



Kummia summia

Pekka Alestalo

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Kaikkien lukujen summa

Solmun artikkeleissa [1] ja [2] tarkasteltiin käsitettä ”kaikkien luonnollisten lukujen summa”, jonka arvoksi pääteltiin erilaisten temppujen jälkeen $-1/12$. Aiheita käsitellään myös Wikipedian sivulla [3]. Tässä on selvästi jotakin epäilyttävää, mutta ainakin ongelmas-
sa on se hyvä puoli, ettei tarvitse ottaa kantaa siihen, kuuluuko luku nolla luonnollisiin lukuihin, vai ei.

Seuraavassa esitetään vaihtoehtoinen ”päätely”, joka johtaa eri tulokseen, mutta en näe tässä varsinaista riskiä. Tehtäviä lukuun ottamatta en ole tätä itse keksinyt, mutta luin helpoimman tapauksen jostakin epä-
määräisestä lähteestä, joka on päässyt unohtumaan. Ehkä se kuuluu matemaattiseen kansanperinteeseen?

Tarkastellaan siis kaikkien luonnollisten lukujen summaa

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

Ryhmitellään summan termit kolmen peräkkäisen luvun lohkoihin ja käytetään ominaisuutta

$$(3k - 1) + 3k + (3k + 1) = 9k.$$

Näin saadaan

$$\begin{aligned} S &= 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + (8 + 9 + 10) + \dots \\ &= 1 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + \dots \\ &= 1 + 9(1 + 2 + 3 + \dots) \\ &= 1 + 9S. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $-8S = 1$, joten summan arvoksi saadaan $S = -1/8$.

Tehtävä 1. Osoita, että viiden peräkkäisen termin ryhmittelyllä saadaan sama tulos, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $5k$ oleva luku.

Tehtävä 2. Osoita, että seitsemän peräkkäisen termin ryhmittelyllä saadaan sama tulos, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $7k$ oleva luku.

Tehtävä 3. Selvitä, mitä tapahtuu yleisellä $(2n + 1)$:n peräkkäisen termin ryhmittelyllä, kun jokaisen lohkon keskellä on muotoa $(2n + 1)k$ oleva luku.

Kysymys: Mikähän on näiden laskujen opetus?

Viitteet

- [1] Markku Sointu: Juuso äärettömän äärellä. Matematiikkalehti Solmu 1/2017. <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/1/aareton.pdf>
- [2] Markku Sointu: Juuson integraalikaava. Matematiikkalehti Solmu 3/2017. https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/juuson_integraalikaava.pdf
- [3] https://en.m.wikipedia.org/wiki/1_%2B_2_%2B_3_%2B_4_%2B_%E2%8B%AF