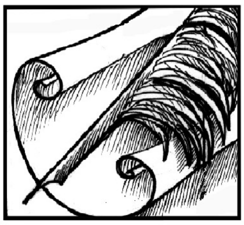
SOLMU

MATEMATIIKKALEHTI 1/2023

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys



Mikä opettajana on parasta?

Pääkirjoitus

Kouluihin liittyvistä ongelmista on puhuttu ja kirjoitettu viime aikoina mediassa paljon. Osansa ovat saaneet ongelmien ja erityisen tuen tarpeen epätasainen jakautuminen [1], oppimistulosten heikentyminen [2] ja eriarvoistuminen ja sukupuolten väliset erot [3], kuten monet muutkin aiheet. Ongelmiin on ehdotettu erilaisia ratkaisuja, jotka tyypillisesti ovat riippuneet siitä, mikä nähdään pahimpana ongelmana.

Tulin itse kiinnostuneeksi siitä, mikä pitää opettajat kouluissa. Kun ongelmista puhutaan, ja kun usein puhutaan siitä, miten rankkaa opettajilla on, mutta opettajat kuitenkin jatkavat kouluissa, tarjoavat hyvää opetusta, ja ainakin osa heistä vaikuttaa uravalintaansa tyytyväiseltä, niin halusin kuulla, mikä kouluissa on hyvää, mikä työssä on mukavaa, ja mikä saa jaksamaan työssä.

Lisäksi mietin, miten uusia opettajia tai opeopiskelijoita on mahdollista saada, jos yleisesti puhutaan vain siitä, mikä kaikki on pielessä. Osin oman kiinnostuksen vuoksi ja osin siksi, että saataisiin positiivinen juttu opettamisesta, päätin perehtyä aiheeseen lähettämällä muutamalle tuntemalleni opettajalle kysymyksen, mikä auttaa jaksamaan työssä ja mikä on kivaa, kun koko ajan kerrotaan, mikä on rankkaa. Sain erilaisia vastauksia ja luvan käyttää niitä tässä jutussa.

Ville Tilvis Maunulan matematiikkalukiosta vastasi seuraavasti: ”Opettaessa saa kertoa itselle rakkaista asioista nuorille, jotka tutustuvat niihin ensimmäistä kertaa. Kuin näyttäisi lempielokuvaansa ensikertalaiselle: Nyt tulee hyvä kohta!”

Tarja Ylivuori, MAOL:n puheenjohtaja, lähetti pitkän vastauksen, josta seuraavassa on palasia: ”Oppilaat, jotka eivät alun perin olleet innostuneita, mutta joista tuli sellaisia sinnikkään työn tuloksena. Se, että pienessäkin koulussa, kuten meillä, matemaattisten aineiden opettajia on useita. On työryhmä, ei tarvitse olla yksin. ... Yläkoulu-lukion opena saa onnistumisen kokemuksia oikeastaan aina, kun on esim. seiskojen ja abien tunnit peräkkäin. Konkretisoituu se, että kyllä oppimista on tapahtunut. ... Työn merkitys. Ei ole kertaakaan tullut mieleen, etteikö lasten ja nuorten kasvattaminen olisi tärkeää ja etteikö heidän olisi tärkeä osata matemaattisia aineita. Teen työtä jolla on tarkoitus.” Tarja korosti myös MAOL-yhteisön tukea: ”Verkosto auttaa ylläpitämään sitä innostusta, joka itsellä matemaattisia aineita kohtaan on nuoresta asti ollut. On tärkeää välillä nousta arjen kahnauksien yläpuolelle ja keskustella opetuksen sisällöstä.”

Otso Huuska Rauman lyseon lukiosta taas puolestaan kirjoitti: ”Opiskelijoiden into elämää kohtaan. Toki myös se, kun joskus joku opiskelija on aidosti kiinnostunut juuri matematiikasta tai fysiikasta, mutta vielä enemmän voimaa antaa, kun saa jutella nuorten kanssa, joiden elämää erilaiset käytännön rajoitteet eivät ole vielä kahlinneet. Nuorten haaveista saa itselleenkin energiaa.”

Piia Haapsaari Kastellin lukiosta lähetti myös pitkän vastauksen. Hänkin kirjoitti kollegoiden, verkostojen ja yhteistyön merkityksestä. Lisäksi hän kirjoitti esimerkiksi seuraavaa: ”Opetustyössä itseäni kiehtoo se, kun opiskelija esittää sellaisen oman ratkaisun, mitä itse en ole aiemmin nähnyt. Ratkaisutavan tutkiminen yhdessä opiskelijan kanssa on moniulotteinen prosessi: opiskelija saa merkitystä tekemälleen luovalle työlle ja parhaimmillaan se sitouttaa ja innostaa opiskelijaa jatkamaan ponnistelua opiskelun eteen. Opettajana puolestaan opiskelijan ajattelu- ja ratkaisutavasta voi oppia sellaista, mikä laajentaa omaa näkökulmaa niin pedagogisessa kuin tiedollisessa mielessä. Sitä kautta voi laajentua ikään kuin uusille ajattelun tasoille tässä ammatissa. Minusta tuntuu, että tässä työssä ei ole koskaan valmis.”

Hyvää kesän jatkoa!

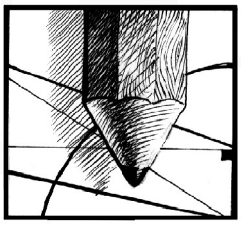
Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Viitteet

[1] *Nämä Helsingin koulut ovat tutkijan mielestä hälytysmerkkejä: Ylen selvitys paljastaa, että vaikeimmat ongelmat painottuvat samoille alueille.* Yle 31.10.2022, haettu 7.7.2023.
`https://yle.fi/a/3-12638287`

[2] Pihla Loula: *Oppimistulokset romahtavat, eikä kukaan tunnu tietävän miksi – Mitä kouluissa on tapahtunut?* HS 12.1.2023, haettu 7.7.2023.
`https://www.hs.fi/kotimaa/art-2000009322569.html`

[3] *Tytöt vastaan pojat – tässä tulokset.* Yle 22.6.2022, haettu 7.7.2023.
`https://yle.fi/a/3-12502405`



Harrastaja keksi yhden kiven laatoituksen

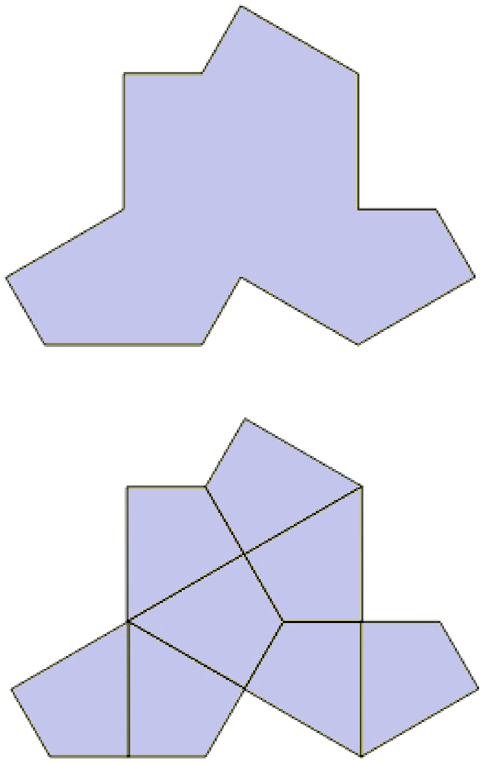
Hannu Korhonen

Katu- ja seinälaatoitukset ovat jaksollisia. Jaksottomat laatoitukset ovat olleet enemmän matemaatikkojen kuin rakentajien mielenkiinnon kohteina. Pitkään oli avoinna kysymys siitä, voidaanko taso laatoittaa jaksottomasti vain yhdellä laatalla. Pari sellaista laattaa on keksitty aikaisemmin [1]. Uusimman keksi englantilainen matematiikan harrastaja viime syksynä.

Uuden laatoituksen keksijä, matematiikan harrastaja, eläkkeellä oleva tulostinhuoltaja David Smith julkaisi tieteellisen artikkelin [2] kolmen matemaatikon kanssa avoimen julkaisemisen jakelualustalla Arxiv Forumilla 20. maaliskuuta 2023. Matemaatikkojen mukanaolo oli varmaan ehdottoman tarpeen, sillä artikkeli sisältää geometrisen kuvailun lisäksi myös todistuksen sille, että tästä uudesta laatasta voidaan tehdä useita erilaisia jaksottomia laatoituksia, mutta että siitä ei voida rakentaa minkäänlaista jaksollista laatoitusta.

Smith kertoo pohtineensa asiaa kymmenen vuotta [3]. ”Olen aina puuhastellut kaikenlaisten muotojen parissa. Yhden kiven ongelmaan olen suorastaan hullaantunut”, sanoo Smith. ”Pidin matematiikasta jo koulussa, mutta en suoriutunut siitä mitenkään loistavasti.” Keksintöä pidetään erityisen huomionarvoisena siksi, että se ei pohjaudu mihinkään aikaisemmin tunnettuun laatoitusideaan, vaan tuo mieleen pikemminkin aineen sisäisen rakenteen.

Alussa mainitun tiedeartikkelin kirjoittajat kutsuvat Smithin laattaa ”hatuksi”. Hyvällä tahdolla sen muodossa voikin olla näkevinään hatun kuvun ja lierit (kuva 1, ylempi). Laatta on 13-kulmio. Se rakentuu kahdeksasta yhtenevästä pitemmän lävistäjänsä suhteen symmetrisestä nelikulmiosta (kuva 1, alempi). Nämä ovat vähän kapeampia kuin Penrosen ”leijat”, terävä kulma on 60° ja kaksi muuta kulmaa suoria.



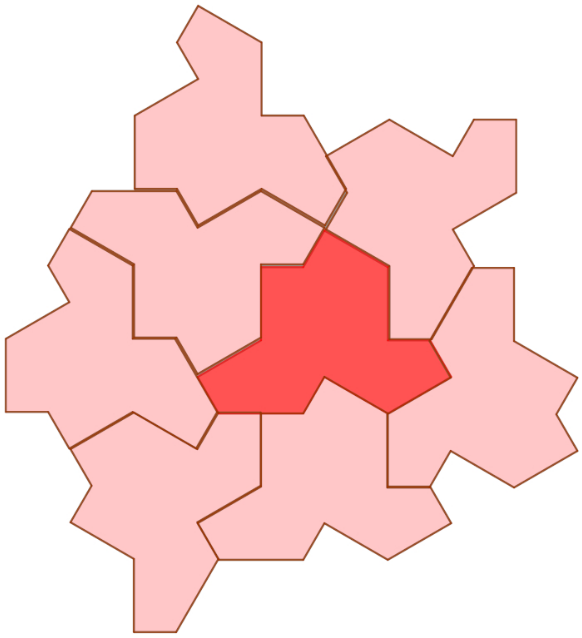
Kuva 1: Hattulaatta ja sen jako yhteneviin nelikulmioihin.

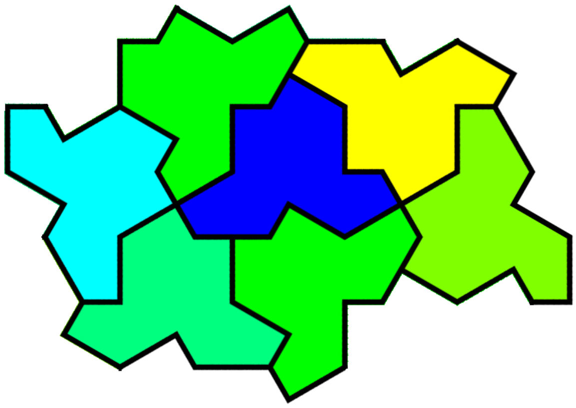
Suuret sanomalehdet tarttuivat aiheeseen nopeasti. New York Timesin viikkolehti kirjoitti siitä jo runsaan viikon kuluttua [3] sekä The Guardian [4] ja The Times [5] kahden viikon sisällä. Esimerkiksi Guardian luonnehti yhden kiven laatoitusta yhdeksi matematiikan kiehtovimmista mysteereistä. Median innostukseen vaikutti varmaankin se, että laatoitukset ovat visuaalisesti näyttäviä ja helposti ymmärrettävää tasogeometriaa, sekä toisaalta se, että näinkin konkreettiselta tuntuva ongelma oli askarruttanut matemaatikkoja jo kymmenien vuosien ajan. Ja ehkä vielä se, että idean keksijä oli maallikkoharrastaja eikä ammattimatemaatikko.

Tiedeyhdistysten verkkolehdet ja varsinaiset tiedelehdet olivat vielä nopeampia kuin sanomalehdet. Tieteen ja teknologian uutissivusto Phys.org kertoi artikkelista jo kolmen päivän kuluttua [6]. Uutinen oli lyhyt ja sisälsi lyhyen yhteenvedon siitä, mitä tason laatoitus tarkoittaa; muuten viitattiin alkuperäiseen tiedeartikkeliin. Wolfram-yhteisö tarttui aiheeseen vajaassa viikossa. Keskustelussa [7] analysoitiin tarkasti laatan muoto ja laatoitusmahdollisuuksia [8].

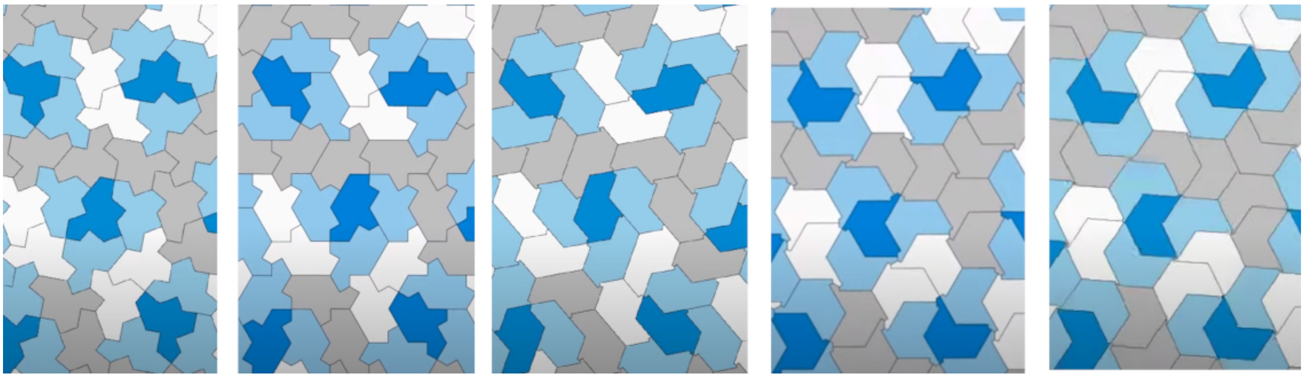
Smithin laatta – hattu – ei ole vain yksittäinen kiinteä geometrinen kuvio. Kuvion muotoa voidaan muuttaa jatkuvasti hatusta koveraksi kuusikulmioksi (kuva 3). IFLScience-uutissivuston artikkelin [9] mukaan ajatukselliset yhteydet ulottuvat myös puhtaan matematiikan ulkopuolelle. Esimerkiksi kvasikiteisten aineiden rakenteissa voidaan havaita samoja ominaisuuksia kuin jaksottomissa laatoituksissa. Samoilla ideoilla on sovelluksia myös käsipyyhkeiden kuvioinnista ja taittelusta häivehävittäjiin ja tieteiselokuvien muotoaan muuttaviin robotteihin.

Quanta Magazine kuvasi perusteellisesti sen, miten tason peitto rakentuu hattulaatasta (kuva 4) [11]. Hattu ei kuitenkaan ole ainoa mielikuva, jonka Smithin laatta saattaa herättää tiedelehden toimittajassa [12] tai twiittaajassa [13] (kuva 5).

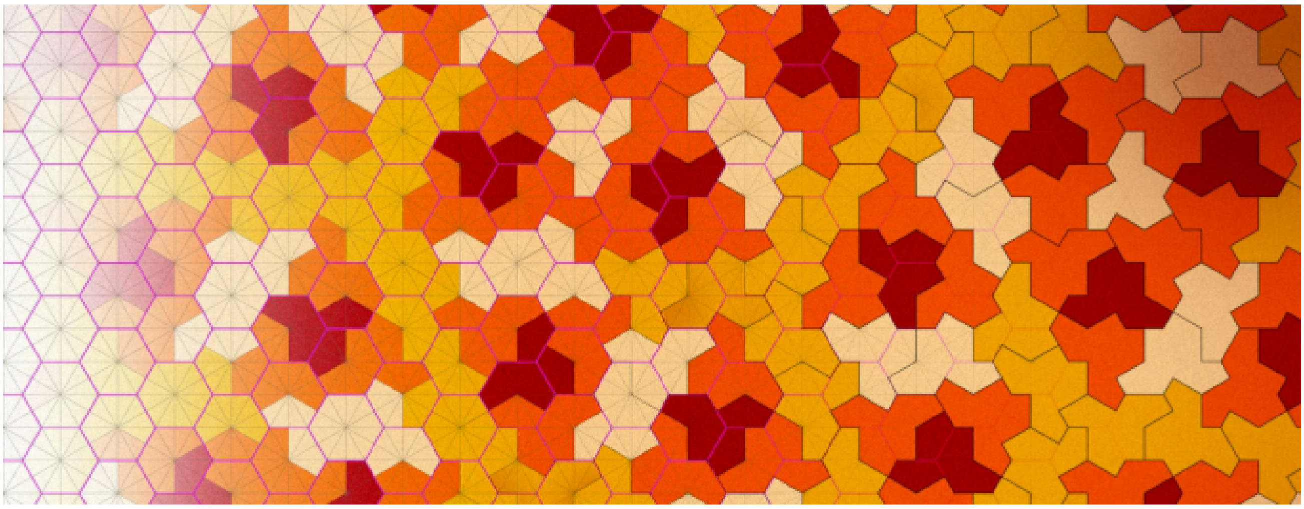




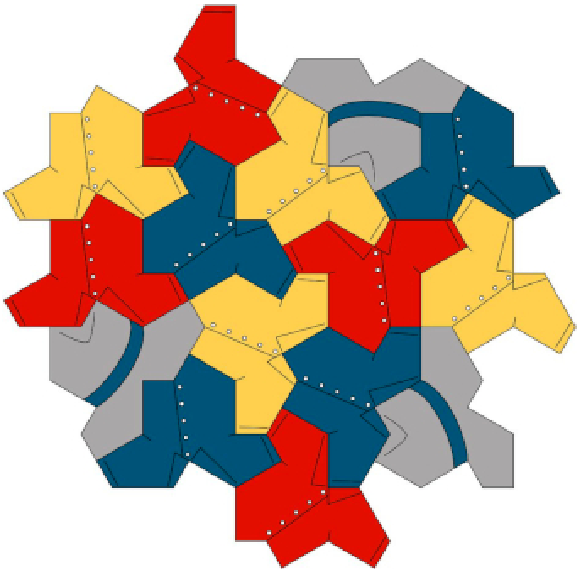
Kuva 2: Laatoitusta voidaan alkaa rakentaa hattulaatoista monella tavalla. Ylempi kuva kirjoittajan, alempi ote lähteestä [6].



Kuva 3: Vasemman osakuvan oikeassa ylänurkassa oleva sininen hattu muuttuu vähitellen oikeanpuoleisen osakuvan vastaavassa kohdassa olevaksi symmetriseksi kuusikulmioksi (kuvakaappauksia videosta [10]).



Kuva 4: Hattulaatoituksen pohjana voidaan nähdä kuusikulmioverkko.



Kuva 5: Smithin laatan voi kuvitella muuksikin kuin hatuksi (ylempi kuva Science News, alempi Twitter).

Lähteet ja lisää luettavaa

[1] Korhonen, Hannu (2022): *Yhden kiven laatoitus.* Solmu 2/2022 s. 4–6. Saatavissa myös `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2022/2/yhden_kiven_ongelma.pdf`

[2] Smith, David ym. (20.3.2023): *An Aperiodic Monotile.* Saatavissa osoitteesta `https://arxiv.org/pdf/2303.10798.pdf`

[3] Roberts, Siobhan: *Elusive 'einstein' solves a longstanding math problem.* New York Times Weekly 29.3.2023. `https://www.npr.org/2023/03/31/1167297046/a-hobbyist-in-the-u-k-has-come-up-with-a-new-13-sided-shape-called-the-hat`

[4] Cantor, Matthew: *The miracle that disrupts order': mathematicians invent new 'einstein' shape.* The Guardian 4.4.2023 osoitteessa `https://www.theguardian.com/science/2023/apr/03/new-einstein-shape-aperiodic-monotile`

[5] The Times: *Retired yorkshireman solves elusive einstein tile maths problem.* `https://www.thetimes.co.uk/article/retired-yorkshireman-solves-elusive-einstein-tile-maths-problem-vqw7xgt3p`

[6] Yirka, Bob: *A geometric shape that does not repeat itself when tiled.* Phys.org 23.3.2023. `https://phys.org/news/2023-03-geometric-tiled.html`

[7] Pegg, Ed (2023): *Einstein problem solved.* Wolfram Research osoitteessa `https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2856178`

[8] *Hat Tile App* osoitteessa
https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/app.html

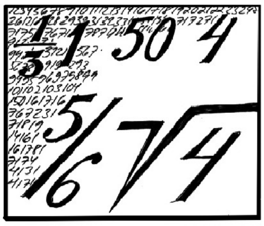
[9] Spalding, Katie: *This Brand New "Einstein"Tile Can Do Something No Other Shape Can Do.* IFLScience 28.3.2023
https://www.iflscience.com/this-brand-new-einstein-tile-can-do-something-no-other-shape-can-do-68201

[10] Science News, YouTube-video
https://www.youtube.com/watch?v=ugnvucpcfPA

[11] Erica Klarreich, Erica: *Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile*. Quanta magazine 4.4.2023.
https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404/

[12] Conover, Emily: *Mathematicians have finally discovered an elusive 'einstein' tile*. Science News 24.3.2023.
https://www.sciencenews.org/article/mathematicians-discovered-einstein-tile

[13] Kaplan, Craig S.: *Find another reflected turtle in an aperiodic tiling*. Twitter 21.3.2023.
https://twitter.com/alytile/status/1638506055381708801?s=20



Kummia summia

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Kaikkien lukujen summa

Solmun artikkeleissa [1] ja [2] tarkasteltiin käsitettä ”kaikkien luonnollisten lukujen summa”, jonka arvoksi pääteltiin erilaisten temppujen jälkeen $-1/12$. Aihetta käsitellään myös Wikipedian sivulla [3]. Tässä on selvästi jotakin epäilyttävää, mutta ainakin ongelmassa on se hyvä puoli, ettei tarvitse ottaa kantaa siihen, kuuluuko luku nolla luonnollisiin lukuihin, vai ei.

Seuraavassa esitetään vaihtoehtoinen ”päättely”, joka johtaa eri tulokseen, mutta en näe tässä varsinaista ristiriitaa. Tehtäviä lukuun ottamatta en ole tätä itse keksinyt, mutta luin helpoimman tapauksen jostakin epämääräisestä lähteestä, joka on päässyt unohtumaan. Ehkä se kuuluu matemaattiseen kansanperinteeseen?

Tarkastellaan siis kaikkien luonnollisten lukujen summaa

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

Ryhmitellään summan termit kolmen peräkkäisen luvun lohkoihin ja käytetään ominaisuutta

$$(3k - 1) + 3k + (3k + 1) = 9k.$$

Näin saadaan

$$\begin{aligned} S &= 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + (8 + 9 + 10) + \dots \\ &= 1 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots \\ &= 1 + 9(1 + 2 + 3 + \dots) \\ &= 1 + 9S. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $-8S = 1$, joten summan arvoksi saadaan $S = -1/8$.

Tehtävä 1. Osoita, että viiden peräkkäisen termin ryhmittelyllä saadaan sama tulos, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $5k$ oleva luku.

Tehtävä 2. Osoita, että seitsemän peräkkäisen termin ryhmittelyllä saadaan sama tulos, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $7k$ oleva luku.

Tehtävä 3. Selvitä, mitä tapahtuu yleisellä $(2n + 1)$:n peräkkäisen termin ryhmittelyllä, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $(2n + 1)k$ oleva luku.

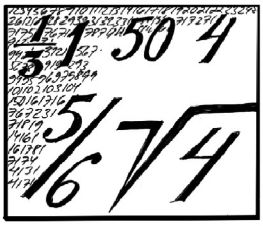
Kysymys: Mikähän on näiden laskujen opetus?

Viitteet

[1] Markku Sointu: Juuso äärettömän äärellä. Matematiikkalehti Solmu 1/2017. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/1/aareton.pdf`

[2] Markku Sointu: Juuson integraalikaava. Matematiikkalehti Solmu 3/2017. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/juuson_integraalikaava.pdf`

[3] `https://en.m.wikipedia.org/wiki/1_%2B_2_%2B_3_%2B_4_%2B_%E2%8B%AF`



Oppituntisuunnitelmia luvuista, yhtälöistä ja ongelmanratkaisusta

Neea Palojärvi
Tutkijatohtori ja yksi Integraalipäivien järjestäjistä, Helsingin yliopisto

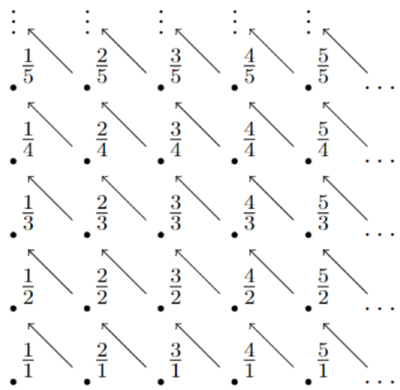
Onko hakusessa valmiita oppituntisuunnitelmia matematiikan tunneille tai matematiikkakerhoon? Integraalipäivien kotisivuilta löytyy opettajien, tutkijoiden ja opiskelijoiden yhdessä tekemiä oppituntisuunnitelmia* alakoulusta yliopistoon. Pääpaino on yläkoulun ja lukion oppitunneissa. Lähes kaikki suunnitelmat on julkaistu Nimeä 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä, eli niitä saa muun muassa jakaa ja muunnella, kunhan muistaa muun muassa nimetä lähteen (ks. lisätietoa lisenssistä viitteestä [3]).

Kuva 1: Oppituntien suunnittelua Integraalipäivillä.

Alla on esitelty kolme suunnitelmaa. Kaikki esiteltävät oppitunnit sisältävät yläkouluun suunnatun kokonaisuuden, kaksi viimeistä on suunnattu myös lukioon ja viimeinen edellisten lisäksi ammatilliseen koulutukseen.

Murtoluvuista ja äärettömästä

Merimies on kuollut ja perinnöksi on jäänyt aarrearkkuja (ks. [7]). Kun perintö yritetään jakaa vainajan toiveiden mukaisesti, se ei tunnu onnistuvan. Miten aarrearkut onnistutaan jakamaan testamentin määräämällä tavalla, kun mukaan lisätään yksi aarrearkku — ja lisätty arkku voidaan jaon jälkeen palauttaa takaisin? Entä kuinka suuri on mahdollisimman suuri lukua 1 pienempi reaaliluku? Tai kuinka "paljon" kokonaislukuja on rationaalilukuihin verrattuna?



Kuva 2: Oppitunnissa [2] oleva vihje kokonaislukujen ja rationaalilukujen määrään. Kuva on alunperin Anne-Maria Ernvall-Hytösen Integraalipäivien esityksestä "Transkendenttisuus ja irrationaalisuus" 23.4.2022.

*https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/oppituntisuunnitelmia/

Näitä kysymyksiä pohditaan oppitunnilla ”Kokonaisluvut ja murtoluvut” [2]. Oppitunti (45 min) on suunnattu peruskoulun 7. luokan oppilaille, oppitunnille tai matematiikkakerhoon. Tavoitteena on muun muassa, että oppilas ymmärtää oppitunnin jälkeen paremmin rationaalilukuja.

Vinkki: Kaipaisitko vielä haastavampaa materiaalia lukujen ominaisuuksista yläkoululaisten ylöspäin eriyttämiseen tai lukioon? Tutustu oppituntisuunnitelmaan ”Ketjumurtoluvut” [4].

Yhtälöitä ja yhtälöryhmiä

Toukolan tehtaalla kuuluu kummia: Raaka-aineiden kulutus on lähtenyt käsistä. Onko tehtaan tuotanto vain kasvanut vai onko yövartija käyttänyt aineksia salaa betoniporsaiden valmistukseen? Oppitunnissa ”Tonttutehdas lineaariyhtälöiden ratkaisussa” [5] selvitetään mysteeri lineaaristen yhtälöryhmän ratkaisemisen avulla!

$$\begin{cases} x + y + 2z = 130 \\ x + 2y + z = 150 \\ 2x + y + z = 140 \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän avulla selvitetään, onko yövartija ollut luvattomissa töissä betoniporsaiden parissa.

Lukion (pitkä tai lyhyt matematiikka tai matematiikkakerho, ainakin 75 min) oppitunnin tavoitteena on, että oppilas motivoituu lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisen opiskeluun, näkee ne tuoreesta näkökulmasta, oppii niiden avulla ongelmanratkaisua, selventää käsitystään yhtälönratkaisusta ja kehittää valmiutta yleisten yhtälöryhmien ratkaisumenetelmien opiskeluun. Oppitunti koostuu edellä mainitusta motivoinnista, yhtälöryhmien ratkaisumenetelmien esittelystä esimerkkeineen ja harjoitustehtävistä.

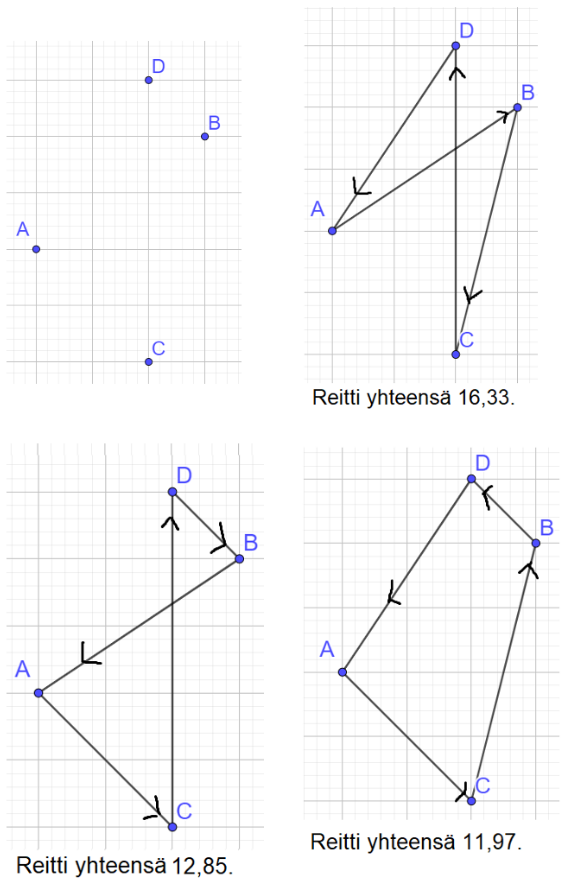
Oppituntisuunnitelma sisältää myös yksinkertaisemman yläkouluun suunnatun version, jossa tutkitaan kahden yhtälön yhtälöpareja. Motivointina toimii yövartijan toimien sijaan kysymys, kuinka paljon puutarhatonttuja ja -pukkeja annetuista aineksista voidaan valmistaa.

Vinkki: Mikäli yhtälönratkaisusta kaipaa ylöspäin eriyttävää materiaalia tai kerhomateriaalia oppilaille, joille 2×2-matriisien kertolasku ja transponointi ovat jo tuttua, niin kannattaa tutustua oppituntisuunnitelmaan ”Matriisit ja antennit” [6].

Toiminnallisia pisteitä ongelmanratkaisusta

Onko lukuvuoden loppuun hakusessa asteen verran toiminnallisempi matematiikan oppitunti? Oppituntisuunnitelmassa ”Vaikeat ongelmat, riittävän hyvän ratkaisun etsiminen, löytäminen ja hyväksyminen” on ratkaisu tähän!

Oppitunti (n. 75 min) koostuu opettajan alustuksesta aiheeseen, neljästä kiertopisteestä ja lopun yhteenvedosta. Oppimistavoitteena on muun muassa hahmottaa ongelmien ratkaisuavaruuksien suuruutta, tutkia strategioita ongelmien ratkaisemiseksi ja kehittää ongelmanratkaisutaitoja. Se on suunnattu yläkouluun, lukioon tai ammatilliseen oppilaitokseen, käsittelyn syvällisyys tapahtuu kohderyhmän mukaan. Materiaalissa on myös mukana diat alun johdantoon, pisteiden esittelyyn ja loppukoosteeseen.



Kuva 3: Oppitunnissa [8] tutkitaan muun muassa kauppamatkustajan ongelmaa. Kuva on suunnitelman dioista.

Vinkki: Olisiko hakusessa toiminnallisia elementtejä ja oppiainerajat ylittäviä kokonaisuuksia sisältävä oppitunti? Tutustu oppituntiin ”Tartuntatautien matematiikkaa” [1]!

Eikö vielä tärpännyt?

Eivätkö edelliset kuitenkaan olleet aivan sitä, mitä haettiin? Saattaisiko jostain muusta Integraalipäivillä kehitellystä oppituntisuunnitelmasta* olla apua? Tarjolla on esimerkiksi useampia oppiainerajat ylittäviä oppitunteja sekä oppituntisuunnitelmia matematiikkakerhoon.

Viitteet

[1] Viivi Aaltonen, Peppiina Laakso, Helena Konttinen & Mats Gyllenberg: ”Tartuntatautien matematiikkaa”, laadittu keväällä 2021, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/files/2022/02/Tartuntatautien-matematiikkaa.pdf

[2] Henri Anttila, Harriet Beaver, Leila Kokko & Riikka-Liisa Vaara: ”Oppitunnin suunnitelma: Kokonaisluvut ja murtoluvut”, laadittu keväällä 2022, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/files/2022/08/kokonaisluvut_murtoluvut.pdf

[3] Creative Commons: ”Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0)”, luettu 27.2.2023, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi

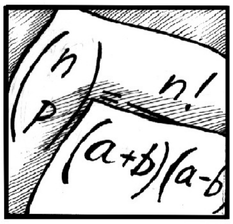
[4] Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Marko Hiltunen, Olga Kaliuta, Janina Kivimäki, Sari Pirkkalainen, Mikko Salminen & Erika Väänänen: ”Ketjumurtoluvut”, laadittu keväällä 2023, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/files/2023/02/ketjumurtoluvut.pdf

[5] Jimmy Finnholm, Lena Gers, Piia Haapsaari, Ossi Mauno, Alexander Oiling & Roope Vehkalahti: ”Tonttutehdas lineaariyhtälöiden ratkaisussa”, laadittu syksyllä 2022, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/files/2023/01/tonttutehdas.pdf

[6] Mats Gyllenberg, Sakari Salonen, Annina Jurvanen, Eeli Tamminen, Pirjo-Ritta Elo & Kerkko Luosto: ”Matriisit ja antennit”, laadittu syksyllä 2022, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/files/2022/12/matriisit_ja_antennit.pdf

[7] Neea Palojärvi: ”Aarrearkkujen jakoa”, Solmu 1/2018, 5–6, https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/1/merimies.pdf

[8] Tarja Ylivuori, Aleksi Karhu, Mats Gyllenberg & Havu Miikonen: ”Vaikeat ongelmat, riittävän hyvän ratkaisun etsiminen, löytäminen ja hyväksyminen”, laadittu syksyllä 2021, luettu 27.2.2023, https://blogs.helsinki.fi/integraalipaivat/oppituntisuunnitelmia/vaikeat_ongelmat/



Solmun 3/2022 tehtävien 1–10 ratkaisut

1. Osoita, että jos reaaliluvut x, y ja z toteuttavat yhtälön

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=1,$$

niin

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}=0.$$

Määritä jotkin ehdon toteuttavat reaaliluvut.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että $x+y+z=0$, jolloin $x+y=-z$, $x+z=-y$ ja $y+z=-z$. Tällöin osoitettavan tuloksen ehto on

$$1=\frac{x}{-x}+\frac{y}{-y}+\frac{z}{-z}=-1-1-1=-3,$$

mikä ei ole mahdollista. Näin ollen voidaan olettaa, että $x+y+z\neq 0$.

Kun osoitettavan tuloksen ehdon yhtälö

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=1$$

kerrotaan nyt puolittain luvulla $x+y+z$, niin saadaan ekvivalentti yhtälö

$$\begin{aligned}
&x+y+z\\
&=\frac{x^2+x(y+z)}{y+z}+\frac{y^2+y(x+z)}{x+z}+\frac{z^2+z(x+y)}{x+y}\\
&=\frac{x^2}{y+z}+x+\frac{y^2}{x+z}+y+\frac{z^2}{x+y}+z.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}=0,$$

mikä pitikin osoittaa.

Olkoon esimerkiksi $z=1$ ja $x+y=-\frac{1}{5}$, jolloin $y=-\frac{1}{5}-x$. Tällöin

$$\frac{x}{\frac{4}{5}-x}+\frac{-\frac{1}{5}-x}{1+x}+\frac{1}{-\frac{1}{5}}=1,$$

josta saadaan

$$50x^2+10x-31=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{63}}{10}.$$

Valitaan näistä suurempi, jolloin saadaan

$$y=-\frac{1}{5}-x=\frac{-1-\sqrt{63}}{10}.$$

Näin ollen on löydetty yksi ehdon toteuttava kolmikko

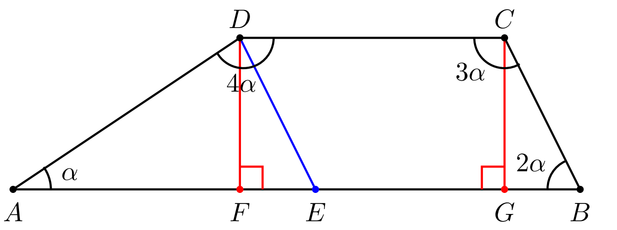
$$\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{63}}{10},\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{63}}{10},\\ z=1. \end{cases}$$

2. Opri kirjoitti 2022 luvun listan seuraavasti: Listan kolmas luku on toinen luku jaettuna ensimmäisellä luvulla, listan neljäs luku on kolmas luku jaettuna toisella luvulla, ja niin edelleen, esimerkiksi listan 100. luku on 99. luku jaettuna 98. luvulla. Mikä on Oprin listan viimeinen luku, jos sen ensimmäinen luku on 20 ja toinen luku on 22?

Ratkaisu. Oprin listan kolmas luku on $\frac{22}{20}=\frac{11}{10}$, neljäs luku on $\frac{11}{10}:22=\frac{1}{20}$, viides luku on $\frac{1}{20}:\frac{11}{10}=\frac{1}{22}$, kuudes luku on $\frac{1}{22}:\frac{1}{20}=\frac{10}{11}$, seitsemäs luku on $\frac{10}{11}:\frac{1}{22}=20$ ja kahdeksas luku on $20:\frac{10}{11}=22$. Nyt havaitaan, että seitsemäs luku on sama kuin listan ensimmäinen luku ja kahdeksas luku on sama kuin listan toinen luku. Näin ollen listan luvut toistuvat kuuden luvun jaksoissa. Koska $2022 = 6 \cdot 337$, niin listan 2022. luku on ensimmäisestä luvusta lähtien kuuden luvun jakson viimeinen luku eli $\frac{10}{11}$.

3. Nelikulmion $ABCD$ sivut AD ja DC ovat yhtä pitkät. Kulman DAB suuruus on α, kulman ABC suuruus on 2α, kulman BCD suuruus on 3α ja kulman CDA suuruus on 4α. Osoita, että sivu AB on kaksi kertaa niin pitkä kuin sivu AD.

Ratkaisu. Koska $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 10\alpha = 360°$, niin $\alpha = 36°$. Näin ollen nelikulmion kulmien suuruudet ovat 36°, 72°, 108° ja 144°. Kulmien suuruuksia ei tarvita tehtävän ratkaisussa, mutta ne auttavat alla olevan kuvan hahmottelemisessa.



Koska $5\alpha = 180°$, niin sivuille BC ja AD rajoittuvien nelikulmion kahden kulman summa on kummassakin tapauksessa 180°. Tästä seuraa, että nelikulmion sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset. Tämän voi perustella esim. piirtämällä pisteistä D ja C sivua AB vastaan kohtisuorat janat DF ja CG, ks. kuva. Tällöin päätyihin syntyneitä suorakulmaisia kolmioita AFD ja BGC tarkastelemalla nähdään, että janat CG ja DF ovat kohtisuorassa myös sivua DC vastaan.

Näin ollen nelikulmio $ABCD$ on puolisuunnikas. Sijoitetaan piste E sivulle AB niin, että sivut BC ja ED ovat yhdensuuntaiset. Tällöin nelikulmio $BCDE$ on suunnikas. Koska kulma $\angle EBC = 2\alpha$, niin myös $\angle AED = 2\alpha$ ja $\angle CDE = 2\alpha$. Näin ollen $\angle ADE = 4\alpha - 2\alpha = 2\alpha$. Tästä seuraa, että $AD = AE$. Koska $BCDE$ on suunnikas, niin $EB = DC$. Tehtävänannon mukaan $AD = DC$, joten $AE = AD = DC = EB$. Näin ollen $AB = AE + EB = 2AD$.

4. Olkoot x_1 ja x_2 yhtälön $15x^2 - 21x + 7 = 0$ reaalijuuret. Määritä lausekkeen

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

tarkka arvo.

Ratkaisu. Toisen asteen yhtälön diskriminantti on

$$(-21)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 7 = 21,$$

joten yhtälöllä on kaksi eri suurta reaalijuurta. Koska yhtälön vasemmalla puolella oleva vakio ei ole nolla, niin kumpikaan juurista x_1 ja x_2 ei ole nolla. Näin ollen kaikki määritettävässä lausekkeessa olevat murtoluvut on määritelty. Lasketaan juurten summa ja tulo Viéten kaavoilla:

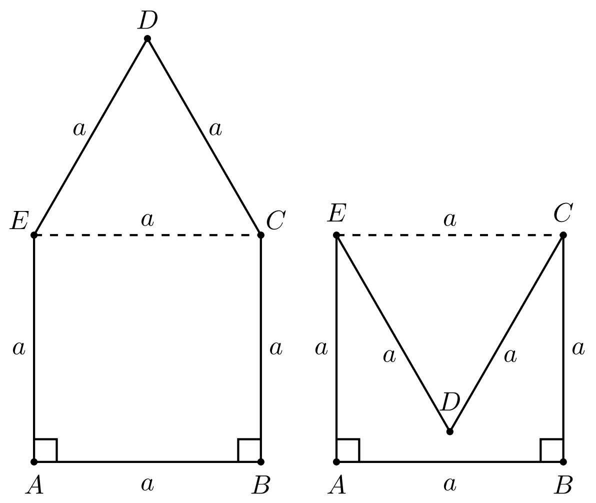
$$x_1 + x_2 = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{15}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + 1)}{x_1x_2} - 2 \\ &= \frac{\frac{7}{5} \cdot \frac{12}{5}}{\frac{7}{15}} - 2 = \frac{36}{5} - \frac{10}{5} = \frac{26}{5}.\end{aligned}$$

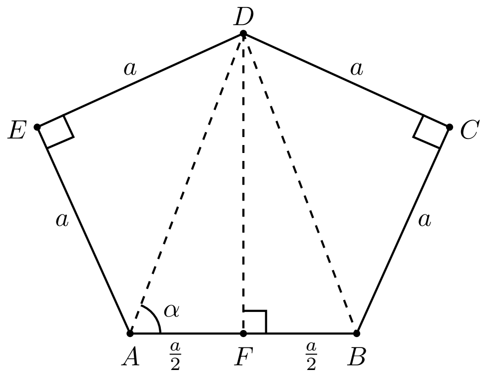
5. Viisikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaksi sen kulmista ovat suoria. Kuinka suuria muut kolme kulmaa voivat olla?

Ratkaisu. Merkitään viisikulmion sivujen pituutta a:lla ja sen kulmia A, B, C, D ja E, jolloin tarkasteltava viisikulmio on $ABCDE$. Alla olevassa kuvassa on kaksi mahdollista tapausta, jossa viisikulmion suorat kulmat ovat vierekkäin kulmissa A ja B.



Molemmissa tapauksissa $ABCE$ on neliö, joten $EC = a$. Näin ollen kolmio CDE on tasasivuinen ja sen kulmien suuruus on 60°. Vasemmanpuoleisessa viisikulmiossa $ABCDE$ tuntemattomien kulmien suuruudet ovat $\angle CDE = 60°$ ja $\angle BCD = \angle DEA = 90° + 60° = 150°$. Oikeanpuoleisessa viisikulmiossa $ABCDE$ huomataan, että $\angle BCD = \angle AED = 90° - 60° = 30°$. Lisäksi viides tuntematon kulma on $\angle CDE = 360° - 60° = 300°$.

Tasasivuinen viisikulmio $ABCDE$ voidaan muodostaa myös niin, että suorat kulmat eivät ole vierekkäin, kuten seuraavassa kuvassa on esitetty.



Kolmiot ADE ja BCD ovat tasakylkisiä ja suorakulmaisia, joten $AD = BD = a\sqrt{2}$ ja $\angle DAE = \angle ADE = \angle DBC = \angle BDC = 45°$. Merkitään $\alpha = \angle BAD = \angle ABD$. Tällöin

$$\cos\alpha = \frac{AF}{AD} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

joten $\alpha \approx 69{,}295°$ ja $\angle ADF = 90° - \alpha = 20{,}705°$. Näin ollen tuntemattomien kulmien suuruuksiksi saadaan $\angle BAD = \angle ABC = 45° + \alpha \approx 114{,}295°$ ja $\angle CDE = 2 \cdot 45° + 2 \cdot \angle ADF \approx 131{,}410°$.

Kaikissa edellä esitetyissä kolmessa tapauksessa on helppo tarkistaa, että viisikulmion kulmien summa on 540°, kuten pitääkin olla. Muita mahdollisia tapauksia ei ole, koska suorat kulmat ovat joko vierekkäisissä kulmissa tai niin, että niiden välissä on yksi kulma, jolloin toiseen suuntaan välissä on kaksi kulmaa.

6. Edel tekee puisia tikkuja, joiden pituus on kokonaisluku. Mitkään kolme tikkua eivät saa muodostaa kolmiota. Tikuissa on pituudeltaan 1 ja 10 olevat tikut ja pisimmän tikun pituus on 100. Kuinka monta tikkua Edel voi enintään tehdä?

Ratkaisu. Jotta kolmesta tikusta ei voi muodostaa kolmiota, on pisimmän tikun pituuden oltava vähintään kahden lyhemmän tikun pituuden summa. Näin ollen tikkuja saataisiin eniten, jos niiden pituudet olisivat 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Koska yhden tikun pituuden on kuitenkin oltava 10, niin pituudeltaan 8 oleva tikku on korvattava tikulla, jonka pituus on 10, sillä $3 + 5 < 10 < 5 + 8$. Näin ollen tikkujen pituudet voisivat olla 1, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 25, 40, 65, 105,... Koska pisimmän tikun pituuden on oltava 100, niin pituudeltaan 65 oleva tikku on korvattava tikulla, jonka pituus on 100, sillä $25 + 40 < 100 < 40 + 65$. Tikkujen pituudet voivat siis olla 1, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 25, 40, 100, ja Edel voi näin ollen tehdä enintään 10 tikkua.

7. Kahden kolminumeroisen luvun keskiarvo on luku, joka saadaan kirjoittamalla kyseiset luvut peräkkäin ja erottaen luvut desimaalipilkulla. Mitkä nämä kaksi lukua ovat?

Ratkaisu. Olkoot A ja B etsityt kolminumeroiset luvut ja merkitään ne peräkkäin kirjoitettuna ja desimaalipilkulla erotettuna $\overline{A{,}B}$. Tällöin

$$\frac{A+B}{2} = \overline{A{,}B} = A + \frac{B}{1000},$$

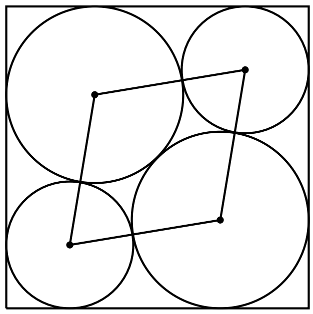
joten

$$A + B = 2A + \frac{B}{500}.$$

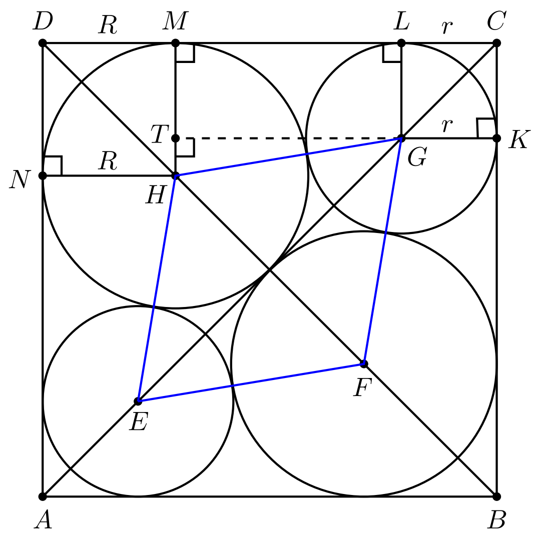
Koska $A+B$ ja $2A$ ovat kokonaislukuja, niin myös luvun $\frac{B}{500}$ on oltava kokonaisluku. Mutta koska B on kolminumeroinen, niin ainoa mahdollisuus on, että $B = 500$. Tällöin $A = B - 1 = 500 - 1 = 499$. Voidaan vielä tarkistaa, että

$$\frac{499 + 500}{2} = \frac{999}{2} = 499{,}500.$$

8. Yksikköneliön sisään piirretään neljä ympyrää kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Kaksi suurempaa ympyrää ovat samankokoiset ja samoin kaksi pienempää ympyrää ovat samankokoiset. Ympyrät sivuavat toisiaan ja neliön sivuja. Mikä on ympyröiden keskipisteet yhdistämällä muodostuvan vinoneliön pinta-ala?



Ratkaisu. Tarkastellaan alla olevassa kuvassa esitettyä tilannetta, jossa suurempien ympyröiden säde on R ja pienempien ympyröiden säde on r. Tehtävänannon perusteella $CD = CL + LM + MD = 1$.



Nelikulmio $CLGK$ on neliö, jonka sivun pituus on r, ja nelikulmio $DNHM$ on neliö, jonka sivun pituus on R. Nyt $HT = R - r$ ja $GH = r + R$, sillä janassa GH on pienen ja ison ympyrän säteet peräkkäin. Suorakulmaisesta kolmiosta GTH saadaan

$$(R + r)^2 = GT^2 + (R - r)^2,$$

joten $GT^2 = 4Rr$. Näin ollen $LM = GT = 2\sqrt{Rr}$ ja saadaan

$$1 = r + LM + R = r + 2\sqrt{Rr} + R = (\sqrt{r} + \sqrt{R})^2.$$

Koska $\sqrt{r} + \sqrt{R} > 0$, niin $\sqrt{r} + \sqrt{R} = 1$.

Lasketaan ensin säde R. Koska $BD = \sqrt{2}$, $BF = DH = \sqrt{2}R$ ja $FH = 2R$, niin

$$2R + 2\sqrt{2}R = \sqrt{2}$$

ja näin ollen

$$R = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nyt

$$\sqrt{r} = 1 - \sqrt{R} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

joten neliöön korottamalla saadaan

$$r = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Huomataan, että suunnikkaan $EFGH$ lävistäjien pituudet ovat $FH = 2R$ ja $EG = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}r$. Koska lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin suunnikkaan pinta-ala saadaan kaavalla

$$\begin{aligned}
\text{ala} &= \frac{FH \cdot EG}{2} = \frac{2R(\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r)}{2} = R(\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r) \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= 5 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{(2 - \sqrt{2})^3} \approx 0{,}2398.
\end{aligned}$$

9. Määritä kaikki positiiviset reaaliluvut x, joille $x + \frac{1}{x}$ on kokonaisluku ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ on alkuluku.

Ratkaisu. Kun $x + \frac{1}{x} = n$ on positiivinen kokonaisluku, niin myös sen neliö

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = n^2$$

on positiivinen kokonaisluku. Edelleen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$$

on positiivinen kokonaisluku, joten $n > 1$. Kertomalla nyt yhtälöt

$$x + \frac{1}{x} = n \quad \text{ja} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$$

puolittain keskenään saadaan

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = n^3 - 2n,$$

joten

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = n^3 - 3n = n(n^2 - 3),$$

joka on kahden positiivisen kokonaisluvun tulo. Se on alkuluku täsmälleen silloin, kun toinen tekijä on 1 ja toinen on alkuluku. Koska $n > 1$, niin on oltava $n^2 - 3 = 1$ eli $n = 2$. Näin ollen $x + \frac{1}{x} = 2$, joten $x = 1$.

10. Mitkä luvuista $1, \ldots, 50$ voidaan lausua vähintään kahden peräkkäisen ei-negatiivisen kokonaisluvun summana?

Ratkaisu. Kaikki parittomat positiiviset kokonaisluvut voidaan esittää kahden peräkkäisen ei-negatiivisen kokonaisluvun summana. Pariton luku jaettuna kahdella ei ole kokonaisluku, mutta kun lasketaan osamäärää edellinen ja seuraava kokonaisluku yhteen, saadaan tarkasteltavana oleva pariton luku:

$$1 = 0 + 1,\ 3 = 1 + 2,\ 5 = 2 + 3, \ldots,\ 49 = 24 + 25.$$

Toisaalta positiivisia parillisia lukuja ei voida esittää kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana, koska kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on aina pariton luku.

Tarkastellaan seuraavaksi positiivisia parillisia kokonaislukuja, joissa on tekijänä pariton positiivinen kokonaisluku $n \neq 1$. Tällöin tarkasteltava luku voidaan esittää tulona $m \cdot n$, missä m on positiivinen kokonaisluku. Asetetaan luvun toinen tekijä m summan keskimmäiseksi yhteenlaskettavaksi ja lisätään siihen vuorotellen m:ää pienempiä ja suurempia peräkkäisiä kokonaislukuja niin monta, että summaan tulee yhteensä n yhteenlaskettavaa lukua. Tällöin summaksi saadaan tarkasteltava luku. Esimerkiksi

$$42 = 7 \cdot 6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Huomataan, että koska m:ää pienempiä lukuja lisätään summaan $\frac{m-1}{2}$ kappaletta, niin kaikki summan luvut ovat positiivisia. Tällöin siis löydetään aina summaan vaadittavat peräkkäiset ei-negatiiviset kokonaisluvut.

Tarkastellaan sitten positiivisia parillisia kokonaislukuja, joilla ei ole tekijänä paritonta positiivista kokonaislukua $n \neq 1$. Tällöin kaikki tekijät ovat parillisia lukuja, jotka ovat luvun 2 potensseja 2^k, $k \in \mathbb{N}$. Tällaisia lukuja ei ole mahdollista esittää enemmän kuin kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana.

Perustellaan tämä tekemällä vastaoletus, että vähintään kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 2^k.

Oletetaan ensin, että yhteenlaskettavia lukuja on pariton määrä n. Tällöin summan keskimmäinen luku on yhteenlaskettavien lukujen keskiarvo, joten n on luvun 2^k tekijä. Tämä on ristiriita, koska luvulla 2^k on vain parillisia tekijöitä luvun 1 lisäksi.

Oletetaan sitten, että yhteenlaskettavia lukuja on parillinen määrä $2n$. Tällöin yhteenlaskettavien lukujen keskiarvo ei ole kokonaisluku vaan "puoliluku" $m+0{,}5$, $m \in \mathbb{N}$, jolloin

$$(m+0{,}5)\cdot 2n = 2^k \quad \text{eli} \quad (2m+1)\cdot 2n = 2^{k+1}.$$

Tämä on ristiriita, koska luku $2m+1$ on pariton, mutta luvulla 2^{k+1} ei ole parittomia tekijöitä.

Näin ollen lukuja 2, 4, 8, 16 ja 32 ei voida esittää vähintään kahden peräkkäisen ei-negatiivisen kokonaisluvun summana, mutta kaikki muut 45 lukua väliltä $1, \ldots, 50$ voidaan esittää.

Solmun 3/2022 tehtävien 11–20 ratkaisut julkaistaan seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja

Tottumuksen tyrannia ja koululaisen matemaattinen käsitteenmuodostus

Mikko Kotisaari
Matematiikan ja fysiikan aineenopettaja
mikko.kotisaari@edu.hel.fi

Jukka Liukkonen käsitteli mainiossa Suorakulmio-artikkelissaan[1] (Solmu 2/2022) matemaattisten käsitteiden, ennen kaikkea suoran kulman, nomenklatuuria ja tematiikkaa. Moni meistä opettajista havahtuu toisinaan vastaaviin harhaanjohtavuuden ja epätäsmällisyyden kiusalliselle alueelle kurottaviin käsitekyseenalaistuksiin, varsinkin vasta maahan muuttaneiden ja suomen kieltä opettelevien opettamisessa. He muodostavat mielissään käsitteitä ja opettelevat osin jo tuntemiensa kuvioiden suomenkielisiä nimiä. Muiden kielien tapaan suomen kielessä on tottakai vakiintuneita käytäntöjä, totuttuja sinne päin -ilmaisuja ja kenties alkuihmetyksen jälkeen muitta mutkitta hyväksyttyjä ristiriitojakin. Totta, kai, tottakai. Kuinka paljon sellaisia on silti hyväksyttävä matematiikan terminologiassa? Mikä muu tieteenala pyrkii samalla tinkimättömyydellä täsmällisyyteen?

Huomioni koskee tasogeometrian alkeita, joiden päälle rakennetaan avaruusgeometria. Nyt ei ole tarkoituskaan astua kauas kaareutuvien pintojen vinhaan viettelykseen, vaan viivähtää tovi koulun penkillä oppilaan näkökulmasta. Liukkosen artikkelissa mainittiin *neliön* kaksoismerkitys säännöllisenä nelikulmiona ja toisaalta neliömetrin lyhenteenä. Nämä merkitykset kuitenkin ovat käsitteenmuodostuksessa ilmeisen rinnasteisia ja järkeviä, onhan metri SI-järjestelmässä pituuden perusyksikkö. Kolmas, vähemmän ilmeinen merkitys neliölle on asunnon koko: neljä huonetta ja keittiö. Selvä, lasketaan siis huoneiden määrää: yksiö, kaksio, kolmio, neliö ja kenties arkikielessä harvinaisemmat viisiö, kuusio, seitsiö jne.

Tasogeometriassa ei tunneta yksiötä eikä kaksiota, mutta *kolmio* kyllä tunnetaan oikein hyvin: kolmikulmainen monikulmio. Useimmille oppilaille tämä onkin sanan ensimmäinen opittu merkitys. Tarkoittakoon vain vapaasti kolmio samalla kolmikulmaista monikulmiota sekä kolmihuoneista asuntoa; asiayhteys pelastaa.

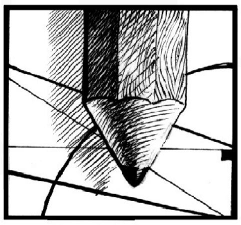
Missä sitten piilee manaamani matemaattis-terminologinen ongelma? Varhainen, lapsena tapahtunut käsitteenmuodostuksemme ja sen jälkeinen tottumuksen tyrannia ovat piilottaneet sen alleen. Kun seitsemäsluokkalainen alkaa opetella monikulmioita, ensimmäisenä hänelle esitellään yksinkertaisin eli kolmio. Kolmioita sitten piirretään ja luokitellaan tylppien, suorien ja terävien kulmien sekä sivujen tasamittaisuuden suhteen. Kolmion säännöllisenä erikoistapauksena opetellaan *tasasivuinen kolmio*. Jos tarina jatkuisikin *neliöihin*, mutta ei jatku. Se jatkuu *nelikulmioihin*, joista neliö on säännöllinen erikoistapaus. Tätä oppilaan voi kestää sulatella jonkun aikaa, jos asia on uusi eikä jo lapsuudesta tuttu. Millainen sitten olisi parempi nimistö?

[1] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2022/2/suorakulmio.pdf`

Monikulmion kulmien määrä	Nykyinen nimitys		Ehdotukseni	
	Yleinen muoto	**Säännöllinen muoto**	**Yleinen muoto**	**Säännöllinen muoto**
3	kolmio	tasasivuinen kolmio	kolmikulmio	kolmio
4	nelikulmio	neliö	nelikulmio	neliö
5	viisikulmio	säännöllinen viisikulmio	viisikulmio	viisiö
6	kuusikulmio	säännöllinen kuusikulmio/kuusio	kuusikulmio	kuusio
n	n-kulmio	säännöllinen n-kulmio	n-kulmio	säännöllinen n-kulmio/n:iö

Täsmällisyydellä on toki hintansa. Lukija kenties kakeltelee, kuinka kapulakieliseltä *kolmikulmio* kuulostaakaan. Vaan kuulostaako sittenkään? Pitkältä kenties kyllä. Entä alkusointu ja rytmi? Mikä nykyinen kolmiomme on muilla kielillä? Triangel (ruots.), triangle (engl.), Dreieck (saks.) – kolmikulmiohan se. Triangelista lisää musiikintunnilla. Suomen kielessä geometrista kuusiota käytetäänkin jonkin verran, esim. työkalussa *kuusiokoloavain*. Käytetäänkö jossain viisiötä?

Sikäli kun ehdotukseni on harkinnan arvoinen, herää kysymys, kuka tällaisen muutoksen voisi tehdä. Kotimaisten kielten keskus? Vai onko todella, Liukkosta mukaillen, geometrian luultavasti jumalallista alkuperää oleva nomenklatuuri asia, johon matemaatikkokaan ei pysty vaikuttamaan?



Ymmärryksen tuolla puolen

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.

— John von Neumann

Moniulotteinen maailma

Liitin tuon epigrafin artikkelin alkuun siksi, että en ymmärrä neliulotteista avaruutta, saati sitten useampiulotteista avaruutta. Kolmiulotteisen avaruuden luulen ymmärtäväni, mutta saatan olla Dunning-Kruger-efektin eli ylivertaisuusvinouman uhri. Kun kolme koordinaattiakselia laitetaan kohtisuoraan toisiaan vastaan, ja siihen pitäisi ängetä neljäs akseli, joka on kohtisuorassa kaikkia kolmea vastaan, niin en kyllä ymmärrä, mihin suuntaan se neljäs akseli sojottaa. Kuitenkin pääsin yliopistossa esimerkiksi matriisilaskennan kurssista läpi, vaikka siellä käsiteltiin lineaarisia kuvauksia m-ulotteiselta avaruudelta n-ulotteiseen avaruuteen, missä m ja n voivat olla miten suuria positiivisia kokonaislukuja tahansa. Jotain kummallista tässä matematiikassa on. Sen avulla pystytään tunkeutumaan ihmisen havaintomaailman ja käsityskyvynkin tuolle puolen. Lisäksi tuo tunkeutuminen on aika usein yhtä vaivatonta kuin omenoiden, banaanien ja appelsiinien jaottelu eri koreihin.

Tiesitkö muuten, että kaikki *solmut* [4] aukeavat neliulotteisessa avaruudessa? Tai oikeastaan ne ovat jo valmiiksi auki sellaisen tarkkailijan mielestä, joka ei ole sidottu kolmeen ulottuvuuteen. Tätä aihetta käsitellään artikkelin lopussa. Alkuosassa pohditaan eriulotteisten kappaleiden mittaamista.

Moniulotteisen kuution pinta-ala ja tilavuus

Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^3$ on pisteiden (x_1, x_2, x_3) joukko

$$\mathbb{R}^3 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Kun avaruuden ulottuvuuksien määrää kasvatetaan, jono (x_1, x_2, x_3) pitenee jonoksi $(x_1, \ldots, x_n)$, ja yleinen n-ulotteinen euklidinen avaruus on joukko

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \,\}.$$

Kahden pisteen $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $b = (b_1, \ldots, b_n)$ välinen etäisyys lasketaan Pythagoraan lauseen yleistyksen kautta kuten kolmiulotteisessa avaruudessa:

$$|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Pituudesta, pinta-alasta ja tilavuudesta käytetään yhteistä nimitystä *mitta* tai täsmällisemmin 1-mitta, 2-mitta ja 3-mitta. Useampiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ puhutaan n-mitasta. Esimerkiksi n-ulotteisen suorakulmaisen suuntaissärmiön

$$\{\, (x_1, \ldots, x_n) \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n \,\}$$

n-mitta on särmien pituuksien tulo

$$(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Muiden kappaleiden voidaan ajatella koostuvan pienenpienistä suorakulmaisista suuntaissärmiöistä. Tähän ajatukseen perustuu pinta-alan mittaaminen neliösenttimetreissä tai tilavuuden mittaaminen kuutiosenttimetreissä. Kun n-ulotteista kappaletta venytetään niin, että etäisyydet r-kertaistuvat, kappaleen n-mitta r^n-kertaistuu, sillä

$$\begin{aligned} &r(b_1-a_1)r(b_2-a_2)\dots r(b_n-a_n)\\ &\quad = r^n(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n). \end{aligned}$$

Moniulotteisen avaruuden olioita nimitetään *hyperolioiksi*: esimerkiksi n-ulotteisen avaruuden n-ulotteinen kuutio on *hyperkuutio* [2], kolmiulotteisessa avaruudessa leijuvaa kaksiulotteista tasoa vastaa n-ulotteisen avaruuden $(n-1)$-ulotteinen *hypertaso* [3] jne. Origokeskisen hyperkuution

$$C_r^n = \{\,(x_1,\dots,x_n) \bigm| -r \le x_1 \le r, \dots, -r \le x_n \le r\,\}$$

n-mitta eli hypertilavuus $V(C_r^n)$ ja hyperpinta-ala $A(C_r^n)$ ovat

$$V(C_r^n) = (2r)^n \ \text{ ja } \ A(C_r^n) = 2n(2r)^{n-1},$$

sillä hyperkuutiolla on jokaista koordinaattiakselia kohti kaksi $(n-1)$-ulotteista hyperkuutiosivutahkoa, joista kummankin $(n-1)$-mitta on $V(C_r^{n-1}) = (2r)^{n-1}$. Hyperkuution lävistäjän pituus on

$$d(C_r^n) = \sqrt{n(2r)^2} = 2r\sqrt{n}.$$

Origokeskiselle yksikköhyperkuutiolle $r = 1/2$, ja

$$V(C_{1/2}^n) = 1, \ \ A(C_{1/2}^n) = 2n \ \text{ ja } \ d(C_{1/2}^n) = \sqrt{n}.$$

Huomaa, että yksikköhyperkuution hypertilavuus säilyy vakiona, mutta hyperpinta-ala ja läpimitta kasvavat rajatta, kun avaruuden dimensio n kasvaa rajatta. Jatkossa puhutaan kuutioista, pinta-aloista, tilavuuksista jne. silloinkin, kun ulottuvuuksia on enemmän kuin kolme. Ulottuvuuksien määrä ilmenee asiayhteydestä.

Moniulotteinen pallo ja kuula

Pallolla tai $(n-1)$-*pallolla* [5] tarkoitetaan tässä artikkelissa n-ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistejoukkoa

$$S_r^{n-1} = \{\,(x_1,\dots,x_n) \bigm| x_1^2+\dots+x_n^2 = r^2\,\}.$$

Sen pisteet sijaitsevat tasan *säteen* r päässä origosta. Pallo käsittää siis pelkän $(n-1)$-ulotteisen pallonkuoren. Kun siihen yhdistetään kuoren sisäpuolelle jäävät pisteet, saadaan *kuula* eli n-*kuula*

$$B_r^n = \{\,(x_1,\dots,x_n) \bigm| x_1^2+\dots+x_n^2 \le r\,\}.$$

Pallon $(n-1)$-mittaa $A(S_r^{n-1})$ sanotaan pallon pinta-alaksi, ja kuulan n-mittaa $V(B_r^n)$ kuulan tilavuudeksi. Yksikköpallon tapauksessa pinta-alaa ja tilavuutta merkitään

$$A_{n-1} = A(S_1^{n-1}) \ \text{ ja } \ V_n = V(B_1^n).$$

Ne skaalautuvat r-säteisen pallon pinta-alaksi ja kuulan tilavuudeksi:

$$A(S_r^{n-1}) = r^{n-1}A_{n-1} \ \text{ ja } \ V(B_r^n) = r^n V_n\,.$$

Kuulan kuorimalli

Tilavuuden laskemiseksi kuulan ajatellaan koostuvan sisäkkäisistä pallonkuorista kuin sipuli. Säteen pituuden lisäystä Δr vastaa tilavuuden lisäys

$$\Delta V(B_r^n) \approx A(S_r^{n-1})\,\Delta r,$$

joka on pallon pinta-ala kerrottuna pallonkuoren paksuudella. Kun säteen lisäys on hyvin pieni ja lähestyy nollaa, perinteisen havainnollisen ajattelutavan mukaan äärettömän pienille eli infinitesimaalisille erotuksille tai differentiaaleille

$$\mathrm{d}r = \lim_{\Delta r\to 0} \Delta r \ \text{ ja } \ \mathrm{d}V(B_r^n) = \lim_{\Delta r\to 0} \Delta V(B_r^n)$$

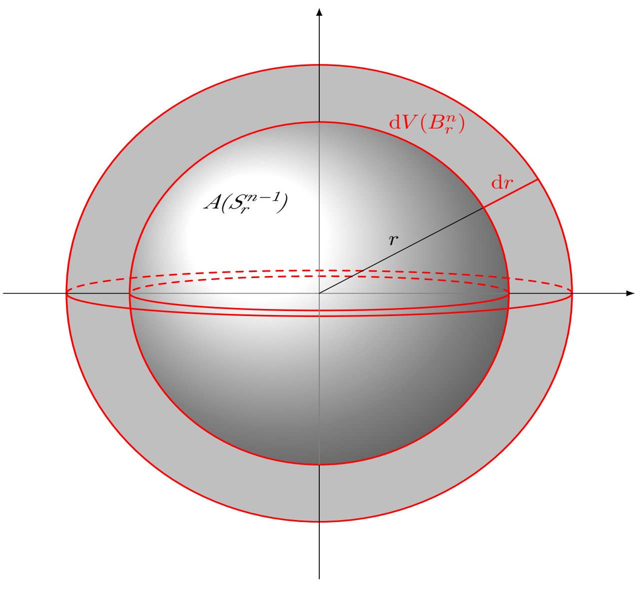
saadaan tarkka yhtälö

$$\mathrm{d}V(B_r^n) = A(S_r^{n-1})\,\mathrm{d}r.$$

Tämä on tietysti löysää puhetta, mutta se johtaa päteviin yhtälöihin

$$\lim_{\Delta r\to 0} \frac{\Delta V(B_r^n)}{\Delta r} = \frac{\mathrm{d}V(B_r^n)}{\mathrm{d}r} = A(S_r^{n-1}),$$

joilla on täsmällinen merkitys: pinta-ala on tilavuuden erotusosamäärän raja-arvo, toisin sanoen derivaatta.



Kuva 1. Kuula origokeskisten pallonkuorien yhdisteenä. Kuulan tilavuus saadaan summaamalla eli integroimalla ohuiden pallonkuorien tilavuudet.

Muutoksen mallintaminen differentiaalien avulla on paljon käytetty ja tehokkaaksi havaittu menetelmä erilaisten kaavojen ja yhtälöiden johtamiseen. Muodollisesta yhtälöstä $\mathrm{d}V(B_r^n) = A(S_r^{n-1})\,\mathrm{d}r$ päästään mukavasti integraaliyhtälöön

$$\int_0^R \mathrm{d}V(B_r^n) = \int_0^R A(S_r^{n-1})\mathrm{d}r,$$

toisin kirjoitettuna ja laskettuna

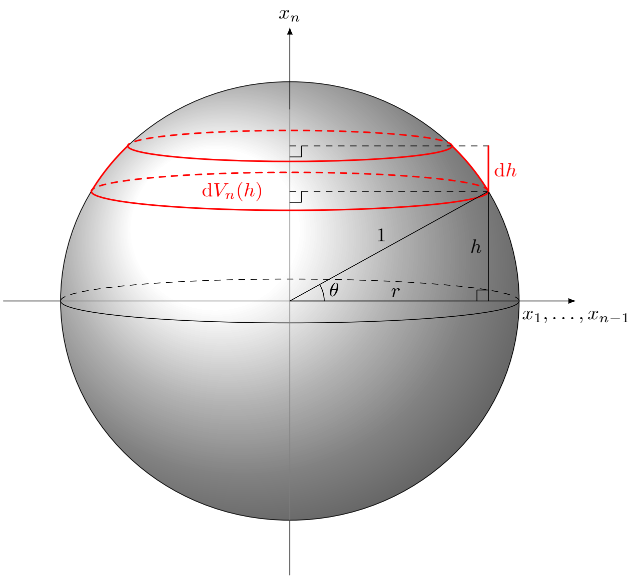
$$V(B_R^n) = A_{n-1}\int_0^R r^{n-1}\mathrm{d}r = \frac{A_{n-1}}{n}\Big/_0^R r^n = \frac{A_{n-1}}{n}R^n.$$

Erityisesti

$$\boxed{V_n = \frac{A_{n-1}}{n}\,.}$$

Kuulan siivumalli

Tilavuuksien V_n ja V_{n-1} välille saadaan yhteys, kun kuula siivutetaan ohuiksi siivuiksi x_n-akselia vastaan kohtisuorassa suunnassa kuvan mukaisesti.



Kuva 2. Siivutetun kuulan tilavuus saadaan summaamalla ohuiden siivujen tilavuudet.

Korkeuden h muutosta $\mathrm{d}h$ vastaava tilavuuden muutos on siivun pinta-alan ja paksuuden tulo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_n(h) &= V(B_r^{n-1})\,\mathrm{d}h = r^{n-1}V_{n-1}\,\mathrm{d}h\\ &= V_{n-1}\cos^{n-1}\theta\,\mathrm{d}\sin\theta\\ &= V_{n-1}\cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

missä $h = \sin\theta$, $r = \cos\theta$ ja yleisesti $\mathrm{d}f(\theta) = f'(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Siivun pinta-alalla tarkoitetaan $(n-1)$-ulotteisen kuulan $(n-1)$-mittaa. Integroimalla saadaan

$$\begin{aligned}V_n &= 2\int_0^1 \mathrm{d}V_n(h) = 2V_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= V_{n-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = V_{n-1}I_n\,,\end{aligned}$$

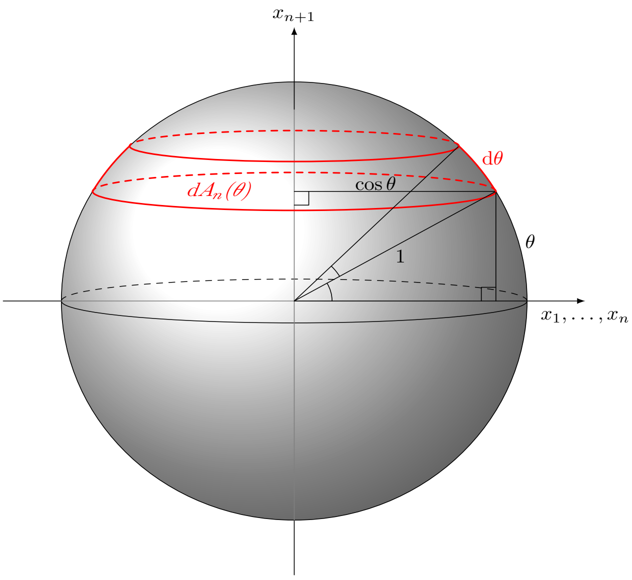
missä on merkitty $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Erityisesti $I_0 = \pi$ ja $I_1 = 2$. Siis

$$\boxed{V_n = V_{n-1}I_n\,, \qquad I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta.}$$

Pallon siivumalli

Pallon pinta-ala voidaan laskea siivuttamalla samaan tapaan kuin tilavuuskin. Pinta-alojen A_n ja A_{n-1} välinen yhteys saadaan integroimalla yhtälöstä

$$\mathrm{d}A_n(\theta) = A(S_{\cos\theta}^{n-1})\,\mathrm{d}\theta = A_{n-1}\cos^{n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$



Kuva 3. Siivutetun pallon pinta-ala on summa suikaleiden pinta-aloista. Suikaleen pinta-ala on sen pituuden ja leveyden tulo. Pituus tarkoittaa tässä $(n-1)$-ulotteisen pallon $(n-1)$-mittaa.

Toisin sanoen

$$A_n = A_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

$$\boxed{A_n = A_{n-1} I_{n-1}\,.}$$

Kosinin potenssin integraali

Kehystetyistä kaavoista saadaan palautuskaava, josta integraalin I_n arvot voidaan laskea:

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{V_{n+1}}{V_n}\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{n}{n+1}\frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{n}{n+1}\,.$$

Täten parillisilla n

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{n}{n+1} I_{n-1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(n+1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot 2, \end{aligned}$$

ja parittomilla n

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{n}{n+1} I_{n-1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{n\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot \pi. \end{aligned}$$

Matemaattisten laskelmien ja päätelmien tekemistä voidaan verrata löytöretkeilyyn. Edellä esitetty kosinin potenssin integrointikaavan johto hyperpallojen ja -kuulien avulla muistuttaa purjehdusta Helsingistä Tallinnaan Kap Hornin kautta. Perille päästiin kuitenkin. Puoli vuosituhatta sitten eräs purjehtija lähti etsimään Intiaa, mutta päätyi Amerikkaan. Myös matemaattisella matkalla löydetään kaikkea mielenkiintoista, eikä aina sitä, mitä alun perin oli tarkoitus. Nyt kävi onnekkaasti.

Tehtävä 1. Johda palautuskaava $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ osittaisintegroimalla.

Tehtävä 2. Johda hyperoktaedrin

$$O_r^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; |x_1| + \ldots + |x_n| \le r \right\}$$

tilavuuden lauseke. *Vihje*: Viipaloimalla saat palautuskaavan, jossa $V(O_1^n)$ lausutaan tilavuuden $V(O_1^{n-1})$ avulla.

Gamma-funktio

Pallojen ja kuulien mittaamisessa on edistytty palautuskaavojen tasolle, mutta lopullisten laskentakaavojen aikaansaamiseksi pitää vielä tehdä töitä. Sitä varten määritellään kertomafunktiota $\ell \mapsto (\ell-1)!$ muistuttava *gammafunktio*

$$\Gamma : \left\{ \tfrac{k}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\ k > 0 \right\} \to \mathbb{R},$$

$$\Gamma\left(\tfrac{k}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\pi} &, \ k = 1\,, \\ 1 &, \ k = 2\,, \\ \left(\frac{k}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2} - 1\right), & k > 2\,. \end{cases}$$

Olkoon k parillinen. Kun palautuskaavaa (alin vaihtoehto) sovelletaan $k/2$ kertaa, saadaan yhtälö

$$\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{k}{2}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\Gamma(1),$$

josta ratkeaa

$$k\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2 = \frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right).$$

Parittomilla k sovelletaan palautuskaavaa $(k+1)/2$ kertaa, mikä johtaa yhtälöön

$$\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{k}{2}\cdot\frac{k-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Siitä ratkaistaan

$$k\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1 = \frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right).$$

Parillisilla n on täten

$$I_{n+1} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\cdot 2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sqrt{\pi}\,.$$

Parittomilla n pätee

$$I_{n+1} = \frac{\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\cdot\pi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\sqrt{\pi}\,.$$

Yllättäen saatiin samannäköinen tulos parillisilla ja parittomilla n. Kun n korvataan erotuksella $n-1$, saadaan yleinen kaava

$$\boxed{I_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\sqrt{\pi}\,.}$$

On vaivatonta tarkistaa, että se pätee myös tapauksissa $n = 0$ ja $n = 1$.

Huomautus. Erillisissä pisteissä $k/2$, missä k on positiivinen kokonaisluku, määritelty funktio Γ voidaan laajentaa kompleksimuuttujan kompleksiarvoiseksi (meromorfi)funktioksi

$$\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \Gamma(z).$$

Tällöin puhutaan *Eulerin gammafunktiosta* [1]. Sen rajoittumana saadaan jatkuva funktio

$$\Gamma :]0, \infty[\to \mathbb{R},$$

jolle $\Gamma(\ell) = (\ell-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (\ell-1)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla ℓ.

Pallon pinta-ala ja kuulan tilavuus

Palautuskaavaa toistamalla saadaan pallon pinta-alaksi

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1}I_{n-1} = A_{n-2}I_{n-2}I_{n-1} = \ldots \\ &= A_1 I_1 \ldots I_{n-2}I_{n-1} = 2\pi I_1 \ldots I_{n-2}I_{n-1}. \end{aligned}$$

Tulolla $I_1 \ldots I_{n-1}$ on lauseke

$$\begin{aligned} I_1 \ldots I_{n-1} &= \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Siis

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \qquad A_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

ja edelleen

$$V_n = \frac{A_{n-1}}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

$$\boxed{V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad A_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.}$$

Oheen on taulukoitu avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallojen pinta-alat A_{n-1}, yksikkökuulien tilavuudet V_n ja suhteet V_n/A_{n-1} dimensioissa $n = 1, \ldots, 20$. Pallon pinta-ala on suurimmillaan, kun $n = 7$. Kuulan tilavuus on suurimmillaan, kun $n = 5$. Miettikääpä tätä! Onko edes järkevää vertailla eriulotteisia mittoja?

n	A_{n-1}	V_n	V_n/A_{n-1}
1	2,000000	2,000000	1,000000
2	6,283185	3,141593	0,500000
3	12,566371	4,188790	0,333333
4	19,739209	4,934802	0,250000
5	26,318945	5,263789	0,200000
6	31,006277	5,167713	0,166667
7	33,073362	4,724766	0,142857
8	32,469697	4,058712	0,125000
9	29,686580	3,298509	0,111111
10	25,501640	2,550164	0,100000
11	20,725143	1,884104	0,090909
12	16,023153	1,335263	0,083333
13	11,838174	0,910629	0,076923
14	8,389703	0,599265	0,071429
15	5,721649	0,381443	0,066667
16	3,765290	0,235331	0,062500
17	2,396679	0,140981	0,058824
18	1,478626	0,082146	0,055556
19	0,885810	0,046622	0,052632
20	0,516138	0,025807	0,050000

Kun $n = 50$, on $A_{n-1} \approx 8{,}651096 \cdot 10^{-12}$, $V_n \approx 1{,}73021910^{-13}$ ja $V_n/A_{n-1} = 0{,}02$.

Tehtävä 3. Osoita, että

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = 0, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} V_n = 0,$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{A_{n-1}} = 0.$$

Onko tässä jotain outoa? Aikaisemminhan todettiin, että yksikköhyperkuution tilavuus on dimensiosta riippumatta aina 1, ja sen pinta-ala kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$?

Tehtävä 4. Kertoma $\{0, 1, 2, \ldots\} \to \mathbb{R}$, $\ell \mapsto \ell\,!$, voitaisiin laajentaa funktioksi $[0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x!$, määrittelemällä

$$x! = \begin{cases} x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x - k_x), & x > 0, \\ \quad 1 & , \; x = 0, \end{cases}$$

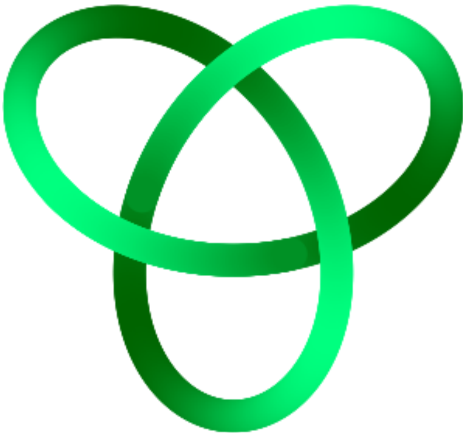
missä

$$k_x = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \mid x - k > 0 \,\}.$$

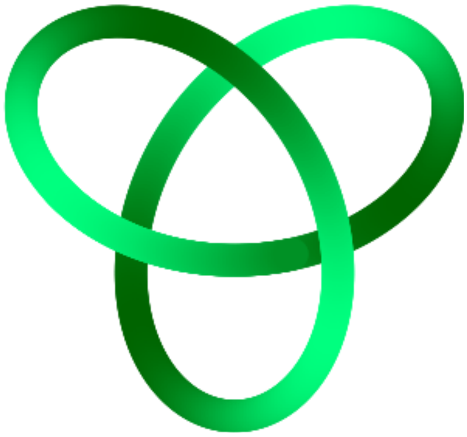
Tutki funktion $x \mapsto x!$ jatkuvuusominaisuuksia. Onko $x! = \Gamma(x+1)$?

Miksi solmut aukeavat?

Ohessa on kuva apilasolmusta (engl. *trefoil knot*). Siinä yksiulotteinen (joskin lihavoitu), näennäisesti kolmiulotteisessa avaruudessa kiemurteleva käyrä on projisoitu kaksiulotteiselle Solmu-lehden sivulle. Tuo lihava sulkeutuva käyrä todellakin näyttää solmulta meidän kolmiulotteiseen avaruuteen vangittujen kolmiulotteisten tarkkailijoiden näkökulmasta.



Kuva 4. Apilasolmu neliulotteisessa avaruudessa. Värin tummuus ilmoittaa neljännen koordinaatin x_4 arvon.



Kuva 5. Apilasolmu "avattuna" x_4-akselia vastaan kohtisuoran kolmiulotteisen hypertason suunnassa.

Neliulotteisessa avaruudessa vapaasti leijaileva tarkkailija tietää, että kyseessä ei ole solmu, vaikka sen projektio kolmiulotteiseen avaruuteen näyttää solmulta, ja projektio kaksiulotteiselle tasolle näyttää solmun kuvalta. Itse asiassa neljäs ulottuvuus on näkyvillä, se on koodattu käyrän väriin. Kuvassa on kolme näennäistä risteyskohtaa, jotka eivät oikeasti ole risteyskohtia edes kolmiulotteisessa avaruudessa. Neliulotteisessa avaruudessa "solmu" voidaan "aukaista" vetämällä ylimmän risteyskohdan taaempi eli tummempi käyränosa vaaleamman käyränosan eteen lähemmäksi katsojaa. Käyrä ei missään vetämisen vaiheessa leikkaa itseään silloinkaan, kun projektio kolmiulotteisessa avaruudessa näyttää leikkaavan itsensä, sillä käyrän neljäs koordinaatti x_4 on erisuuri tummalla osuudella ja vaalealla osuudella. Oikealla on kuva "avatusta solmusta". Kokeile tätä kotona! Saksien avulla saat tuntumaa neljänteen ulottuvuuteen.

Toinen vaihtoehto on vaan odotella. Minulla on pöydälläni apilasolmu rautalangasta taivuteltuna ja sulkeutuvaksi tinalla juotettuna. Juotos pitää, se ei ole kylmäjuotos! Joka aamu tarkastan solmun siltä varalta, että se olisi auennut. Aika nimittäin on suhteellisuusteorian neljäs ulottuvuus. Einsteinin mukaan emme olekaan kolmen ulottuvuuden vankeja, vaan liikumme alati neljännessä ulottuvuudessa, ja myös apilasolmu liikkuu. En hämmästyisi lainkaan, jos solmu jonain aamuna aukeaisi, kuin apilan lehti kasteisella niityllä, aamun ensi säteen sitä hellästi hipaistessa.

Viitteet

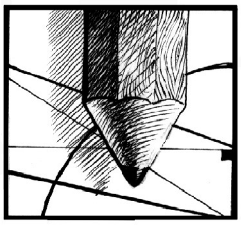
[1] Wikipedia: *Gamma function.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function`

[2] Wikipedia: *Hypercube.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Hypercube`

[3] Wikipedia: *Hyperplane.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane`

[4] Wikipedia: *Knot theory.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory`

[5] Wikipedia: *n-sphere.* `https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere`



Köysi maaneliön ympäri

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Helsingin yliopisto

Eräässä klassisessa geometrian tehtävässä pohditaan köyden kiertämistä maapallon ympäri. Kysymyksen voisi muotoilla esimerkiksi seuraavasti: *Kierretään maapallon ympäri köysi. Kierretään sitten toinen köysi metrin korkeudelle maanpinnasta. Kuinka paljon pidempi jälkimmäisen köyden pitää olla kuin ensimmäisen?*

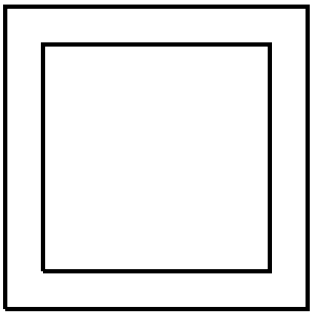
Tehtävä on varsin suoraviivainen ratkaista: Jos maapallon säde on r, niin ensimmäisessä tapauksessa tarvitaan $2\pi r$ köyttä ja toisessa $2\pi(r+1)$ köyttä, eli erotus on $2\pi(r+1) - 2\pi r = 2\pi$. Runsas 6 metriä siis riittää.

Vastausta on usein pidetty epäintuitiivisena. Kuulemma yliopistojen päivystävät dosentitkin ovat joutuneet asiaa puhelimessa selittämään ja vedonlyöntejä kysymykseen liittyen ratkaisemaan.

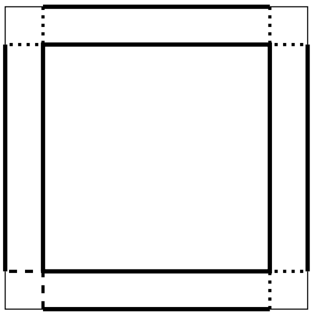
Onko tämä lopulta niin yllättävä tulos?

Ensimmäisenä ajatuksena tulee mieleen, että jos rakentaisi metrin korkuisen aidan Helsingistä Turkuun, niin järki sanoisi, että aidan huipulla ei tarvittaisi valtavasti enemmän puutavaraa kuin aidan juurella. Toisaalta voi myös argumentoida, että Helsingistä Turkuun on aika lyhyt matka maapallon mittakaavassa, joten vaikka ero olisi tosi pieni tällä välillä, niin koko maapallon kierrossa se voisi kasvaa aika pitkäksi.

Helpompaa onkin ehkä miettiä, mitä tapahtuisi, jos maapallon läpileikkaus olisi neliö, eikä ympyrä. Voidaan yksinkertaisuuden vuoksi ajatella, että neliön ympäri vedettäisiin köysi niin, että neliön sivuilla sen etäisyys olisi yksi metri pinnasta, mutta kulmat jatkettaisiin niin, että muodostuisi isompi neliö. Piirretään tilanteesta kuva. Kuvassa mittakaava on pielessä:



Verrataan nyt neliöiden piirien pituuksia. Huomataan, että isomman neliön jokainen sivu muodostuu osasta, joka on yhtä pitkä kuin pienemmän neliön sivu ja lisäksi jokaisessa kulmassa ylimääräisestä metrin palasta. Tätä voi havainnollistaa seuraavalla kuvalla:



Nyt on helppo nähdä, että piirien erotus muodostuu vain kulmista, eli tässä tilanteessa ero olisi 8 metriä.

Solmu 1/2023

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Kansikuva:

Noora Isoeskeli

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 2/2023 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 10.9.2023 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI