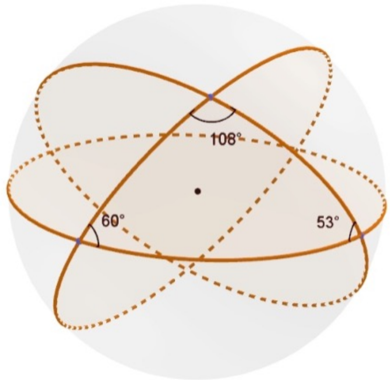
Kaksi isoympyrää jakavat pallon pinnan itse asiassa neljään osaan. Leikkauspisteet ovat kaikkien osien yhteisinä kärkipisteinä. Vastakkaiset osat ovat yhtä suuria. Osan reunoina ovat isoympyröiden puolikkaat. Kuviolla on vain kaksi kärkipistettä. Siksi sen nimi voisi olla *pallokaksikulmio*. Sen kulmat ovat yhtä suuret. Kuvio on siis säännöllinen. Kärkikulma on sama kuin isoympyrät määrittelevien tasojen välinen kulma. Se voi vaihdella välillä 0–180°. Pallokaksikulmion pinta-ala on siten suurimmillaankin enintään puolet pallon pinta-alasta.



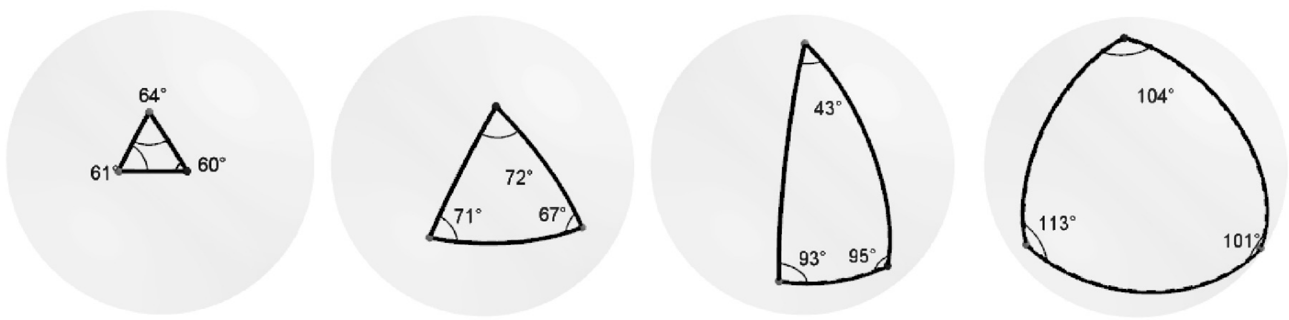
Pallokolmiolla on kolme kärkipistettä ja kolme sivua samoin kuin tasokolmiolla. Sivut ovat nyt vain isoympyränkaaria, kun tasokolmion sivut ovat janoja. Ensikatsannolla ei ole ehkä helppoa huomata, että nämä kaaret jakavat pallon pinnan kahdeksi pallokolmioksi.



Tämä käy ilmeiseksi, jos kolmiosi on viritetty kumilenkillä styrox-pallolle pistettyjen nuppineulojen varaan. Merkitse kolmion sisään piste ja ryhdy siirtämään kärkipisteitä yhä kauemmaksi merkitsemästäsi pisteestä. Kun kärkipisteet ovat tarpeeksi kaukana pallon toisella puolella, niin huomaat, että se osa pallon pinnasta, joka aikaisemmin näytti vain kolmion ulkopuolelta, alkaa hahmottua yhä paremmin kolmioksi, ja alkuperäinen kolmio näyttääkin nyt sen ulkopuolelta. Kumpikin ovat kuitenkin edelleen kolmen kärkipisteen määrittämien isoympyränkaarien rajoittamia alueita ja siten edelleen pallokolmioita.



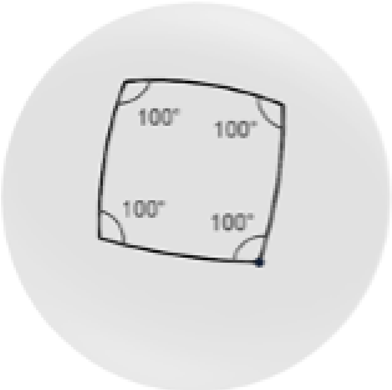
Pallokolmiota rajoittavat kolme isoympyrää jakavat pallon pinnan kaikkiaan kahdeksaksi pallokolmioksi. Mitä voit päätellä muiden kolmioiden kulmien suuruudesta yhden kolmion kulmien perusteella? – Suuremman yllätyksen tarjoavat yhden kolmion kulmat. Kulmien summa ei olekaan vakio! Jonkinlaista viitettä pallokolmion kulmien summan muuttumisesta saat jäljempänä olevasta kuvasarjasta (kuva 4). Tarkempaan tutkimiseen tarvitsisit oikeastaan dynaamisen mallin, joka mittaa kulmat valmiiksi (esimerkiksi Korhonen, 2019a). Ohjeita tutkimiseen on myös Dimensio-lehdessä (Korhonen, 2019b).



Kuva 4: Pallokolmion kulmien summa kasvaa kolmion koon mukana. Samalla kolmion sivut alkavat näyttää yhä selvemmin kaarilta, mitä ne todellisuudessa ovatkin.

Kaarevuuden vaikutus

Palloneliö on samalla tavalla säännöllinen kuvio kuin tasoneliökin. Sen kulmat ovat yhtä suuret ja sivut yhtä pitkät. Sivut vain ovat isoympyrän osia ja kulmat muuttuvat neliön koon mukana samoin kuin pallokolmionkin kulmat. Palloneliön reuna jakaa pallon pinnan itse asiassa kahdeksi palloneliöksi samalla tavalla kuin pallokolmion reuna jakaa pallon pinnan kahdeksi pallokolmioksi. Kuvassa palloneliön kulmien summa on 400°. Kuinka suuri on toisen palloneliön kulmien summa, sen joka pitää sisällään pallon takapuolenkin?



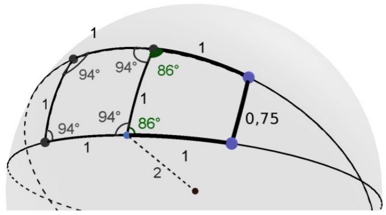
Jos neliö on hyvin pieni, niin sen kulmat ovat vain vähän yli 90°. Neliön kasvaessa kulmatkin kasvavat. Kun kukin kulma on 180°, palloneliön sivut ovat toistensa jatkeina, sen piiri on isoympyrä ja ala puolet pallon pinnan alasta (kuva 5). Kun palloneliön pinta-alaa kasvatetaan, niin osa palloneliöstä alkaa olla pallon takapuolella. Neliön ulkopuolesta tulee pienempi kuin sisäpuolesta. Ulkopuoli alkaa näyttää enemmän palloneliöltä kuin sisäpuoli samalla tavalla kuin pallokolmiosta todettiin edellä. Kun pinta-ala kasvaa edelleen, niin kulmat jatkavat kasvamista, mutta piiri alkaa pienentyä. Kuinka suureksi pallokolmion pinta-ala kasvaa, kun sen ulkopuoli supistuu hyvin pieneksi? Kuinka suuriksi kasvavat kulmat?

Ihan pieni palloneliö näyttää hyvin samanlaiselta kuin tasoneliökin. Sen kulmatkin ovat lähellä yhdeksääkymmentä astetta. Tämä johtuu siitä, että pienellä alueella kaarevuus ei vaikuta paljoakaan, vaan pallon pinta on hyvin lähellä tasoa. Siksi pieni palloneliökään ei eroa paljon tasoneliöstä. Juuri tästä syystä monet ihmiset uskoivat vanhaan aikaan, että maa on litteä, kun oma lähiympäristö siltä näytti. Maapallon kaarevuuden voi huomata aavan meren rannalla, kun muutaman kilometrin päässä oleva laiva alkaa kadota taivaanrannan taakse (Youtube, 2016).

Pinta-ala

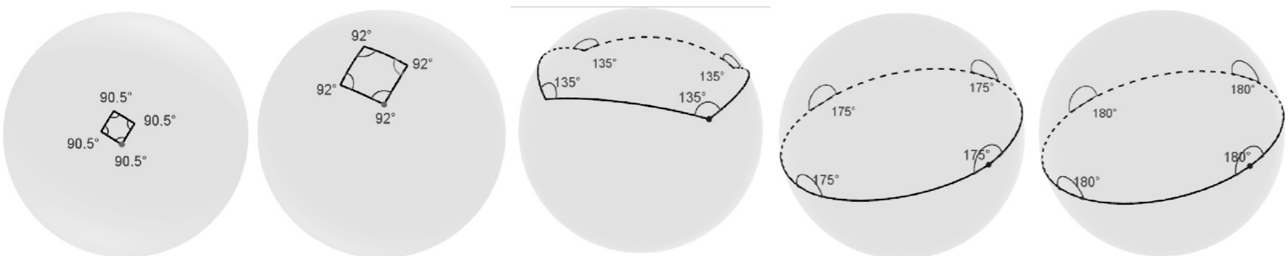
Tasossa pinta-alan yksikkönä on yksikköneliö, siis neliö jonka sivu on 1 (mm, cm, m tai km kuvion koosta riippuen). Tämä perustuu siihen, että tason voi peittää neliöillä niin, että ne eivät mene päällekkäin eikä neliöiden väliin myöskään jää peittämättömiä rakoja.

Pallon pinnalla tämä ei onnistu. Palloneliön kulmat ovat suurempia kuin suora kulma. Siksi niitä ei voi latoa samalla tavalla vierekkäin pallopinnan peitoksi, koska yhden kulmapisteen ympärille ei voida sijoittaa tasan neljää palloneliötä. On siis keksittävä uusi tapa mitata pallokuvion pinta-alaa.



Kuva 6. Palloneliö ei sovi pinta-alan yksiköksi pallopinnan geometriassa, sillä niitä ei voi asetella vierekkäin niin, että ne peittäisivät pallon pinnan.

Aloitetaan kolmiosta. Ehkäpä kulmista voisi olla jotain apua, koska kulmat kasvavat kolmion koon mukana. Edellä todettiin myös, että pallokolmion ulkopuolikin on pallokolmio. Pienemmän kolmion kulmien summa näkyy kuvasta. Suuremman kolmion (eli kolmion ulkopuolen) kulmien summa on kolmion kulmien eksplementtikulmien summa.



Kuva 5: Pieni palloneliö poikkeaa tasoneliöstä vain vähän. Piirin pituus ja kulmat kasvavat aluksi alan mukana samalla tavalla kuin pallokolmiossakin. Oikeanpuolimmaisessa kuvassa palloneliön pinta-ala on jo puolet pallon pinta-alasta.

Jos esimerkiksi katsotaan kuvan 5 kolmioita oikealta vasemmalle, niin kolmion pienentyessä kulmien summa lähestyy 180 astetta eli siis tasogeometriasta tuttua kolmion kulmasummaa. Isomman kolmion kulmien summa lähestyy lukemaa

$$3 \cdot 360^\circ - 180^\circ = 900^\circ.$$

Lopulta isompi kolmio täyttää pallon koko pinnan.

Pallon pinta-alaa ei ole totuttu mittaamaan asteissa, mutta muunnos on helposti ymmärrettävissä käyttämällä ympyrää apuna. Ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, yksikköympyrälle 2π, ja sitä vastaava keskuskulma 360°. Voidaan siis ajatella, että 2π on asteissa ilmaistuna 360°. Pallon pinta-ala on siis $4\pi r^3 = 720^\circ \cdot r^3$. Jos ajatellaan yksikköpalloa, jossa $r = 1$, niin saadaan verrattaviksi tulokset 'kulmien summa 180° ja pinta-ala noin 0', kun pallokolmio on hyvin pieni, sekä 'kulmien summa 900° ja pinta-ala 720°', kun pallokolmio on mahdollisimman suuri.

Tästä ei ole suurikaan loikka ajatella, että pallokolmion pinta-ala ilmoitettaisiin asteissa. Silloin se olisi

$$\text{kulmien summa} - 180^\circ.$$

Monikulmio, myös pallomonikulmio, voidaan jakaa $n-2$ kolmioksi, joten pallo-n-monikulmion pinta-ala on vastaavasti

$$\text{kulmien summa} - (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Ajatusta voidaan jatkaa pitemmälle ja soveltaa myös käyräviivaisiin kuvioihin, mutta siinä tarvitaan jo uusia käsitteitä ja se menee muutenkin tämän tarkastelun rajojen ulkopuolelle.

Matemaatikot käyttävät tätä tapaa, mutta tekevät päätelmän toisessa järjestyksessä ja ottavat ensin kulman mitaksi reaaliluvun samastamalla yksikköympyrän keskuskulman suuruuden ja sen kehän pituuden, mistä saadaan asteelle lauseke reaalilukuna

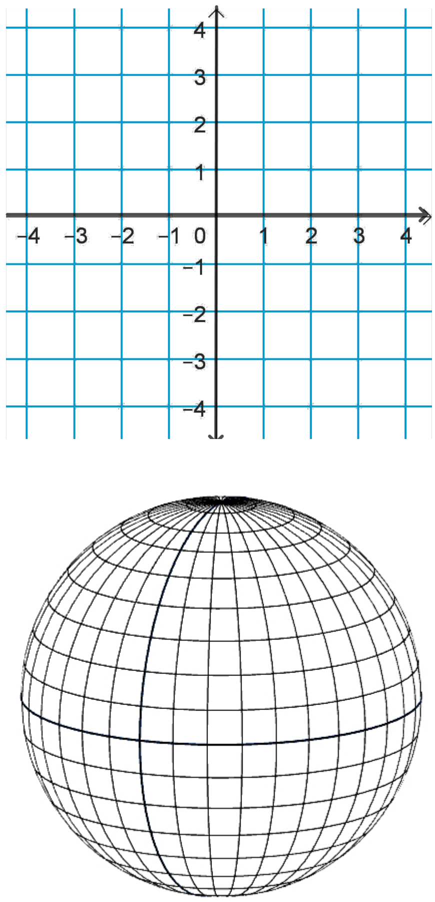
$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}.$$

Reaalilukuna ilmoitettua pallomonikulmion kulmien summaa verrataan sitten kuvion pinta-alaan. Koulukursseissa pallon pinnan kuvioiden pinta-aloja ei käsitellä, mutta kulman suuruuden ilmoittaminen reaalilukuna tulee esille lukion matematiikassa.

Koordinaatistot

Tasossa tavallisin koordinaatisto on suorakulmainen eli euklidinen xy-koordinaatisto. Siinä pisteen paikka ilmoitetaan etäisyytenä y-akselista (x-koordinaatti, abskissa) ja etäisyytenä x-akselista (y-koordinaatti, ordinaatta).

Pallon pinnalle voidaan rakentaa vastaavanlainen koordinaatisto kiinnittämällä ensin akselit: kaksi kohtisuoraa isoympyrää, esimerkiksi päiväntasaaja ja nollameridiaani. Nämä vastaavat tasokoordinaatiston akseleita. Pisteen paikka ilmoitetaan antamalla pisteen etäisyys nollameridiaanista ja etäisyys päiväntasaajasta asteissa. Juuri näin tehdään maailmakartalla. Etäisyys nollameridiaanista on maantieteellistä pituutta ja etäisyys päiväntasaajasta maantieteellistä leveyttä.



Kuva 7. Taso- ja pallokoordinaatistot.

Tasokoordinaatit voivat olla mitä tahansa reaalilukuja, koska tason ajatellaan jatkuvan rajatta kaikkiin suuntiin. Sen sijaan pallokoordinaatit saavat arvoja vain rajatulta väliltä: $-180^\circ <$ pituus $\leq 180^\circ$ ja $-90^\circ \leq$ leveys $\leq 90^\circ$. Tavallisessa maantieteellisessä puheessa ei käytetä negatiivisia astelukuja, vaan puhutaan itäisestä tai läntisestä pituudesta ja pohjoisesta tai eteläisestä leveydestä. Tarkista oman kotipaikkasi koordinaatit (Luettelo, Wikipedia).

Samantapaista koordinaatistoa käytetään myös taivaalla näkyvien kohteiden suunnan ilmoittamiseen. Maantieteellistä pituutta vastaavaa koordinaattia kutsutaan silloin suuntimaksi (atsimuutti) ja se ilmoitetaan asteina yleensä etelän suunnasta myötäpäivään kiertäen tai esimerkiksi merenkulussa ja suunnistuksessa pohjoisen suunnasta samoin myötäpäivään kiertäen.

Se ilmoittaa siis suunnan, jossa kohde näkyy. Maantieteellistä leveyttä vastaa korkeus, joka ilmoitetaan asteissa taivaanrannasta (horisontista) ylöspäin mitattuna. Taivaanlaki on kohtisuoraan katsojasta ylöspäin ja sen korkeus on siten 90°.

Tähtien paikan ilmoittamiseen käytetään useimmiten katsojasta riippumatonta pallokoordinaatistoa. Sen origo on maapallon keskipisteessä. Koordinaatisto on kiinnitetty maapallon päiväntasaajan tasoon. Maantieteellistä pituutta vastaava koordinaatti on sama kuin edellä. Silloin itäsuunta on siis 90° ja etelä 180°. Korkeus ilmoitetaan nyt päiväntasaajatasosta mitattuna. Taivaannavan suunta on silloin maapallon akselin suunta. Esimerkiksi Pohjantähden korkeus (deklinaatio) on tässä koordinaatistossa +89,32°, koska se on hyvin lähellä taivaannapaa.

Viitteet

Coxeter, H. S. M. & Greitzer S. L. (1967). Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, xi.

Korhonen, H. (2004). Geometriaa pallolla. Dimensio 2 (68). Matemaattis-luonnontieteellinen aikakauslehti, 10–13.

Korhonen, H. (2018). $N \times n$ -geolauta. Geogebra-materiaali `https://www.geogebra.org/m/yxeyt4pw`, viitattu 17.3.2019.

Korhonen, H. (2019a). Pallokolmio. Geogebra-materiaali `https://www.geogebra.org/m/fcaqrzpr`. Viitattu 17.3.2019.

Korhonen, H. (2019b). Pallogeometrian perushahmotusta, osat 1–5. Dimensio, `https://www.dimensiolehti.fi/?s=pallogeometria`. Viitattu 5.10.2019.

Korhonen, H. (2021). Pythagoraan porsaat. Dimensio, `https://dimensiolehti.fi/pythagoraan-porsaat/`. Viitattu 20.8.2023.

Lénárt, I. (1995). Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry. Key Curriculum Press.

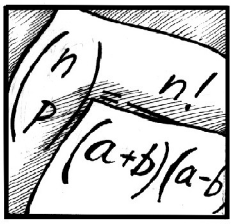
Luettelo Suomen kuntien koordinaateista. Wikipedia, `https://fi.wikipedia.org/wiki/Luettelo_Suomen_kuntien_koordinaateista`.

Makara, Á. ja Lénárt I. (2004) Comparative geometry on plane and sphere. Teaching Mathematics and Computer Science, 2/1, 81–101. Saatavissa myös verkosta, viitattu 14.11.2023, `https://www.researchgate.net/publication/283835518_Comparative_geometry_on_plane_and_sphere_didactical_impressions`.

Sarenius, V-M. (2010) Geometrian opetuksesta. Oulun yliopiston LUMA-keskus. Artikkeli on poistunut verkosta 2023.

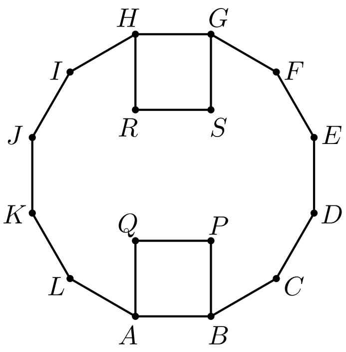
Silfverberg, H. (1999) Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Väitöskirja. Acta Electronica Universitatis Tamperensis 6, `https://urn.fi/urn:isbn:951-44-4718-2`. Viitattu 17.3.2019.

Youtube (2016). Ship over the Horizon. Video, `https://www.youtube.com/watch?v=WOZd6t9uzhY`. Viitattu 17.3.2019.



Solmun 3/2022 tehtävien 11–20 ratkaisut

11. Säännöllisen 12-kulmion $ABCDEFGHIJKL$ sisään sivuille AB ja GH piirretään neliöt $ABPQ$ ja $GHRS$ kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Osoita, että PQ ja RS ovat säännöllisen 6-kulmion vastakkaiset sivut.



Ratkaisu. Säännöllisen 12-kulmion kulmien summa on

$$(12-2)\cdot 180^\circ = 10\cdot 180^\circ = 1800^\circ,$$

joten jokaisen kulman suuruus on

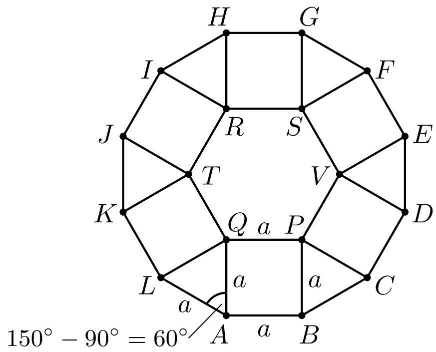
$$\frac{1800^\circ}{12} = 150^\circ.$$

Kolmio LAQ on tasasivuinen, koska $LA = LQ$ ja $\angle LAQ = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. Näin ollen $\angle KLQ = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, joten voidaan muodostaa neliö $KLQT$ (ks. seuraava kuva, johon 12-kulmion sisälle on lisätty piste T). Nyt

$$\angle PQT = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 120^\circ$$

ja $PQ = QT$. Vastaavasti saadaan $TR = RS$ ja $\angle QTR = 120^\circ$.

Symmetrisesti 12-kulmion sisälle voidaan lisätä piste V. Tällöin muodostuu 6-kulmio $QPVSRT$, jonka sivut ovat yhtä pitkiä ja jokaisen kulman suuruus on 120°. Näin ollen PQ ja RS ovat säännöllisen 6-kulmion vastakkaiset sivut.



12. Kahteen astiaan mahtuu kumpaankin 2 litraa nestettä. Ensimmäisessä astiassa on 2 litraa 100-prosenttista appelsiinimehua ja toisessa astiassa on 1 litra vettä. Puolet ensimmäisen astian appelsiinimehusta kaadetaan toiseen astiaan, jossa on vettä, ja neste sekoitetaan. Sekoitetusta nesteestä kaadetaan 1 litra takaisin ensimmäiseen astiaan. Menettely toistetaan: Ensimmäisestä astiasta kaadetaan 1 litra toiseen astiaan, neste sekoitetaan ja 1 litra sekoitettua nestettä kaadetaan takaisin ensimmäiseen astiaan. Kuinka monta prosenttia kummankin astian nesteestä on appelsiinimehua?

Ratkaisu. Ensimmäisen kaadon jälkeen ensimmäisessä astiassa on jäljellä 1 litra appelsiinimehua ja toisessa astiassa on 1 litra appelsiinimehua ja 1 litra vettä. Toisessa astiassa olevassa sekoitetussa nesteessä, jota on 2 litraa, on näin ollen puolet appelsiinimehua ja puolet vettä. Kun nyt toisesta astiasta kaadetaan 1 litra nestettä ensimmäiseen astiaan, tulee ensimmäiseen astiaan 0,5 litraa appelsiinimehua ja 0,5 litraa vettä siellä jo olevan 1 litran appelsiinimehun lisäksi. Tällöin sekoituksen jälkeen ensimmäisessä astiassa on $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ litraa appelsiinimehua ja 0,5 litraa vettä. Toisessa astiassa on 0,5 litraa appelsiinimehua ja 0,5 litraa vettä.

Tämän jälkeen menettely toistetaan. Toisessa kaadossa ensimmäisestä astiasta toiseen astiaan siirtyy 0,75 litraa appelsiinimehua ja 0,25 litraa vettä ja saman verran molempia jää ensimmäiseen astiaan. Tällöin toisessa astiassa on $0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25$ litraa appelsiinimehua ja $0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$ litraa vettä. Kun sekoituksen jälkeen tästä kaadetaan puolet takaisin ensimmäiseen astiaan, niin toisesta astiasta siirtyy ensimmäiseen astiaan $1{,}25 : 2 = 0{,}625$ litraa appelsiinimehua ja $0{,}75 : 2 = 0{,}375$ litraa vettä. Saman verran eli 0,625 litraa appelsiinimehua ja 0,375 litraa vettä jää toiseen astiaan. Nyt ensimmäisessä astiassa on $0{,}75 + 0{,}625 = 1{,}375$ litraa appelsiinimehua ja $0{,}25 + 0{,}375 = 0{,}625$ litraa vettä.

Näin ollen ensimmäisen astian nesteestä appelsiinimehua on

$$\frac{1{,}375}{1{,}375 + 0{,}625} \cdot 100\ \% = \frac{1{,}375}{2} \cdot 100\ \% = 68{,}75\ \%$$

ja toisen astian nesteestä appelsiinimehua on

$$\frac{0{,}625}{0{,}6255 + 0{,}375} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}625}{1} \cdot 100\ \% = 62{,}5\ \%.$$

13. Kolme vihkoa ja kaksi lyijykynää maksavat kirjakaupassa yhteensä 11,10 euroa. Viisi vihkoa ja neljä lyijykynää maksavat yhteensä 20,10 euroa. Mitä ovat yhden vihkon ja yhden lyijykynän hinnat?

Ratkaisu. Merkitään yhden vihkon hintaa V:llä ja yhden lyijykynän hintaa K:lla. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3V + 2K = 11{,}10\ €, \\ 5V + 4K = 20{,}10\ €. \end{cases}$$

Kertomalla ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla -2 saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -6V - 4K = -22{,}20\ €, \\ 5V + 4K = 20{,}10\ €, \end{cases}$$

josta laskemalla yhtälöt yhteen saadaan

$$-V = -2{,}10\ € \quad \text{eli} \quad V = 2{,}10\ €.$$

Nyt alkuperäisen yhtälöparin ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$2K = 11{,}10\ € - 3V = 11{,}10\ € - 3 \cdot 2{,}10\ € = 4{,}80\ €,$$

joten $K = 2{,}40$ €. Saatiin siis, että yhden vihkon hinta on 2,10 € ja yhden lyijykynän hinta on 2,40 €.

14. Luvuista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ valitaan kolme eri lukua ja lasketaan ne yhteen. Tämä tehdään kaikilla mahdollisilla kolmen luvun valinnoilla. Osa summista on parillisia ja osa on parittomia. Kumpi tulos on yleisempi, parillinen vai pariton summa?

Ratkaisu. Sekä parillisia että parittomia lukuja on neljä. Kolmen luvun summa on parillinen, jos kaikki kolme lukua ovat parillisia tai luvuista yksi on parillinen ja kaksi ovat parittomia. Kaikki kolme lukua ovat parillisia neljällä eri tavalla: $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 8)$, $(2, 6, 8)$ ja $(4, 6, 8)$. Kaksi paritonta lukua voidaan valita kuudella eri tavalla: $(1, 3)$, $(1, 5)$, $(1, 7)$, $(3, 5)$, $(3, 7)$ ja $(5, 7)$, ja parillisia lukuja on neljä. Näin ollen tapoja valita kolme lukua niin, että luvuista yksi on parillinen ja kaksi ovat parittomia, on $4 \cdot 6 = 24$. Yhteensä tapoja valita kolme lukua niin, että lukujen summa on parillinen, on siis $4 + 24 = 28$.

Kolmen luvun summa on pariton, jos kaikki kolme lukua ovat parittomia tai luvuista yksi on pariton ja kaksi ovat parillisia. Kaikki kolme lukua ovat parittomia neljällä eri tavalla: $(1, 3, 5)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 5, 7)$ ja $(3, 5, 7)$. Kaksi parillista lukua voidaan valita kuudella eri tavalla: $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(2, 8)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$ ja $(6, 8)$, ja parittomia lukuja on neljä. Näin ollen tapoja valita kolme lukua niin, että luvuista yksi on pariton ja kaksi ovat parillisia, on $4 \cdot 6 = 24$. Yhteensä tapoja valita kolme lukua niin, että lukujen summa on pariton, on siis $4 + 24 = 28$.

Näin ollen parillisia ja parittomia summia on yhtä monta.

15. Shakkiturnauksessa oli viisi osallistujaa. Jokainen osallistuja pelasi kerran jokaista muuta osallistujaa vastaan. Voitosta sai yhden pisteen, tasapelistä 0,5 pistettä ja häviöstä 0 pistettä. Turnauksen lopuksi havaittiin, että (i) turnauksen voittanut pelaaja ei pelannut yhtään tasapeliä, (ii) toiseksi tullut pelaaja ei hävinnyt yhtään peliä, (iii) kaikilla pelaajilla oli eri määrä pisteitä. Kuinka monta pistettä pelaajat saivat?

Ratkaisu. Koska pelaajia oli viisi, niin jokainen pelasi neljä peliä ja kaiken kaikkiaan pelejä pelattiin

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Näin ollen turnauksessa jaettiin yhteensä 10 pistettä. Ehtojen (i) ja (ii) perusteella turnauksen voittanut pelaaja hävisi toiseksi tulleelle pelaajalle. Näin ollen voittaja sai korkeintaan 3 pistettä. Koska hän ei pelannut yhtään tasapeliä, niin hänen pistemääränsä on kokonaisluku. 1 tai 0 eivät ole mahdollisia pistemääriä voittajalle, koska ehto (iii) ei voisi tällöin toteutua. Jos voittaja olisi saanut 2 pistettä, niin muut pelaajat olisivat saaneet turnauksessa yhteensä $10 - 2 = 8$ pistettä. Tämä ei ole mahdollista, koska ehdon (iii) perusteella muiden pelaajien pistemäärät olisivat 1,5, 1, 0,5 ja 0, eli yhteensä 3 pistettä. Näin ollen voittaja sai 3 pistettä ja muut pelaajat saivat yhteensä $10 - 3 = 7$ pistettä.

Muiden pelaajien kuin voittajan oli mahdollista saada yhteensä 7 pistettä vain siten, että he saivat mahdollisimman suuret pistemäärät, eli 2,5, 2, 1,5 ja 1 pistettä. Näin ollen pelaajien pistemäärät olivat paremmuusjärjestyksessä 3, 2,5, 2, 1,5 ja 1.

Tarkistetaan vielä, että tämä on mahdollinen tulos. Voittaja hävisi toiseksi tulleelle pelaajalle, mutta voitti kaikki muut kolme pelaajaa, joten hänen pistemääränsä oli $3 \cdot 1 + 0 = 3$. Toiseksi tullut pelaaja voitti ensimmäiseksi tulleen ja pelasi tasapelin muiden pelaajien kanssa, joten hänen pistemääränsä oli $1 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$. Kolmanneksi tullut pelaaja hävisi voittajalle, pelasi tasapelin toiseksi ja neljänneksi tulleiden pelaajien kanssa ja voitti viidenneksi tulleen pelaajan, joten hänen pistemääränsä oli $0 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 = 2$. Neljänneksi tullut pelaaja pelaaja hävisi voittajalle ja pelasi tasapelin muiden pelaajien kanssa, joten hänen pistemääränsä oli $0+3\cdot 0{,}5 = 1{,}5$. Viidenneksi eli viimeiseksi tullut pelaaja pelasi tasapelin toiseksi ja neljänneksi tulleiden pelaajien kanssa ja hävisi muille, joten hänen pistemääränsä oli $2 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}5 = 1$.

16. Positiivisen desimaaliluvun desimaalipilkku siirretään neljä paikkaa oikealle. Saatu luku on alkuperäisen luvun käänteisluku kerrottuna neljällä. Mikä on alkuperäinen luku?

Ratkaisu. Merkitään kysyttyä lukua n:llä. Ehtojen perusteella

$$10\,000n = \frac{4}{n},$$

joten

$$n^2 = \frac{4}{10\,000},$$

ja edelleen, koska luku n on positiivinen, saadaan

$$n = \sqrt{\frac{4}{10\,000}} = \frac{2}{100} = 0{,}02.$$

17. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a + d = 9, \\ ad + b = 8, \\ bd + c = 74, \\ cd = 18, \end{cases}$$

kun a, b, c, d ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu. Viimeisen yhtälön perusteella c ja d ovat samanmerkkiset, koska niiden tulo on positiivinen. Jos c ja d ovat negatiivisia, niin kolmannen yhtälön perusteella myös

$$b = \frac{74 - c}{d}$$

on negatiivinen positiivisen luvun ja negatiivisen luvun osamääränä. Tällöin toisen yhtälön perusteella myös

$$a = \frac{8 - b}{d}$$

on negatiivinen positiivisen luvun ja negatiivisen luvun osamääränä. Nyt $a + d$ on kahden negatiivisen luvun summana negatiivinen, mikä on ristiriita ensimmäisen yhtälön kanssa.

Näin ollen c ja d ovat kummatkin positiivisia kokonaislukuja ja viimeisen yhtälön perusteella luvun 18 tekijöitä, joita ovat 1, 2, 3, 6, 9 ja 18.

Tarkastellaan kaikki mahdolliset tapaukset erikseen. Tapaustarkastelun alkuasetelma perustuu viimeiseen yhtälöön $cd = 18$.

Tapaus 1: Luvut c ja d eivät voi olla 3 tai 6, koska silloin viimeisen yhtälön perusteella jompi kumpi luvuista c ja d on 3 ja toinen on 6. Tällöin $bd + c$ on jaollinen kolmella, mutta kolmas yhtälö $bd + c = 74$ ei voi toteutua, koska luku 74 ei ole kolmella jaollinen.

Tapaus 2: Jos $c = 1$, niin $d = 18$. Nämä eivät kelpaa, sillä kolmannen yhtälön perusteella

$$b = \frac{74 - 1}{18} = \frac{73}{18} = 4\frac{1}{18},$$

joka ei ole kokonaisluku.

Tapaus 3: Jos $c = 2$, niin $d = 9$. Tällöin kolmannen yhtälön perusteella

$$b = \frac{74 - 2}{9} = \frac{72}{9} = 8$$

ja toisesta yhtälöstä saadaan

$$a = \frac{8 - 8}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

Lisäksi ensimmäinen yhtälö

$$a + d = 0 + 9 = 9$$

toteutuu.

Tapaus 4: Jos $c = 9$, niin $d = 2$. Nämä eivät kelpaa, sillä kolmannen yhtälön perusteella

$$b = \frac{74 - 9}{2} = \frac{65}{2} = 32\frac{1}{2},$$

joka ei ole kokonaisluku.

Tapaus 5: Jos $c = 18$, niin $d = 1$. Nämä eivät kelpaa, sillä vaikka kolmannesta yhtälöstä

$$b = \frac{74 - 18}{1} = \frac{56}{1} = 56$$

ja toisesta yhtälöstä

$$a = \frac{8-56}{1} = -48$$

saadaan kokonaisluvut, niin ensimmäinen yhtälö ei toteudu:

$$a + d = -48 + 1 = -47 \neq 9.$$

Ainoa kokonaislukuratkaisu yhtälöryhmälle saatiin tapauksessa 3:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 8, \\ c = 2, \\ d = 9. \end{cases}$$

18. Kirppu on lukusuoralla kohdassa 0 valmiina hyppäämään. Jokaisella hypyllään kirppu liikkuu 3 tai 5 yksikköä joko vasemmalle tai oikealle. Kirpun tavoite on käydä jokaisen luvun $1, \ldots, 20$ kohdalla. Etsi jono, jossa on enintään 22 hyppyä ja joka toteuttaa vaaditun tavoitteen.

Ratkaisu. Esimerkiksi jono $0, 3, 6, 11, 8, 5, 10, 7, 12, 17, 20, 15, 18, 13, 16, 19, 14, 9, 4, 1, 4, 7, 2$ täyttää vaatimukset.

19. Valitaan kuutiosta satunnaisesti neljä kärkeä. Kaikki mahdolliset neljän kärjen valinnat ovat yhtä todennäköisiä. Mikä on todennäköisyys, että valitut kärjet muodostavat tetraedrin? Entä mikä on todennäköisyys, että valitut kärjet muodostavat säännöllisen tetraedrin?

Ratkaisu. Kuutiossa on kahdeksan ja tetraedrissa on neljä kärkeä. Näin ollen tetraedrin kärjet voidaan valita kuution kärjistä

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

eri tavalla.

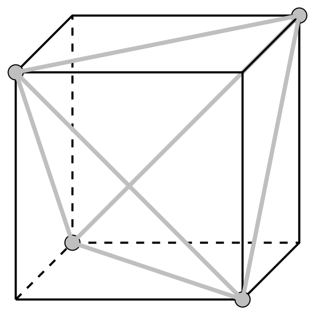
Jos valitut neljä kärkeä sijaitsevat samassa tasossa, niin ne eivät muodosta tetraedriä. Sellainen kärkinelikko muodostuu, kun kaikki valitut kärjet ovat kuution saman tahkon kärkiä. Tällaisia kärkinelikoita on yhteensä kuusi, joka on kuution tahkojen lukumäärä. Valitut neljä kärkeä sijaitsevat samassa tasossa myös silloin, kun kärkien kautta kulkeva taso on kuution halkaisija (ts. kuution kaksi vastakkaista särmää sijaitsevat kuution halkaisevassa tasossa). Tällaisiakin nelikoita on yhteensä kuusi. Näin ollen 70 erilaisesta kärkinelikosta $6+6 = 12$ on sellaisia, jotka eivät muodosta tetraedria. Saadaan siis, että kärkinelikoista $70 - 12 = 58$ on sellaisia, jotka muodostavat tetraedrin. Neljän kärjen satunnaisella valinnalla on tetraedrin muodostumisen todennäköisyys näin ollen

$$\frac{58}{70} = \frac{29}{35} \approx 0{,}83.$$

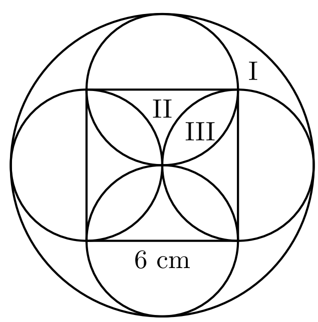
Säännöllinen tetraedri on mahdollista muodostaa kahdella eri tavalla. Valitaan ensin mikä tahansa kärki. Sen jälkeen valitaan jokaiselta kuution tahkolta, jonka kärkenä ensin valittu kärki on, tahkoneliön vastakkainen kärki. Näin valitut kolme kärkeä muodostavat yhdessä ensin valitun kärjen kanssa säännöllisen teraedrin (ks. alla oleva kuva, jossa tetraedrin kärjet ja särmät ovat vaaleanharmaita). Tetraedri on säännöllinen, koska sen kaikki särmät ovat kuution tahkojen halkaisijoita kärjestä vastakkaiseen kärkeen ja näin ollen ne ovat yhtä pitkiä.

Toinen säännöllinen tetraedri muodostuu valitsemalla kärjiksi loput kuution neljä kärkeä, jotka jäivät valitsematta ensimmäisen tetraedrin kärjiksi. Neljän kärjen satunnaisella valinnalla on säännöllisen tetraedrin muodostumisen todennäköisyys näin ollen

$$\frac{2}{70} = \frac{1}{35} \approx 0{,}03.$$



20. Neliön sivun pituus on 6 cm. Jokainen sivu on ympyrän halkaisija kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Ison ympyrän keskipiste on neliön keskipisteessä ja sen säde on neliön sivun pituinen. Laske alueiden I, II ja III pinta-alat.



Ratkaisu. Ison ympyrän säde on 6 cm ja pienen ympyrän säde on 3 cm. Ison ympyrän pinta-ala on näin ollen 36π cm^2 ja pienen ympyrän pinta-ala on 9π cm^2. Neliön pinta-ala on 36 cm^2.

Neljä pientä puoliympyrää peittävät neliön niin, että alueen III muotoiset neljä aluetta peittyvät kukin kaksi kertaa. Näin ollen alueen III pinta-ala on

$$\frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 9\pi - 36}{4}\ \mathrm{cm}^2 = (4{,}5\pi - 9)\,\mathrm{cm}^2 \approx 5{,}14\ \mathrm{cm}^2.$$

Pienten ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala on

$$4 \cdot 9\pi \text{ cm}^2 = 36\pi \text{ cm}^2,$$

joka on sama kuin ison ympyrän pinta-ala. Näin ollen pienten ympyröiden päällekkäiset alueen III muotoiset neljä aluetta ovat pinta-alaltaan täsmälleen yhtä suuret kuin ison ympyrän sisälle pienten ympyröiden ulkopuolelle jäävät alueen I muotoiset neljä aluetta. Saadaan siis, että alueen I pinta-ala on sama kuin alueen III pinta-ala, eli $(4{,}5\pi - 9)\,\text{cm}^2 \approx 5{,}14 \text{ cm}^2$.

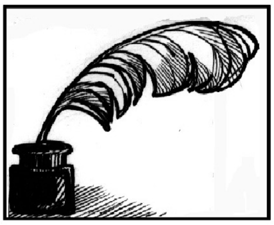
Alueen II pinta-ala saadaan laskettua esimerkiksi niin, että neliön pinta-alasta vähennetään kahden pienen puoliympyrän pinta-ala ja saatu pinta-ala jaetaan kahdella. Alueen II pinta-ala on siis

$$\frac{36 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 9\pi}{2} \text{ cm}^2 = (18 - 4{,}5\pi)\,\text{cm}^2 \approx 3{,}86 \text{ cm}^2.$$

Solmun 3/2022 tehtävien 1–10 ratkaisut julkaistiin edellisessä numerossa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja



Mietteitä matematiikasta

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Matematiikan olemuksesta

Matematiikka [4][14] on syntynyt tarpeeseen jäsentää maailmaa, vertailla asioita ja ennustaa tapahtumia. Ensimmäisiä sovellusalueita olivat ainakin ajanlasku, kauppa, verotus ja maanmittaus. Matematiikalle on ominaista käsitteellisyys ja yleisyys. Matematiikan abstraktiot syntyvät samastamalla: luku viisi edustaa sekä viittä varista että viittä sormea. Käsitteiden avulla määritellään uusia käsitteitä ja tutkitaan niiden ominaisuuksia, esimerkkeinä lukujen yhteenlasku ja sen vaihdannaisuus.

Abstraktin systeemin tietyt ominaisuudet voidaan ottaa perustotuuksiksi, *aksioomiksi*, uudelle systeemille. Tällöin on kysymys yleistämisestä: katsotaan, millainen teoria saadaan aikaan käyttäen päättelyiden lähtökohtina aksioomia ja vain niitä. Esimerkiksi reaaliluvut olivat käytössä jo ennen ajanlaskumme alkua, mutta ne määriteltiin tarkasti vasta 1800-luvun loppupuolella, ja täydellinen reaalilukujen aksioomajärjestelmä esitettiin 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa. Intuitiivisesti, heuristisesti, tietokoneohjelmalla tai muulla tavoin keksityt väitteet, arvaukset systeemin ominaisuuksiksi, varmennetaan todistamalla, etsimällä aukoton päättelyketju aksioomista ja aikaisemmin varmennetuista tosiasioista väitteeseen. Todistettu väite, mikäli sitä pidetään tarpeeksi merkittävänä, tulee osaksi matematiikan yleisesti hyväksyttyä oppirakennelmaa. Näin matematiikan teoriat laajenevat. Todistamalla todeksi osoitettu väite on takuuvarmasti totta myös tulevaisuudessa.

Joskus väitteet elävät vuosikausia konjektuureina tai hypoteeseina ilman todistusta. Kuuluisimpia ovat *Riemannin hypoteesi* [2][16] vuodelta 1859 ja *Collatzin konjektuuri* [3][9] vuodelta 1937. Niistä kumpaakaan ei tietääkseni ole vielä todistettu eikä kumottu. *Fermat'n suuri lause* [11] vuodelta 1637 eli todistamattomana väitteenä 358 vuotta, kunnes Andrew Wiles keksi todistuksen ja julkaisi sen vuonna 1995. Joukkojen mahtavuuksiin liittyvä *kontinuumihypoteesi* [10] vuodelta 1878 on sikäli erikoislaatuinen väite, että sitä ei edes periaatteessa pystytä todistamaan eikä kumoamaan joukko-opin tavanomaisista aksioomista lähtien. Tämän osoittivat puoliksi Kurt Gödel vuonna 1940 ja lopullisesti Paul Cohen vuonna 1963. Ennen Gödeliä lukuisat matemaatikot yrittivät todistaa kontinuumihypoteesia joko päteväksi tai pätemättömäksi, muiden muassa hypoteesin esittäjä Georg Cantor[1]. Kokonaislukujen alkutekijöiden lukumäärään liittyvä *Pólyan konjektuuri* [15] vuodelta 1919 on kuuluisa esimerkki matemaatikoita pitkään vaivanneesta, lopulta paikkansapitämättömäksi osoittautuneesta väitteestä. Sen osoitti vääräksi C. Brian Haselgrove vuonna 1958.

Kauan sitten matematiikka määriteltiin Helsingin yliopiston opinto-oppaassa *loogiseksi ja formaaliksi tie-*

[1] Kuriositeettina mainittakoon, että suomalainen filosofi ja kirjastonjohtaja Uuno Saarnio "todisti" kontinuumihypoteesin, mutta matemaatikkoyhteisö ei ole hyväksynyt Saarnion päättelyä. [1][6]

teeksi, joka kehittää teorioita annetuista peruslähtökohdista, aksioomista, lähtien. Määritelmä ei kata koko totuutta, sillä usein mielenkiintoisin ja syvällisin tehtävä on itse aksioomajärjestelmän luominen. Aksioomat eivät saa olla ristiriidassa keskenään; tämä on ehdoton vaatimus. Lisäksi aksioomia tulisi olla mahdollisimman vähän, mutta kuitenkin riittävästi, jotta kaikki teoriaan liittyvät mielenkiintoiset kysymykset pystytään ainakin periaatteessa ratkaisemaan aksioomien pohjalta. Pyrkimys niukkuuteen tunnetaan nimellä *Occamin partaveitsi.*

Vanhan opinto-oppaan määritelmä antaa sikälikin väärän mielikuvan, että matematiikka ei tarkoita mekaanista kaavojen johtamista aksioomapohjalta, ei todellakaan. Matematiikan harjoittaminen on mitä suurimmassa määrin luovaa työtä, jossa on rajattomasti vapauksia. Ideointivaiheessa kaikenlainen hulluttelu on tavallista ja suotavaa. Lopputuloksessa, joka voi olla pienimuotoinen käytännön ongelman ratkaisu tai mahtavimmillaan tieteellinen artikkeli, on usein näkyvissä matemaatikon persoonallinen kädenjälki. Ankara loogisuuden vaatimus ei ole sellainen tukahduttava kahle, joksi se helposti kuvitellaan. Jokaisella pelillä on sääntönsä, kakofonia ei ole musiikkia.

Matematiikan ja luonnontieteiden ero

Luonnontieteissä, joita ovat esimerkiksi fysiikka ja biologia, tehdään havaintoja ja rakennetaan niiden pohjalta malleja reaalimaailman ilmiöille. Tyypillisessä fysiikan mallissa ilmiöiden kuvaamiseen käytetään matematiikan kieltä. Teorian lähtökohtana aksioomajärjestelmän tilalla on itse luonto, reaalimaailman suuri tuntematon, jonka olemusta pyritään ymmärtämään. Tämän takia luonnontieteissä ei pystytä todistamaan väitteitä oikeiksi. Sen sijaan väitteen vääräksi todistaminen on luonnontieteen ydintä: jos havainnot osoittavat mallin vääräksi, malli hylätään tai rajoitetaan sen käyttöaluetta. Tavallisin esimerkki on 1600-luvulla syntyneen newtonilaisen maailmankaikkeuden mallin täsmentyminen Einsteinin malliksi 1900-luvun alussa. Newtonin teoriaa ei suinkaan hylätty, vaan vanhan teorian “kauneusvirheiden” herättämien epäilysten ja uusien tarkkojen mittausten kautta ymmärrettiin, että pari sataa vuotta käytössä ollut malli ei toimi, kun ollaan tarpeeksi kaukana ihmisen arkipäiväisestä kokemusmaailmasta. Toisaalta Einsteinin suhteellisuusteoria on tehnyt mahdolliseksi suunnitella laitteita, jotka rikastavat arkikokemusta. Esimerkiksi GPS-paikannin on sellainen laite. Kuitenkin valtaosalle insinööreistä riittää tänään ja varmasti huomennakin klassinen Newtonin teoria. Maailmankuvamme täsmentyy uusien havaintojen kautta, mutta luonnontieteet eivät tarjoa varmuutta siitä, että nykyinen käsitys luonnonilmiöistä ja niiden syistä säilyisi myös tulevaisuudessa.

Matematiikan kieli

Matematiikalle on luonteenomaista täsmällisyys. Ihmisen luonnollinen kieli on liian ylimalkaista ja monitulkintaista matematiikan tarpeisiin. Arkikielestä myös puuttuu matematiikassa tarvittava käsitteistö. Matemaattisten totuuksien ilmaiseminen luonnollisella kielellä johtaa alhaisellakin abstraktiotasolla aivan liian pitkiin sanallisiin selostuksiin. Esimerkiksi toisen asteen yhtälön selittäminen ilman matematiikan käsitteitä ja symbolikieltä tuottaisi sanatulvan, jonka perusteella asian ymmärtäminen olisi hankalaa. Vielä vaikeampaa olisi selittää, miten yhtälö ratkaistaan.

Suurelle yleisölle tarkoitetussa matematiikan saavutuksia esittelevässä kirjallisuudessa pyritään minimoimaan matemaattisten symbolien ja kaavojen lukumäärä. Tämä on ymmärrettävää, mutta samalla lukijalle jätetään paljastamatta matematiikan ydinolemus. Tekstissä esiintyviä kaavoja on tapana jopa pahoitella. Varomaton lukija houkutellaan pedon luokse naamioimalla se lampaaksi. Vääryydellä ja viekkaudella matematiikan ansaan viekoiteltu pieni ihminen saattaa jäädä koukkuun ja kiinnostua aiheesta niin paljon, että joutuu sisäisen pakon sanelemana opettelemaan myös symbolikielen, matematiikan nuotit. Tämä lienee kirjoittajan tavoite, enkä moiti häntä siitä. Myös yhteiskunta kiittää, varsinkin teknologiateollisuus.

Puolanjuutalaisen silmälääkärin Ludovic Lazarus Zamenhofin 1800-luvun loppupuolella kehittämästä esperanton kielestä oli tarkoitus tulla universaali maailmankieli. Erään arvion mukaan maailmassa on suunnilleen New York Cityn väkiluvun (kymmenisen miljoonaa) verran ihmisiä, jotka ovat joskus tutustuneet esperanton alkeisiin. Toisen arvion mukaan yli 600 miljoonaa opiskelijaa on parhaillaan toisen asteen koulutuksessa maapallolla. Ei liene kovin väärin arvattu, että lähes jokainen näistä 600 miljoonasta tutustuu jossain vaiheessa matematiikan kielen alkeisiin. Matematiikka on tosiasiallinen universaali kieli. Matematiikan symbolit kirjoitetaan samalla tavalla länsimaisissa, venäläisissä ja japanilaisissa oppikirjoissa. Matematiikan käsitteet ja teoreemat ovat samat kautta maailman.

Onko matematiikka vaikeaa

Kaiken järjen mukaan matematiikan luulisi olevan helppoa kuin mikä. Matematiikkahan on vain kokoelma itsestäänselvyyksiä organisoituna erilaisiksi rakennelmiksi, teorioiksi. Jos kahden seipään välinen etäisyys on viisitoista metriä ja kumpaankin seipääseen on kiinnitetty pässi viiden metrin narulla, pässit eivät pääse pökkimään toisiaan. Periaatteessa matematiikan totuudet eivät ole tämän kummallisempia: jos tietyt vaatimukset täyttyvät, systeemillä on tiettyjä ominaisuuksia. Matematiikka ei ota kantaa siihen, täyttyvätkö vaatimukset, systeemin oletukset, tarkasteltavassa reaalimaailman tilanteessa. Oletusten voimassaolon pohdinta on matematiikan soveltajan, esimerkiksi fyysikon, insinöörin tai lammasfarmarin, tehtävä. Pässiteoreeman matemaattinen yleistys, teoreeman abstrakti vastine, voidaan todistaa yleisissä metrisissä avaruuksissa niin sanotun kolmioepäyhtälön avulla.

Ihmisen aivoja ei ilmeisestikään ole luotu loogista ajattelua varten, ja itsestäänselvyydet ne vasta vaikeita ovatkin, myös ja varsinkin minulle. Kuuluisan sanonnan mukaan matematiikkaan ei ole kuningastietä. Matematiikan oppiminen vaatii vuosikausien määrätietoista työskentelyä samaan tapaan kuin pianonsoiton oppiminen tai kehonrakennus. Tavallinen ihminen ymmärtää heti soiton alkaessa, milloin pianon ääressä istuu taitava pianisti, ja osaa ihailla hänen taidokkuuttaan. Kehonrakentajan vartalo näyttää komealta ja tavoittelemisen arvoiselta taviksenkin silmissä. Entäpä sitten matemaatikko, millaisena hänen osaamisensa näyttäytyy kadunmiehelle tai -naiselle? Matemaatikko osaa piirtää hieroglyfejä taululle, heilutella käsiään ja puhua käsittämättömiä. Pitkän matematiikan valinnut lukiolainen ja kansainvälistä arvostusta nauttiva matematiikan tutkija, lukiolaista suunnattomasti oppineempi matemaatikko, elehtivät ja höpisevät samalla tavalla. Edellisen piirtämät hieroglyfit ovat ehkä aavistuksen verran selväpiirteisempiä, siinä merkittävin ero.

On oikeastaan kummallista, miksi joissakin ihmisissä syntyy halu oppia matematiikkaa. Matematiikan saavutusten arvon ymmärtäminen edellyttää matematiikan perusteiden hallintaa, mutta kukaan ei ole seppä syntyessään. Minkä takia nuori ihminen suostuu vuosikausia jatkuvaan kovaan työhön, jonka lopputuloksena on taito piirrellä koukeroita ja mutista omituisia kädet viuhtoen? Mikä saa ihmistaimen ajattelemaan "tuollaiseksi minäkin haluan"? Ehkä äiti, isoisä tai opettaja on saanut vakuutettua nuorelle, että matematiikka tuottaa huvia myös matemaatikolle itselleen eikä pelkästään stand up tai hand-waving -komiikan ystäville yleisön joukossa, ja lisäksi matematiikan opiskelusta saattaa olla ihan asiallista hyötyäkin.

Matematiikan osaajaksi tuleminen on siis työlästä, mutta niin on monen muunkin asian opettelu. Kokemukseni mukaan matematiikka on vaikeudestaan huolimatta paljon helpompaa kuin esimerkiksi kasvatustiede. Jälkimmäisen malleja ja viitekehyksiä en ole ikinä ymmärtänyt, vaikka olen kovasti yrittänyt. Osaamattomuuteni luultavasti kuultaa läpi tästäkin kirjoituksesta.

Matematiikan vaikeus lienee juuri siinä, että ilman selvää näyttöä ponnistelun hyödyllisyydestä tai kokemusta ongelmanratkaisun tuottamasta ilosta on todella rankkaa ellei mahdotonta ryhtyä keskittymistä vaativaan opiskeluun. Mielestäni matematiikan hyödyllisyyttä esimerkiksi sovellusten kautta on korostettu liikaa motivaation lähteenä. Luulenpa motivaation kumpuavan enemmän oppimisen, oivaltamisen ja onnistumisen kokemusten tuomasta riemusta. Ehkä liikkeelle kannattaa lähteä hyvin pienin askelin. Mielenkiinnon herättyä opiskelija saattaa vaivihkaa ajautua keskittyneeseen flow-tilaan [12], jossa ajantaju katoaa, ja yllättävän suuri määrä työtä tulee tehdyksi ikään kuin huomaamatta. Peliharrastajille flow on tuttu kokemus.

Tarvitaanko matematiikkaa

Tutkimus, tuotekehitys, kauppa, pankkitoiminta, liikenne, viestintä ja yleensä kaikki nykyiset järkeen ja tietoon perustuvat, ihmiskunnan hyvinvointia ylläpitävät ja lisäävät aktiviteetit ovat tulleet mahdollisiksi vain sen takia, että ihmisyhteisöillä on ollut käytössään matematiikan osaajia; ei pelkästään matemaatikoita, vaan matematiikkaa osaavia tutkijoita, insinöörejä, yhteiskuntatieteilijöitä, talouden asiantuntijoita, opettajia ja muita matemaattisesti sivistyneitä henkilöitä. Valitettavasti matematiikka on tehnyt mahdolliseksi myös ilmaston pilaantumisen ja nykyaikaisen sodankäynnin, mikä ei liene kovin edistyksellistä. Olisi kuitenkin aika hassua syyttää matematiikkaa tai matemaatikoita teknologian väärinkäytöstä.

Ihmiskunta, kansakunnat, yritykset ja muut yhteisöt siis tarvitsevat matematiikkaa. Entäpä yksilöt? On tosiasia, että Pisa-testien tuloksilla vuonna 2006 ylpeilleessä Suomessa on pilvin pimein aikuisia ihmisiä, joille kertotaulu tai prosenttilaskut ovat yhtä vaativia kuin spagaatti tai spiraali valtaosalle kansalaisista. Näissä voimisteluliikkeissähän suorat jalat laitetaan 180° kulmaan toisiinsa nähden. Oma spagaattini jää noin 120° vajaaksi. Yritin parantaa suoritustani muutamalla asteella. Siksi tässä kirjoittelenkin, kun en mitään fyysisempää pysty vähään aikaan tekemään. Toisaalta osaan kertotaulun ja tiedän, että jos tuotteen hintaa ensin nostetaan 50 % ja sen jälkeen lasketaan 50 %, tuote on lopulta 25 % alkuperäistä halvempi. Osalla prosenttilaskuja osaamattomista kansalaisista menee oikein hyvin, onpa eräs heistä kohonnut Suomen pääministeriksikin. Voidaanko tästä tehdä johtopäätös, että yksilöt eivät tarvitse matematiikkaa? Kyllä vaan.

Matematiikan osaaminen ei ole välttämätön, eikä valitettavasti riittäväkään, edellytys yhteiskunnassa pärjäämiselle. Opiskelijan kannalta matematiikka on mahdollistaja, ovien avaaja samoin kuin kielitaitokin, johon laajasti ymmärrettynä voidaan lukea ohjelmointikieltenkin hallinta. Matematiikan osaajalla on paljon moninaisemmat mahdollisuudet sijoittua työmarkkinoille kuin matematiikan opiskelun laiminlyöneellä toverillaan. Alan opinnoista on hyötyä myös sellaisissa tehtävissä, joissa matematiikan abstraktia työkalupakkia ei varsinaisesti tarvita, sillä matematiikan opiskelu kehittää käsitteellistä ajattelua, syiden ja seurausten ymmärtämistä ja yleisemmin päättelykykyä, suhteiden tajua, geometrista hahmottamista, ongelmanratkaisutaitoja, keskittymiskykyä, sinnikkyyttä ja "rohkeutta tarttua vaativiinkin tehtäviin ennakkoluulottomasti", jota niin monessa työpaikkailmoituksessa toivotaan hakijalta. Työurallaan menestynyt ihminen ei välttämättä tiedosta, että hänen kyvykkyytensä on peräisin ahkeroinnista matikan läksyjen parissa.

Matematiikan taitajaa on hyvin hankalaa ellei mahdotonta huijata esimerkiksi tilastoilla tai prosenteilla. Hän osaa arvioida lainanottoon tai rahastosäästämiseen liittyvät riskit, kulut ja tuotot. Asuntokaupoilla matematiikkaosaaja tajuaa kauppahinnan ja velattoman hinnan eron. Asunto-osakeyhtiön tilinpäätöksen analysointi ei ole hänelle ylivoimainen tehtävä. Hänellä on edellytykset vertailla oman tontin ja toisaalta vuokratontin vaikutusta myyntihintaan, vastikkeisiin ja vastikkeiden tulevaan kehitykseen.

Voidaanko matematiikkaa ymmärtää

Fyysikko Richard Feynmanin mielestä kvanttimekaniikkaa on mahdotonta ymmärtää. Matemaatikko John von Neumann on sanonut samaa matematiikasta. Nämä jo edesmenneet tiedemiehet ovat niin ansioituneita oman alansa (ellei muidenkin alojen) asiantuntijoita ja kehittäjiä, että heidän näkemyksiään on uskaliasta kyseenalaistaa. Luultavasti herrojen lausahduksissa on mukana ripaus huumoriakin.

Mitä ymmärtämisellä tai erityisesti matematiikan ymmärtämisellä tarkoitetaan? Ymmärryksen eri komponentteja on esitelty Wikipedian sivulla [17]. Mielestäni oleellisia kysymyksiä ovat *miten* ja *miksi*. Edelliseen vastaaminen vaatii tietoa, jälkimmäiseen vastaaminen ymmärtämistä. Lisäksi tieto on edellytys ymmärtämiselle. Opiskelijat usein vetoavat internetiin tiedon lähteenä, ulkoisena muistina, jolloin heidän itsensä ei tarvitse muistaa juuri mitään. Puheentunnistukseen kykenevän Google-kääntäjän kanssa voidaan matkustaa moneen paikkaan maailmassa ja kommunikoida paikallisen väestön kanssa kieltä osaamatta. Kyllä se varmaan auttavasti onnistuukin, mutta tuollainen keskustelu on hyvin hankalaa ja rajoittunutta. Sujuvaan keskusteluun tarvitaan sujuvaa kielen hallintaa ja kohtalaista sanavarastoa omassa päässä. Samalla tavoin kertotaulun muistaminen ja kyky suorittaa yksinkertaisia päässälaskutoimituksia sujuvoittaa vaikkapa laina- tai hintaneuvotteluita varsinkin, jos ja kun on kiire.

Asioiden oppimisen ja ymmärtämisen kannalta muistamisella on eräs vähälle huomiolle jäänyt, mutta sitäkin merkittävämpi etu: tärkeät oivallukset tulevat usein odottamattomissa tilanteissa, esimerkiksi bussipysäkillä seistessä tai autoa ajaessa. Taustatietojen muistaminen on edellytys tällaisten hedelmällisten päähänpälkähtämisten synnylle.

Tiedon ja ymmärryksen raja on häilyvä. Jos autotekniikan opiskelija osaa kuvailla, miten polttomoottori toimii, tätä pidetään jo moottorin toiminnan ymmärtämisenä. Toisinaan opiskelija opettelee tenttiä varten jonkin laskun välivaiheet ulkoa ymmärtämättä itse laskua: hän ei kykene selittämään, mihin yleiseen periaatteeseen kukin välivaihe perustuu. Matematiikan lauseiden todistuksia lukiessa pelkkä välivaiheiden laillisuuden verifiointikaan ei takaa ymmärrystä päättelyn ideasta tai juonesta. Sen olen itseopiskelun yhteydessä monta kertaa omakohtaisesti huomannut kahlatessani läpi itselleni ennestään tuntematonta lauseen todistusta. Jos opiskelija pystyy omasta päästään keksimään väitteelle pätevän todistuksen, hän ymmärtää ainakin sen, miten todistettava tulos on väistämätön seuraus aikaisemmin todistetuista tosiasioista. Tämä ei kuitenkaan ole riittävä osoitus niiden aikaisempien tulosten ymmärtämisestä.

En katso ymmärtäväni matemaattista määritelmää, lausetta tai esimerkkiä ennen kuin saan rakennettua tilanteesta toimivan ja tarpeeksi yksityiskohtaisen geometrisen tai muuten visuaalisen mielikuvan. Kuullessaan tämän eräs minua ansioituneempi matemaatikko sanoi kerran, että olen ajattelussani turhan rajoittunut. Keskustelimme tuolloin *Hilbertin kuutiosta* [13], josta on käytetty myös havainnollisempaa nimitystä *Hilbertin tiili*. Se on suorakulmaisen särmiön ääretönulotteinen vastine, jota voidaan käännellä "kyljeltä toiselle" niin, että tiilen korkeus koko ajan vähenee lähestyen raja-arvonaan nollaa. Tavallista kolmiulotteista tiiltäkin voidaan kääntää kaksi kertaa särmän ympäri tavalla, jossa tiilen korkeus pienenee kummallakin kerralla. Tempun voi tehdä myös tulitikkuaskilla pöydällä. Ehkä kollega tarkoitti sitä, että geometriset mielikuvat rajoittuvat pakosti kolmeen dimensioon. Useampiulotteisista kappaleista luodut visualisoinnit ovat vain projektioita, varjoja. Siirtyminen kolmesta ulottuvuudesta useampaan ulottuvuuteen tehdään algebrallisesti, lisäämällä kolmiulotteisen avaruuden lausekkeisiin koordinaatteja ilmeisellä tavalla. Esimerkiksi Pythagoraan lauseesta kumpuava kahden pisteen välisen etäisyyden kaava on tällainen lauseke.

Matemaattisen lauseen todistuksen idea valkenee minulle usein vasta sitten, kun rakennan päähäni havainnollisen esimerkin, jossa lauseen oletukset ovat voimassa, ja voin seurata päättelyn kulkua esimerkkitapauksessa vaihe vaiheelta. Täydennän ymmärtämystäni lisäesimerkeillä, joissa jokin oletuksista ei ole voimassa, ja katsomalla, missä todistuksen kohdassa tulee seinä vastaan. Hyvät matematiikanopettajat kautta aikain ovat piirrelleet havainnollisia kuvia ja tarjonneet opiskelijoille valmiita esimerkkejä. Nykyään havainnollistaminen on helpottunut huomattavasti kehittyneen digitaalitekniikan ansiosta.

Digitalisaatiosta

Katselin kevään 2023 matematiikan ylioppilaskokeita Ylen sivuilta [18]. Samalla muistelin, kuinka takavuosina laadin Moodleen matematiikan STACK-tehtäviä. Joskus minusta tuntuu siltä, että liiallisen digitalisaatioinnostuksen takia teknologisesta kikkailusta on tullut itsetarkoitus: erinomaisesta rengistä on tullut kelvoton isäntä, matematiikkaa opetetaan digitaalisuuden ehdoilla. Opettaminen ja tavallaan oppiminenkin pyritään ulkoistamaan tietokoneille. Kuitenkaan niillä ei ole edes pintapuolista saati syvällistä ymmärrystä asioista. Tekoäly pystyy luomaan erilaisia variaatioita ja kombinaatioita vanhoista ideoista, mutta mitään oleellisesti uutta se ei pysty saamaan aikaan. Tai jos pystyy, määrittelen *oleellisesti uuden* uudelleen *sellaiseksi, mihin tekoäly ei pysty.*

Kysykääpä ChatGPT:ltä, miten gravitaatio ja muut vuorovaikutukset saadaan saman sateenvarjon alle.

Matemaattista performanssitaidetta

Vauva.fi -keskustelupalstalla pohditaan työpaikkojen stereotyyppisiä hahmoja:

"Show-persoona — se, joka pamahtaa paikalle kun yleinen ilmapiiri on jäinen, avaa suunsa ja heittää sellaisen vitsin, että kaikki alkavat nauraa, rentoutuvat silminnähden ja oppivat taas puhumaan. Ja mitä rennompi ilmapiiri, sitä villimmiksi tämän show-persoonan jutut menevät. Häntä ei jännitä alkaa spontaanisti vaikka tanssia kollegoidensa edessä."

Tehtävä: Lue sitaatti uudelleen korvaamalla yhdyssana *show-persoona* sanalla *matemaatikko.* Kuulostaako tutulta? Tuleeko mieleesi oma matematiikanopettajasi?

Visa Saarisen [5] tai Samuli Siltasen [8] oppilaat varmaan vastaavat kyllä. Saarinen, Siltanen ja muut sometaitoiset showpersoonat ovat tosissaan panneet hihat heilumaan tehdäkseen vastenmielisestä haluttavaa. Saarisen mukaan "palkitsevinta on saada omalla sisällöllään huijattua porukka oppimaan jotain, mitä heitä ei muuten kiinnostaisi seurata" [7]. Yhteiskunta tarvitsee matematiikan osaajia, joten kaikki keinot ovat sallittuja. Vanhakantainen matematiikanopettaja hieman huvittuneena seuraa sivusta. Showmeininki muistuttaa niitä kommervenkkeja, joilla lapsi houkutellaan syömään tai kissa ottamaan matolääkkeensä.

Oma suosikkini on kuivakkaan monotonisella äänellä luennoiva, harmaaseen liitutauluun sulautuva tweedtakkimies, joka vuosikausia jatkuneen opetustyön hiomalla rutiinilla kertoo totuuden kulloinkin käsiteltävästä aiheesta "siitä mitään salaamatta tai siihen mitään lisäämättä taikka sitä muuttamatta" — paitsi, että tarkkaan harkitulla hetkellä, samalla monotonisella nuotilla, silloin, kun kuulija sitä vähiten odottaa, mies tipauttaa suupielestään tuskin havaittavan, rutikuivan vitsin. Jos luennoitsija on taitava, tuon hetken rekisteröinti ei suinkaan ole vähäisimpiä luennon tarjoamista haasteista. Kliimaksin hoksaaminen on palkitsevaa.

Pahoittelut

Pahoittelen sitä, että artikkelissani ei ole näkyvillä ainuttakaan matemaattista kaavaa. Pidettäköön tätä kertaluontoisena hairahduksena.

Viitteet

[1] Koistinen, Ari: *Joukkojen mahtavuudesta.* `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/3/jouma.pdf`

[2] Kulmala, Katja & Vesalainen, Esa V.: *Riemannin ζ-funktio.* `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/1/riemann.pdf`

[3] Laaksonen, Antti: *Collatzin konjektuuri ja algoritmien analysointi.* `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/2/collatz.pdf`

[4] Näätänen, Marjatta & Lehtinen, Matti: *Matematiikasta ja sen menetelmistä.* `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2002/1/matmenet/`

[5] Saarinen, Visa: *Tietovisa.* `https://www.tiktok.com/@tietovisa/`

[6] Saarnio, Uuno: *Mitä tiedämme äärettömästä.* WSOY, 1969.

[7] Sandell, Ellinoora: *Visa Saarinen "huijaa" nuoria saamaan parempia arvosanoja: Näin menetelmä toimii.* Helsingin Sanomat, 26.8.2023. `https://www.hs.fi/kotimaa/turku/art-2000009774748.html`

[8] Siltanen, Samuli: *Samun tiedekanava.* `https://www.youtube.com/c/Samuntiedekanava`

[9] Wikipedia: *Collatz conjecture.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture`

[10] Wikipedia: *Continuum hypothesis.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis`

[11] Wikipedia: *Fermat's Last Theorem.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_Last_Theorem`

[12] Wikipedia: *Flow.*
https://fi.wikipedia.org/wiki/Flow

[13] Wikipedia: *Hilbert cube.*
https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_cube

[14] Wikipedia: *Mathematics.*
https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics

[15] Wikipedia: *Pólya conjecture.*
https://en.m.wikipedia.org/wiki/P%C3%B3lya_conjecture

[16] Wikipedia: *Riemann hypothesis.*
https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

[17] Wikipedia: *Ymmärrys.*
https://fi.wikipedia.org/wiki/Ymm%C3%A4rrys

[18] Yle: *Abitreenit. Matematiikka, pitkä ja lyhyt oppimäärä.*
https://yle.fi/aihe/abitreenit/matematiikka

Solmu 2/2023

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Kansikuva:

Noora Isoeskeli

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 1/2024 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 3.3.2024 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI