NELIKULMIOIDEN MINIMALISTINEN JA TOIMINNALLINEN KONSTRUOINTI JANOJA RISTEYTTÄMÄLLÄ

Jaska Poranen

Hyvien toiminnallisten työmuotojen ideointi ja toteuttaminen matematiikassa vaatii opettajalta kunnollista perehtymistä jo olemassa oleviin määritelmiin sekä myös kykyä luoda niitä itse; on samoin oltava aktiivinen suhteessa muihin perustoimintoihin, kuten väitteiden asettamiseen ja niiden todistamiseen. Tässä työssä harjoitellaan opettajankoulutuksen näkökulmasta mm. edellä mainittuja asioita tuottamalla toiminnallisesti ei-standardista suunnasta, minimalistisesti ja konstruktiivisesti niin tavallisia kuin eräitä vähemmän tavallisia nelikulmioita "risteyttämällä janoja". Nelikulmioita tarkastellaan myös tavanomaiseen tapaan. Molemmat lähestymissuunnat havainnollistavat ja täsmentävät myös nelikulmioihin liittyvää portaikkoajattelua. Ei-standardi lähestyminen, jonka voi helposti muuntaa myös strukturoiduksi ongelmakentäksi sekä algoritmisen ajattelun harjoitteluksi, osoittautuu varsin hyödylliseksi esimerkiksi Varignonin lauseen tutkimisessa.

Johdanto

Geometrian kehityksessä on nähtävissä analogisia piirteitä kielen kehittymisen kanssa. Tämän päivän suomen kielen käyttäjä liittänee tyypillisesti esimerkiksi käsittämisen, ymmärtämisen ja ajattelemisen päänsisäiseen, näkymättömään ja abstraktiin maailmaan. Näiden ilmaisujen etymologinen selvitys viittaa kuitenkin käsillä tekemiseen, ympäröintiin (jonkin alueen rajaamiseen) ja takaa ajamiseen (vrt. Leino 2015, 21). Geometrian alkuperää on hieman samaan tapaan hahmotettu ihmiskunnan konkreettisten tilakokemuksien kautta (vrt. esim. Husserl 2007). Tämän ajattelutavan kanssa tuntuu olevan ainakin osittain linjassa se, kun (koulu)geometriaa luonnehditaan oppiaineeksi, joka antaa matemaattisia työvälineitä tilasuhteiden tajuamiseen ja niillä operoimiseen (Silfverberg 2018, 87). Toisaalta on tietysti selvää, että ainakin yhtenä syynä niin kehittyneen kielen kuin geometrian tärkeään rooliin inhimillisessä toiminnassa on juuri niiden kyky joustavasti laajentaa ja muunnella sanojen ja käsitteiden alkuperäisiä käyttötapoja.

Tieteenä geometria abstrahoitui ja irrottautui fyysisestä toiminnan maailmasta hämmästyttävällä tavalla jo tuhansia vuosia sitten. Usein sanotaan – ehkä asiaa sen tarkemmin ajattelematta – sen saaneen alkunsa maanmittaukseen liittyneistä käytännöllisistä kysymyksistä, mistä itse geometria-sana, juuri maanmittausta tarkoittaen, löytää myös etymologisen selvityksensä (vrt. esim. Lehtinen & Merikoski & Tossavainen 2007, 7). Geometrian käsitteenmuodostusta on ilmeisesti, ainakin ennen sen "lopullista aksiomatisointia" 1900-luvun tienoilla, säädellyt paitsi abstrahoiminen niin myös täydentäminen suhteessa ulkoisen maailman olioihin: riittää ajatella esimerkiksi sen käsitteitä piste, suora ja taso (vrt. esim. Nevanlinna 1964). Mutta myös käsillä tekeminen on ollut (klassisessa) geometriassa aina mukana muun muassa harppi-viivain-konstruktioiden myötä.

Tällöin toimitaan niiden postulaattien (ks. esim. Lehtinen ym. 2007, 79) mukaan, jotka yleisesti ovat harpille ja viivaimelle asetettu pyrittäessä konstruoimaan vaikkapa säännöllinen 10-kulmio (vrt. esim. Väisälä 1965, 125–126). Silti onnistuneelta näyttävä suoritus ei vielä riitä, vaan tarvitaan myös geometrian sisäinen, käsitteellinen todistus menettelyn oikeellisuudelle. Näin klassisissa harppi-viivain-konstruktioissa ovat tekeminen ja sen perustelu, ajattelu, olleet aina hienolla ja tunnistettavalla tavalla läsnä; tätä kautta on edelleen voitu saavuttaa kauaskantoisia siirtovaikutuksia muunkin tyyppisen matematiikan kunnolliseen oppimiseen. Nykyisistä perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmista tämän tapaisia tehtäviä ei kuitenkaan juuri löydy. Tämä kirjoitus pyrkii pieneltä osalta korvaamaan tätä puutetta – mutta nyt operoidaan janoilla.

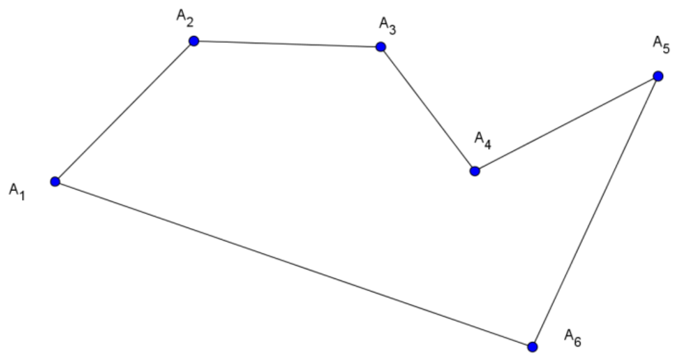
Toiminnallisten työmuotojen lähtökohtana matematiikassa on tavallisesti jokin käsite, jota pyritään muuntamaan konkretiaksi: moniaistiseksi eläväksi kokemukseksi, liikkeeksi, käsityöksi, peliksi, leikiksi, tms. Toisaalta nämä kokemukset on pystyttävä palauttamaan matemaattisiksi ideoiksi (vrt. esim. Portaankorva-Koivisto 2010, 143; Lindgren 2004). Toiminnallinen työskentely voi myös pitempään ikään kuin vuorotella dialektisesti konkretian ja käsitetason välillä (vrt. esim. Joutsenlahti 2005, 67). Lähtökohdan ei aina tarvitse olla valmiissa matemaattisessa ideassa, vaan liikkeelle voidaan lähteä esimerkiksi jostakin konkreettisesta toiminnosta tai laitteesta, jota tutkimalla hahmotetaan siihen liittyvää matematiikkaa (ks. esim. Poranen & Yrjänäinen 2015). On selvää, että molemmissa lähestymistavoissa tarvitaan tietoa ja ymmärrystä käsitteiden määritelmistä ja niiden luonteesta; määritelmiä pitää oikeasti ymmärtää ja niitä tulee osata tarvittaessa myös itse luoda.

Monet tutkimukset kuitenkin osoittavat, että matemaattisten käsitteiden määrittely, ja jopa itse määrittelyn idea on vaikea asia oppilaille ja opiskelijoille kaikilla koulutusasteilla, yliopisto-opiskelu mukaan lukien (esim. Silfverberg 2018, 98). Ainakin osasyyksi tälle katsotaan se, että tavallisissa oppimateriaaleissa määritelmät esitetään liian valmiina, ilman syventävää taustoitusta niiden luonteesta, tarpeesta ja merkityksestä matemaattisen käsitteenmuodostusprosessin kannalta. Niinkin voi olla, että määritelmiin ei monissa tavallisissa oppimistilanteissa tarvitsekaan kiinnittää, ainakaan koulussa, kovin paljon huomiota; niitä luonnollisesti esitetään, mutta sitten annetaan nopeasti muutama malli (esimerkki), jonka jälkeen ryhdytään ”laskemaan” – ja määritelmien syvempi luonne voidaan unohtaa.

Koulumatematiikassa ei juurikaan todisteta väittämiä tai lauseita oikeiksi (tai vääriksi) yliopistomatematiikan tapaan. Syy tähän on sinänsä selvä: sellaisia aksiomaattisia rakenteita tai ympäristöjä, joita todistaminen vaatisi, ei koulussa voida tehdä. Näin yliopistomatematiikan tavanomainen 3-portainen esitysjärjestys määritelmä, väite (lause) ja väitteen todistus ei juuri ole esillä koulussa. Tämäkin voi vaikuttaa siihen, että määritelmiä, joita kyllä koulussakin tarvitaan, huomioidaan lähinnä operationaalisesti, ei niinkään käsitteellisesti. Toisaalta todistaminen on matematiikan ydintä, eikä sitä tietenkään voida koulussa täysin ohittaa. Tässä kirjoituksessa ei ryhdytä tätä asiaa yleisellä tasolla ruotimaan (ks. esim. Keranto 2018), vaan tyydytään esittämään teesin luontoisesti vain seuraavaa: toiminnallisten työmuotojen kannalta on olennaista tutkia, ymmärtää ja luoda määritelmiä, mutta sen lisäksi on tutkittava, ymmärrettävä ja luotava myös väitteitä ja niiden perusteluita. Tämä kirjoitus pyrkii perustelemaan ja taustoittamaan sanottua teesiä rajoittumalla lähinnä nelikulmioihin keskittyvään ”case-tarkasteluun”.

Tavallisten nelikulmioiden määrittely

Tarkastellaan ensin lyhyesti, kuinka tutut nelikulmiot tyypillisesti määritellään – tai ainakin melko tyypillisesti. Nimitämme tätä *standardilähestymiseksi*. Ensin on kuitenkin paikallaan tutkia hieman yleistä monikulmion määrittelyä (vrt. Lehtinen ym. 2007, 20–21). Pisteet A_1 ja A_n yhdistävä *murtoviiva* $A_1A_2 \dots A_n$ rakentuu samassa tasossa olevista janoista A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, joista mitkään kaksi peräkkäistä eivät ole samalla suoralla. Janat A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ muodostavat sen *sivut* ja pisteet A_1, A_2, …, A_n sen *kärjet*. Jos murtoviivan sivuilla ei ole muita yhteisiä pisteitä kuin kärjet, on se *yksinkertainen*; jos vielä $A_1 = A_{n+1}$, on murtoviiva n-sivuinen *monikulmio* ”viimeisenä sivunaan” A_nA_{n+1} (= A_nA_1).



Kuva 1. Erään yksinkertaisen ei-konveksin kuusikulmion $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ muodostaminen murtoviivojen kautta.

Tämän määrittelyn mukaan siis esimerkiksi *yksinkertaisen nelikulmion* kaksi sivua eivät voi leikata toisiaan siten, että nelikulmion sisäosa näyttäisi muodostuvan kahdesta kolmiosta. Sanomme edelleen, että yksinkertainen monikulmio on *kupera* eli *konveksi*, jos ei ole mahdollista, että monikulmion kaksi mielivaltaista pistettä yhdistävä jana sisältäisi pisteitä monikulmion ulkopuolelta. Yksinkertaisen monikulmion *lävistäjä* (jana) yhdistää kaksi monikulmion kärkipistettä, jotka eivät määritä monikulmion sivua.

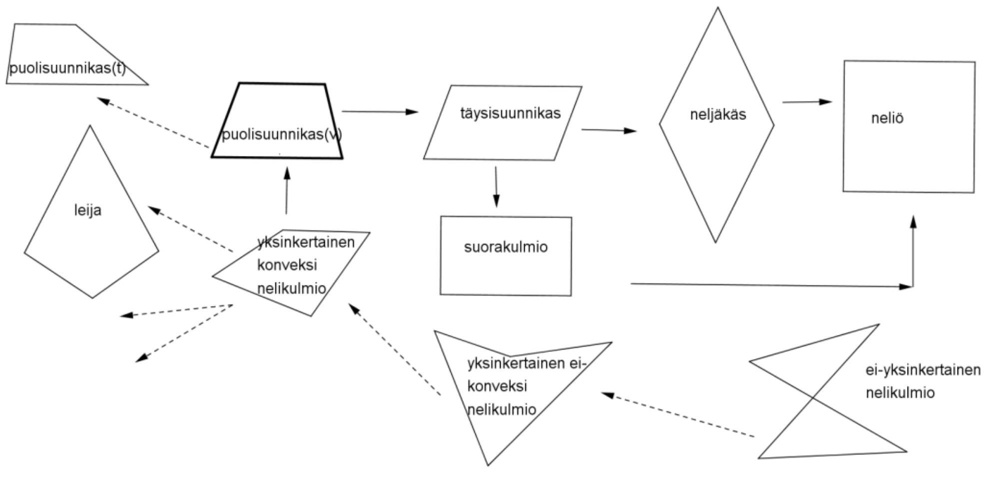
Tavallisten nelikulmioiden (puolisuunnikas, suunnikas, suorakulmio, neljäkäs ja neliö) määrittelyissä esiintyy kirjavuutta, joka voi tuottaa turhia ongelmia. Tämä on yllättävää, koska kyse on hyvin arkisista ja monikäyttöisistä muodoista – ja toisaalta geometriassa sinänsä tärkeistä, ikivanhoista ja kiinnostavista käsitteistä. *Puolisuunnikas* voi olla vaikkapa

- nelikulmio, jonka toiset vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset *ja toiset vastakkaiset sivut erisuuntaiset* (Silfverberg ym. 1997, 43; Väisälä 1965, 71);
- nelikulmio, jonka (ainakin) toiset vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset (Lehtinen ym. (2007, 33).

Molemmissa määritelmissä edellä on ilmeisenä yläkäsitteenä yksinkertainen konveksi nelikulmio, vaikka sitä ei ole sen kummemmin korostettu. Nuo määrittelyt eivät näytä kiinnittävän *samaa* nelikulmioiden joukkoa piiriinsä; ensimmäinen määrittely kieltää mahdollisuuden, että puolisuunnikkaalla voisi olla myös toinen pari vastakkaisia sivuja keskenään yhdensuuntaiset, toisen taas salliessa sen. Jälkimmäinen määrittely vaikuttaa siis olevan väljempi, koska sen piiriin voi ajatella kuuluvan kaikki ensimmäisen määrittelyn nelikulmiot sekä vielä muita: nekin, joilla *molemmat* parit vastakkaisia sivuja voivat olla keskenään yhdensuuntaiset. On näin ollen ilmeistä, että määrittelyiden ilmaisemat *käsitteet* eivät ole samat, vaikka ne nimetään samalla sanalla. Otetaan siksi tässä, paremman puutteessa, käyttöön eri sanat *puolisuunnikas(t)* ja *puolisuunnikas(v)* ilmaisemaan eri puolisuunnikkaan käsitteitä; näistä jälkimmäinen sana nimetköön väljemmin määritellyn puolisuunnikkaan (merkitään *määritelmä s1*) ja edellinen tiukemmin määritellyn. Mitä etuja voisi seurata, jos otettaisiin käyttöön puolisuunnikas(v)?

Yksi etu voisi olla siinä, että tavalliset nelikulmiot saataisiin tällöin esitettyä hierarkkisesti tai portaikkomaisesti lähtien liikkeelle vain *yhdestä* perushahmosta, tästä väljemmin määritellystä puolisuunnikkaasta. Kaikki muut mainitut nelikulmiot olisivat nyt tämän perusmuodon *erikoistapauksia* **(**Kuva 2**).** Voimme esimerkiksi ajatuksellisesti tai käsitteellisesti poimia, määritellä puolisuunnikkaiden(v) joukosta sellaiset, joiden molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaiset (*määritelmä s2*). Näitä nelikulmioita voisimme kutsua *täysisuunnikkaiksi* (mikä nyt voisi olla parempi nimitys kuin *suunnikas*). Täysisuunnikkaiden joukosta voimme edelleen erityisesti huomioida ne, joiden kaikki sivut ovat yhtä suuria (*määritelmä s3*), ts. *neljäkkäät* – ja näistä ne, joissa kaikki neljä kulmaa ovat suoria (*määritelmä s4*), ts. *neliöt*. Täysisuunnikkaiden joukossa on mahdollista rajautua myös niihin, joissa kaikki kulmat ovat suoria eli *suorakulmioiden* joukkoon (*määritelmä s5*). Neliöt voidaan ilmeisesti kiinnittää myös tästä joukosta ymmärtämällä ne suorakulmioiksi, joiden sivut ovat yhtä pitkät.

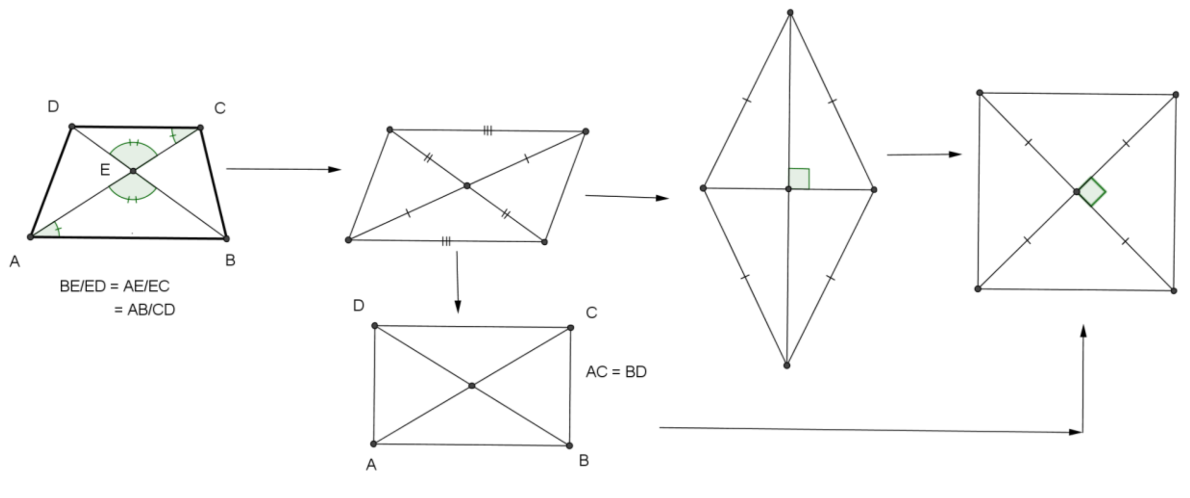
Voimme sanoa yllä käytettyä menettelyä tai määrittelyprosessia myös *käsitteelliseksi varioinniksi* suunnassa yleisemmästä yksityisempään; toisaalta käsitteellistä muuntelua voidaan tehdä myös vastakkaisessa suunnassa, yksityisemmästä yleisempään. Matematiikassa kaiken kaikkiaan tämän tyyppiset ajatukselliset liikkeet ovat varsin keskeisiä (vrt. esim. Schoenfeld 2012). Myös kouluopetusta koskevissa oppimis-/opettamiskäsityksissä (esim. Opetushallitus 2014, 17) korostetaan muun muassa aktiivista ja tutkivaa oppimista, minkä voi ajatella olevan hyvässä sopusoinnussa yleisten matemaattisten aktiviteettien kanssa. Geometriassa saatetaan puhua myös *visuaalisesta varioinnista* (esim. Silfverberg 1999, 92), jolle myös *GeoGebran* kaltainen dynaamisen geometrian ohjelmisto antaa erinomaisen toimintaympäristön. Kuvaan alla (Kuva 2) on piirretty ”prototyyppejä” myös eräistä muista nelikulmioista; niihin palataan myöhemmin.



Kuva 2**.** Tavallisia ja eräitä vähemmän tavallisia nelikulmioita. Tavalliset nelikulmiot (täysisuunnikas, suorakulmio, neljäkäs ja neliö) ovat puolisuunnikkaan(v) erikoistapauksia.

Johdetaan nyt esimerkiksi ensin kaava (yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvo kertaa niiden välinen etäisyys), puolisuunnikkaan(v) pinta-alan laskemiseksi *kolmion pinta-alan laskentaperiaate lähtökohtana* (vrt. esim. Lehtinen ym. 2007, 56–59); muiden pinta-alojen määritykset (myös puolisuunnikkaan(t)) olisivat tällöin tämän perustuloksen suoraviivaisia sovelluksia. Jos vaikkapa suorakulmiossa merkitään kanta = a, korkeus = b, niin yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvo = (a + a)/2 = a, ja näiden sivujen välinen etäisyys = b, joten sen pinta-ala = ab; vaihtoehtoisesti ala voidaan määrittää toimituksella (b + b)/2 · a = ba = ab. Ainakin opettajille, kaikilla kouluasteilla, tällainen tietorakenne olisi hyödyllinen. Oppilaille asia voisi olla hivenen mutkikkaampi, koska silloin ilmeisesti pitäisi operoida vähintään tasolla 3, ominaisuuksien järjestämisen tasolla, *van Hielen asteikolla* – mitä luokittelua käytetään paljon geometrian oppimisen ja opettamisen tutkimisessa (ks. Silfverberg 2018, 90–93; Silfverberg 1999, 26 - 64).

Toisena esimerkkinä ”portaikkoajattelusta” (Kuva 2) mainittakoon lause ”Puolisuunnikkaan(v) lävistäjät leikkaavat toisensa yhdensuuntaisten sivujen suhteessa” (kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseen ”kk” perusteella). Täysisuunnikkaan kohdalla tämä tarkoittaisi jokseenkin välittömästi seurauslausetta ”Täysisuunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa” – koska täysisuunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat myös yhtä pitkiä (mikä olisi helppo osoittaa). Tämä pitäisi heti sisällään myös neljäkästä koskevan lauseen ”Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa”, mistä seuraisi edelleen lause ”Neljäkkään lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti” (kolmioiden yhtenevyyslauseen ”sss” nojalla). Toisaalta pätee selvästi lause ”Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät” (kolmioiden yhtenevyyslause ”sks”). Neliön voi ajatella erikoistapauksena sekä neljäkkäästä että suorakulmiosta (samoin täysisuunnikkaasta ja puolisuunnikkaasta); näin saadaan lause ”Neliön lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä, joka jakaa ne molemmat keskenään yhtä suuriin osiin”. **(**Kuva 3.)



Kuva 3. Eräiden tavallisia nelikulmioita koskevien lauseiden havainnollistuksia.

Yllä tarkasteltiin todistamista yleisluontoisesti, yksityiskohdat ohittaen. Geometriaa opiskellaan koulussa jo 1. luokalta lähtien, ja matematiikan osa-alueena siihen luonnollisesti kuuluu myös perusteleminen ja sen opettelu. Tavalliset nelikulmiot voisivat hyvin toimia monipuolisena ja monitasoisena todistamiseen tai perustelemiseen liittyvien aktiviteettien ympäristönä kaikilla kouluasteilla, ja seuraavassa kappaleessa tehtävät tarkastelut pyrkivät syventämään tätä näkemystä.

Tarkastellaan selvyyden vuoksi vielä hieman esimerkiksi lausetta (ominaisuutta): ”Neljäkkään lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti”. Lausetta todistettaessa voidaan siis hyödyntää hierarkkista tietoa (Kuva 3), että neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa, koska neljäkäs on myös täysisuunnikas. Tämän jälkeen itse todistus onnistuu helposti soveltamalla kolmioiden yhtenevyyslausetta ”sss” neljäkkään (Kuva 3) vaakasuoran lävistäjän yläpuolella olevaan kahteen kolmioon (lisäksi tarvitaan tieto siitä, että vieruskulmien summa = oikokulma). Tämä lause on siis *tosi*, mutta yleisesti täysisuunnikkaan lävistäjät eivät leikkaa toisiaan kohtisuorasti, ts. siitä, että neljäkkään lävistäjät leikkaavat toisensa suorassa kulmassa, ei saa päätellä, että *kaikkien* täysisuunnikkaiden lävistäjät leikkaavat näin toisensa.

Esimerkkilauseemme voidaan muuntaa myös muotoon ”Jos täysisuunnikas on neljäkäs, niin sen lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti*”*. (Myös vaikkapa muoto ”Jos nelikulmio on neljäkäs, niin sen lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä, joka puolittaa ne molemmat*”* on mahdollinen.) Voimme edelleen yleisesti ilmaista jos-niin-lauseet merkinnällä p → q. Silloin sanotaan usein myös, että q on *välttämätön ehto* p:lle. Erityisesti siis se, että täysisuunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, on välttämätön ehto sille, että täysisuunnikas olisi neljäkäs. Mutta onko mainittu ehto myös *riittävä*: Onko myös lause ”Jos täysisuunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, niin se on neljäkäs” tosi?

Kysymyksen ymmärtämistä voi helpottaa seuraavan (suositun) rinnastuksen tutkiminen reaalimaailmasta ”Jos sataa, niin on pilvistä”. Asiaintila (q), että on pilvistä, katsotaan (havainnollisesti, säätieteellisesti) välttämättömäksi ehdoksi satamiselle (p). Toisaalta voi tunnetusti olla pilvistä, mutta silti ei sada. Näin ollen pilvisyys ei ole satamiselle riittävä ehto. Lause ”Jos on pilvistä, niin sataa” (q → p) on loogiselta luonteeltaan lauseen ”Jos sataa, niin on pilvistä” (p → q) *käänteislause*. Siis tässä lause (p → q) on tosi, mutta sen käänteislause (q → p) on *epätosi* (on mahdollista, että on pilvistä, eikä sada). Voimme myös huomata, että lause (p → q) on ns. loogisesti yhtä pitävä lauseen (ei-q → ei-p) kanssa (”Jos ei ole pilvistä, niin ei sada”). Edellisen kappaleen päättänyttä lausetta voisimme siis ilmeisesti tutkia myös näin: Onko lause ”Jos täysisuunnikas ei ole neljäkäs, niin sen lävistäjät eivät leikkaa toisiaan kohtisuorasti” tosi?

Tavallisten nelikulmioiden tuottaminen janoja risteyttämällä

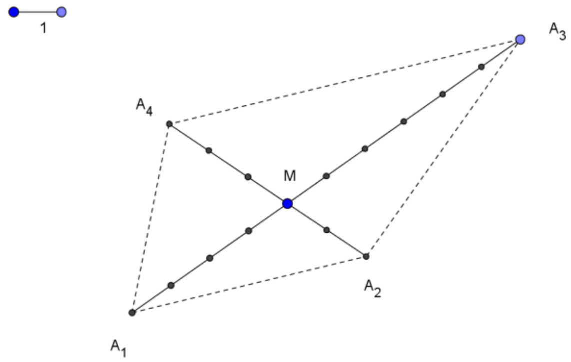
Tässä kappaleessa tutkitaan, kuinka tavalliset nelikulmiot voidaan tuottaa ”janoja risteyttämällä”. Tällöin laitamme janat A_1A_3 ja A_2A_4 leikkaamaan toisensa, jonka jälkeen piirretään janat A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 ja A_4A_1, ts. risteävien janojen A_1A_3 ja A_2A_4 päätepisteet yhdistetään nelikulmioksi $A_1A_2A_3A_4$. Tavallisia nelikulmioita lähestytään siis ”ei-standardista suunnasta” tavalla, jonka voi ymmärtää myös eräänlaiseksi viivainkonstruktioksi. Samalla saadaan vastaus myös esimerkiksi sille, onko lauseen ”Jos täysisuunnikas on neljäkäs, niin sen lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti*”* käänteislause tosi.

Tarkastelut tehdään geometrisilla (*GeoGebran*) janoilla, mutta toiminnallisten työmuotojen kannalta on olennaista huomata, että janat ovat tulkittavissa myös vaikkapa puutikkuina tai mehupilleinä. Tässä kappaleessa geometrinen argumentointi on tavanomaista siten, että tutuksi oletetaan muun muassa kolmioiden yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus sekä näihin liittyvät lauseet; tuttuna pidetään myös suorien yhdensuuntaisuuteen liittyvää peruskäsitteistöä (ks. esim. Lehtinen ym. 2007).

Laitetaan ensimmäiseksi kaksi janaa A_1A_3 ja A_2A_4 leikkaamaan toisensa kohdassa M *samassa suhteessa* (Kuvassa 4 suhteessa 3 : 2 (= 6 : 4)). Näin saatu neljän pisteen systeemi täydennetään yksinkertaiseksi nelikulmioksi $A_1A_2A_3A_4$. Siinä ovat vastakkaiset sivut A_1A_2 ja A_3A_4 yhdensuuntaiset: ovathan ensinnäkin ristikulmina kulmat A_1MA_2 ja A_3MA_4 yhtä suuret; toiseksi $MA_2 : MA_4 = MA_1 : MA_3$, joten kolmiot MA_1A_2 ja MA_3A_4 ovat yhdenmuotoiset (merkitään $\Delta MA_1A_2 \sim$

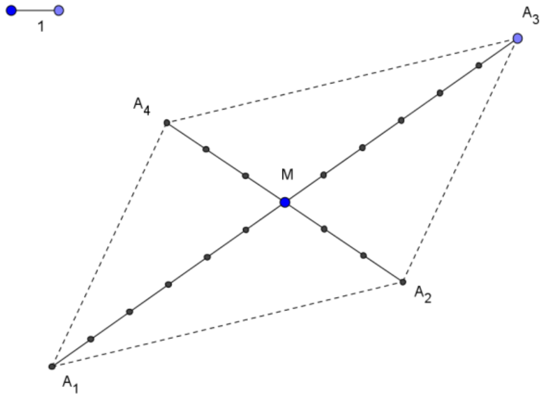
ΔA_3MA_4) kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseen ”sks” perusteella; näin samankohtaisina kulmina ovat kulmat A_2A_1M ja A_4A_3M yhtä suuret, mistä edelleen seuraa, että $A_1A_2 \parallel A_3A_4$.

Yllä kuvatulla menettelyllä saadaan siis janat A_1A_3 ja A_2A_4 risteyttämällä synnytettyä nelikulmio $A_1A_2A_3A_4$, mistä löytyy (ainakin) yksi vastakkainen, keskenään yhdensuuntainen sivupari. Näin määritelmän s1 mukaisesti on saatu puolisuunnikas(v) $A_1A_2A_3A_4$. Välittömästi nähdään sekin, että tässä nelikulmiossa $A_1A_2A_3A_4$ myös yhdensuuntaiset sivut jakavat toisensa lävistäjien suhteessa, ts. $A_1A_2 : A_3A_4 = A_2M : A_4M = A_1M : A_3M$.



Kuva 4. Puolisuunnikkaan(v) konstruointi risteyttämällä janat A_1A_3 ja A_2A_4 samassa suhteessa.

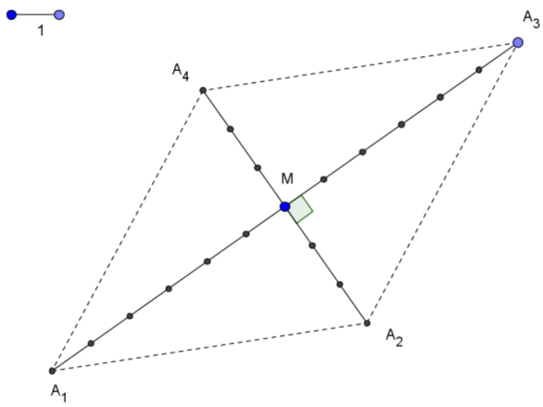
Varioidaan nyt edellistä jakosuhdetta siten, että janat A_1A_3 ja A_2A_4 leikkaavat toisensa pisteessä M suhteessa 1 : 1 (Kuvassa 5 alla 6 : 6 = 3 : 3 = 1 : 1). Täydennetään näin saatu neljän pisteen systeemi nelikulmioksi $A_1A_2A_3A_4$. Tällöin sekä $\Delta A_3MA_4 \sim \Delta A_1MA_2$ että $\Delta A_4MA_1 \sim \Delta A_2MA_3$ (sks), mistä seuraa, että myös $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, toisin sanoen olemme näin konstruoineet täysisuunnikkaan $A_1A_2A_3A_4$ määritelmän s2 mielessä. Edelleen, koska yhdenmuotoisuussuhde = 1:1, on $A_1A_2 = A_3A_4$ ja vastaavasti $A_2A_3 = A_1A_4$ (Kuva 5).



Kuva 5. Täysisuunnikas $A_1A_2A_3A_4$ konstruoidaan risteyttämällä janat A_1A_3 ja A_2A_4 suhteessa 1:1.

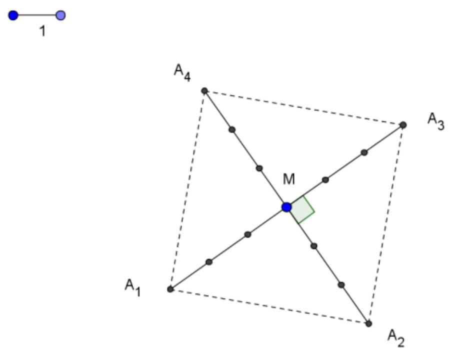
Seuraavassa varioidaan täysisuunnikkaan konstruointia siten, että suhteessa 1 : 1 toisensa leikkaavat janat A_1A_3 ja A_2A_4 kohtaavat pisteessä M *suorassa kulmassa* (Kuva 6). Osoitetaan, että tätä kautta saatava nelikulmio $A_1A_2A_3A_4$ on määritelmän s3 mukainen neljäkäs.

Ensinnäkin edellisen tarkastelun perusteella $A_1A_2 = A_3A_4$ ja $A_1A_4 = A_2A_3$. Näin riittää näyttää, että $A_2A_3 = A_3A_4$, mistä väite seuraa. Konstruktion perusteella $MA_2 = MA_4$, joten kolmio A_2MA_3 on yhtenevä kolmion A_4MA_3 kanssa yhtenevyyslauseen ”sks” perusteella. Näin edelleen yhtenevien kolmioiden vastinosina $A_2A_3 = A_3A_4$, mikä oli todistettava.



Kuva 6. Risteävät janat A_1A_3 ja A_2A_4 kohtaavat toisensa pisteessä M suorassa kulmassa, jakosuhteessa 1:1; täydennetty systeemi $A_1A_2A_3A_4$ on neljäkäs.

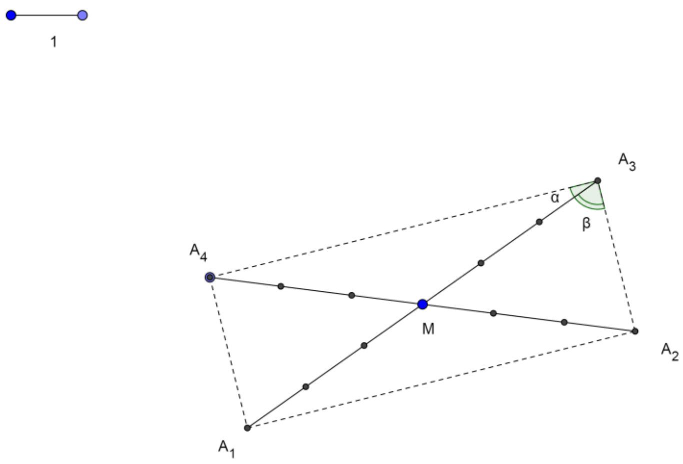
Saamme neliön (standardi-)määritelmän s4 mielessä edellisestä neljäkkään konstruktiosta vaatimalla lisäksi, että suorassa kulmassa pisteessä M risteävät janat A_1A_3 ja A_2A_4 ovat yhtä pitkät (Kuva 7). Tiedämme siis jo, että nelikulmion $A_1A_2A_3A_4$ sivut ovat yhtä pitkät. On osoitettava, että tämän nelikulmion kulmat ovat suoria. Kolmiot $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ ja $A_4A_1AA_2$ ovat selvästi yhtenevät, joten riittää osoittaa esimerkiksi kulma $A_2A_1A_4$ suoraksi. Kolmio A_1MA_2 on suorakulmainen ja tasakylkinen, joten sen kulma A_2A_1M on puolet suorasta kulmasta; kolmio A_1MA_2 on edelleen yhtenevä kolmion A_4MA_1 kanssa (esimerkiksi yhtenevyyslauseen ”sks” perusteella), joten vastinkulmina ovat kulmat A_2A_1M ja MA_1A_4 yhtä suuret, ts. niiden summa = suora kulma, mikä oli todistettava.



Kuva 7. Neliön konstruointi.

Palaamme lopuksi vielä yleisen täysisuunnikkaan konstruointiin. Varioidaan sitä nyt siten, että risteävät janat A_1A_3 ja A_2A_4 ovat yhtä pitkät (Kuva 8). On osoitettava, että tällöin saadaan määritelmän s5 mukainen suorakulmio $A_1A_2A_3A_4$. Tiedämme jo täysisuunnikkaan konstruoinnin perusteella, että $A_1A_2 = A_3A_4$ ja $A_1A_4 = A_2A_3$; tiedämme senkin, että kolmiot A_1MA_2 ja A_3MA_4 sekä vastaavasti kolmiot A_2MA_3 ja A_4MA_1 ovat keskenään yhtenevät.

Tämän konstruktion erityisvaatimuksesta $A_1A_3 = A_2A_4$ seuraa, että edellä mainitut kolmiot ovat tasakylkisiä. Jos siis esimerkiksi merkitään kulma $A_4A_3M = \alpha$, niin myös kulma $MA_4A_3 = \alpha$; jos vastaavasti merkitään kulma $MA_3A_2 = \beta$, on myös kulma $A_3A_2M = \beta$. Tällöin kulma $A_3MA_4 = 2\beta$ ja kulma $A_2MA_3 = 2\alpha$; toisaalta kulmat A_3MA_4 ja A_2MA_3 muodostavat yhdessä oikokulman, joten $2\beta + 2\alpha$ = oikokulma, eli $\alpha + \beta$ = puolet oikokulmasta = suora kulma = kulma $A_4A_3A_2$. Kolmioiden A_1MA_2 ja A_3MA_4 sekä vastaavasti kolmioiden A_2MA_3 ja A_4MA_1 keskinäisestä yhtenevyydestä seuraa, että nelikulmion $A_1A_2A_3A_4$ kaikki kulmat ovat suoria, mikä oli todistettava.



Kuva 8. Suorakulmion konstruointi.

Yhteenvetoa. Tavalliset nelikulmiot, standardimääritelmien s1-s5 mielessä, on siis helppo konstruoida myös ikään kuin sisältä päin, kahta janaa A_1A_3 ja A_2A_4 eri tavoin risteyttämällä. Toisaalta tällöin syntyy myös mahdollisuus määritellä nuo nelikulmiot ”ei-standardista suunnasta” toiminnallisesti. Esimerkiksi

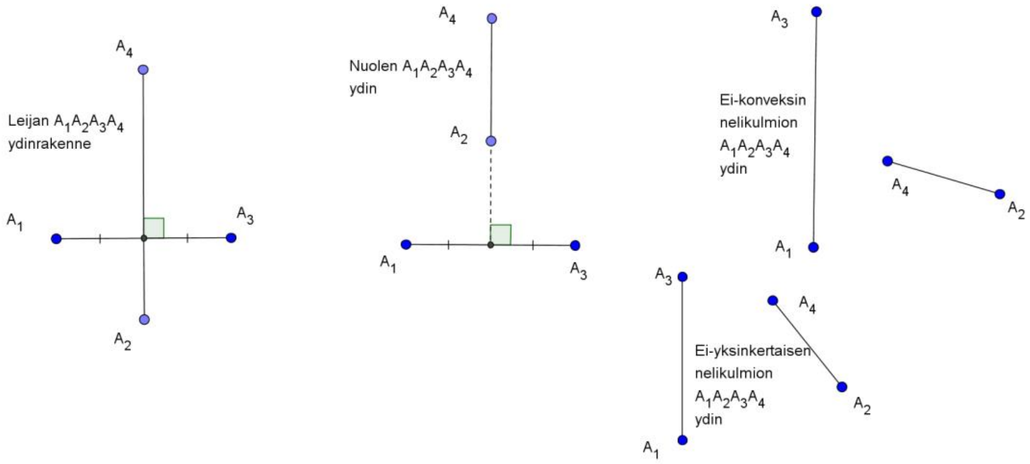
> Valitse kaksi janaa a = AC ja b = BD; pistä ne leikkaamaan toisensa kohtisuorasti pisteessä M, joka jakaa molemmat kahtia. Yhdistä janojen a ja b päätepisteet A, B, C ja D neljällä janalla AB, BC, CD ja DA. Näin muodostettua nelikulmiota (murtoviivaa) ABCD sanotaan *neljäkkääksi* (*määritelmä s3'*).

Tässä kappaleessa tarkastellut menettelyt yhdessä standardimääritelmien kanssa antavat yksinkertaista ja havainnollista ainesta myös monien tavallisia nelikulmioita koskevien lauseiden ja näiden käänteislauseiden tutkimiseksi. Tämä jatkotarkastelu jääköön lukijalle.

Molemmat lähestymistavat pitävät sisällään samoin helposti ymmärrettävän portaikkorakenteen, mikä harjaannuttaa esimerkiksi ajatuksellisen (tai toiminnallisen) siirtymisen yleisemmästä käsitteestä sen erikoistapaukseen – tai päinvastoin. Näyttää kuitenkin siltä, että juuri janojen risteyttäminen – tai ”tiukasta risteyttämisestä” luopuminen – mahdollistaa huomattavan runsaan varioinnin ja uusien konstruktioiden tuottamisen.

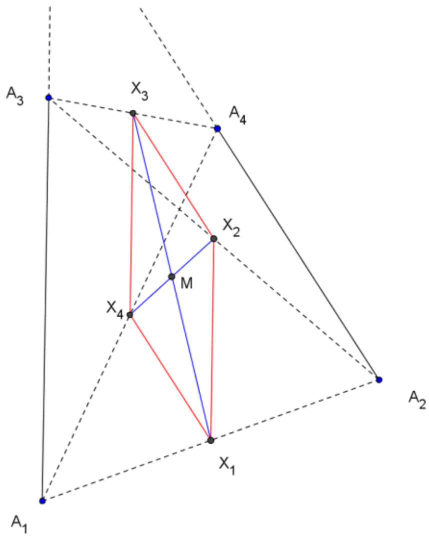
Muita konstruktioita

Kuvaan 2 on piirretty eräiden muidenkin kuin ns. tavallisten nelikulmioiden prototyyppejä. Seuraavaan kuvaan (Kuva 9) on hahmoteltu erään *leijan*, *nuolen*, *ei-konveksin nelikulmion* sekä *ei-yksinkertaisen nelikulmion* ydinrakenteet janojen A_1A_3 ja A_2A_4 kautta. Lukijan on helppo täydentää ne vastaaviksi nelikulmioiksi $A_1A_2A_3A_4$ sekä miettiä, mikä rakenteissa on olennaista. On syytä huomata, että nuolen, ei-konveksin nelikulmion sekä ei-yksinkertaisen nelikulmion kohdalla on luovuttu vaatimuksesta janojen A_1A_3 ja A_2A_4 risteämisestä.



Kuva 9. Leijan, nuolen, ei-konveksin ja ei-yksinkertaisen nelikulmion konstruointi.

Tarkastellaan esimerkkinä ns. *Varignonin lauseen* pätevyyttä ei-yksinkertaisen nelikulmion tapauksessa. (Muissakin tapauksissa sen tutkiminen voisi olla mielenkiintoista.) Lauseen mukaan nelikulmion sivujen keskipisteet määrittävät (täysi-)suunnikkaan (ks. määritelmä s2). Tutkitaan lausetta hieman ei-yksinkertaisen nelikulmion tapauksessa (kuva 10).



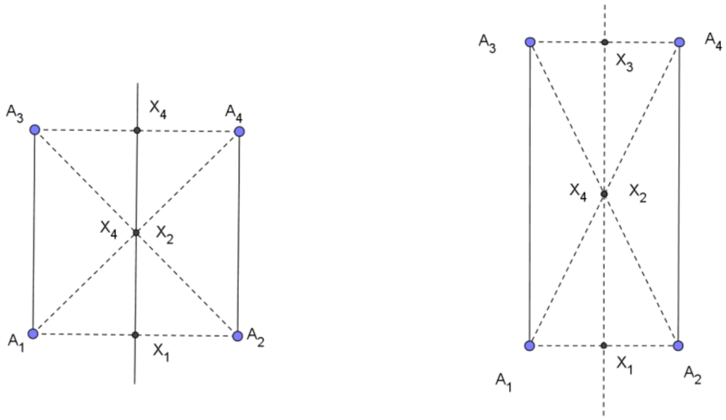
Kuva 10. Varignonin lauseen tarkastelua ei-yksinkertaisen nelikulmion $A_1A_2A_3A_4$ tapauksessa.

Kuvassa 10 ei-yksinkertaisen nelikulmion $A_1A_2A_3A_4$ muodostajajanat (vrt. kuva 9) A_1A_3 ja A_2A_4 on asetettu niin, että janan A_2A_4 määrittämä puolisuora leikkaa janan A_1A_3 määrittämän puolisuoran tämän janan yläpuolella. Piste X_1 on sivun A_1A_2 keskipiste, piste X_2 on sivun A_2A_3 keskipiste jne. Väitämme nyt Varignonin lauseen mukaisesti, että $X_1X_2X_3X_4$ on täysisuunnikas.

Ensinnäkin jana X_1X_2 on kolmion $A_1A_3A_2$ sivujen A_1A_2 ja A_3A_2 keskipisteiden yhdysjana, joten se on yhdensuuntainen kolmion kannan A_1A_3 kanssa (ja pituudeltaan puolet siitä; vrt. esim. Lehtinen ym., 2007, 49). Jana X_4X_3 on sekin kannan A_1A_3 suuntainen (ja pituudeltaan puolet siitä), kun tarkastellaan vastaavasti kolmiota $A_1A_3A_4$; näin $X_1X_2 \parallel X_4X_3$ (ja $X_1X_2 = X_4X_3$). Samaan tapaan osoitetaan helposti, että myös X_2X_3 || X_1X_4, kun tarkastellaan kolmioita $A_2A_4A_1$ ja $A_2A_4A_3$. Siis $X_1X_2X_3X_4$ on täysisuunnikas (standardimääritelmän s2 mielessä), kuten väitettiin.

Yllä olevasta tarkastelusta seuraa myös, että täysisuunnikkaan $X_1X_2X_3X_4$ lävistäjinä $X_1M = X_3M$ ja $X_2M = X_4M$. Toisaalta tiedämme (vrt. kuva 5), että jos kaksi janaa risteytetään suhteessa 1:1, niin saadaan täysisuunnikas. Näin Varignonin lauseen todistusta voisi yrittää myös siten, että osoitetaan ensin janat X_1M ja X_3M sekä vastaavasti X_2M ja keskenään yhtä suuriksi. Jätetään tämä lukijalle.

Näyttää olevan olemassa myös ei-yksinkertaisia nelikulmioita, joille Varignonin lause ei päde (kuva 11):



Kuva 11. Ei-yksinkertaisia nelikulmioita $A_1A_2A_3A_4$, joille Varignonin lause ei päde. Sivujen keskipisteet X_1, X_2, X_3 ja X_4 asettuvat kaikki samalle suoralle.

Jos jatketaan janojen risteyttämistä koskevien ”sääntöjen luovaa rikkomista” – tai niiden yleistämistä – edelleen, niin esimerkiksi *kolmioita* voitaisiin konstruoida siten, että janoilla A_1A_3 ja A_2A_4 olisi yksi yhteinen piste, mutta janat eivät leikkaisi toisiaan. Jos esimerkiksi piste A_4 olisi janalla A_1A_3, niin täydennysprosessi $A_1A_2A_3A_4$ johtaisi kolmioon $A_1A_2A_3$ (jolloin siis piste A_4 olisi sivulla A_1A_3).

Voinee ajatella myös eräitä 3d-konstruktioita, jolloin tarvittaisiin ilmeisesti kolme janaa kappaleen ydinrakenteen konstruoimiseksi. Olkoon tuo kolmas jana = PQ (ja kaksi muuta edelleen A_1A_3 ja A_2A_4). Konstruoidaan näin esimerkiksi suora neliöpohjainen pyramidi. Vaiheessa 1 konstruoidaan neliö kuvan 7 tapaan. Vaiheessa 2 asetetaan tuon kuvan mukaiseen pisteeseen M jana PQ siten, että se on kohtisuorassa sekä janaa A_1A_3 että janaa A_2A_4 vastaan (nämä janat määrittävät erään tason T; PQ (= MQ) on tason T normaali) ja että P = M; täydennetään näin saatu ydinrakenne pyramidiksi piirtämällä vielä janat A_1Q, A_2Q, A_3Q ja A_4Q. Jos jana PQ asetetaan muutoin kuin edellä, mutta jätetään siitä puolet janojen A_1A_3 ja A_2A_4 määrittämän tason alapuolelle, saataisiin oktaedri.

Jokseenkin vastaavaan tapaan olisi tehtävissä ydinrakenteet esimerkiksi suorakulmaiselle särmiölle (lähtemällä liikkeelle kuvan 8 konstruktiosta), samoin suorille särmiöille, joiden pohjina olisivat kuvan 9 mukaiset leija, nuoli tai ei-konveksi nelikulmio. Myös sitä tilannetta, missä kappaleen pohjana olisi ei-yksinkertainen nelikulmio voisi olla mielenkiintoista tutkia.

Lopuksi

Edellä ideoitua toimintatapaa – nelikulmioiden tuottamista janoja risteyttämällä (ja vähän muutenkin) – voi kokeilla sekä tulevien luokanopettajien että aineenopettajien didaktisissa opinnoissa. Varsinaisena tarkoituksena olisi luonnollisesti se, että he kiinnostuisivat itse kehittämään ja kokeilemaan vastaavia toimintatapoja tulevassa työssään. Samalla heidän tulisi ymmärtää erilaisen mallittamisen ja tulkitsemisen mahdollisuudet. Tarkastellut menettelyt ohjaavat kiinnittämään huomiota tärkeisiin nelikulmioihin tuoreella, mutta silti luontevan minimalistisella tavalla. Konstruktioiden avulla on mahdollista harjoitella myös niin standardien kuin ei-standardien määritelmien muodostamista nelikulmioista sekä myös standardien ja ei-standardien lauseiden muotoilemista ja todistamista näistä. Tällöin tulevat opettajat harjaantuvat kiinnittämään riittävästi huomiota ehkä muidenkin ”liian tuttujen” asioiden määritelmiin ja niitä koskeviin väittämiin.

Ei ole liikaa oletettu, että ”näköavaruudessa” esimerkiksi janojen (tai niiden erilaisten fyysisten vastineiden) asettelu toisiinsa nähden kohtisuoraan on jo lapsille luonteva toimenpide. Ihminen kehollisena toimijana oppii kohtisuoruuden idean viimeistään silloin, kun hän oppii seisomaan. Janan jakamisidea kahteen yhtä suureen osaan on vastaavasti perin juurin tuttua; lapsi voi oppia sen vaikkapa laittamalla laudanpalan tasapainoon jonkin tukikappaleen päälle, kiikkerässä soutuveneessä istumalla jne. Janan jakaminen esimerkiksi viiteen yhtä suureen osaan on hyvin ymmärrettävää kokemuksen kautta sekin. Pituuksien ja kulmien vertailu ovat nekin monin tavoin tavallisia toimintoja jo pienellä lapsella. Kaikki se mikä edellä on rakenneltu ”janoja risteyttämällä” onnistuu koulussa ilman mainittavampia esitietoja.

Luokanopettajien didaktisissa opinnoissa voidaan keskittyä itse konstruktioihin erilaisilla fyysisillä tasoilla, esimerkiksi oikeita leijoja rakentamalla, ja niistä edelleen nouseviin havaintoihin ja kysymyksiin. Tällöin myös monelta suunnalta esiin nouseva STEM-ajattelu saataisiin mukaan (vrt. esim. Abramowich & Grinshpan 2012). Ainakin aineenopettajien vastaavissa opinnoissa on syytä painottaa vielä todistamisia.

Esimerkiksi Pehkosen artikkelissa (2015) näyttää olevan samankaltaisia päämääriä kuin tässä kirjoituksessa. Siellä korostetaan muun muassa aktiivisen työskentelyn merkitystä oppimisessa: yksilön tietorakenne muotoutuu ja muuttuu vain hänen toimintansa kautta. Tämän kirjoittajan kokemukset toiminnallisten työmuotojen ideoinnissa liittyvät myös ongelmanratkaisuun ja prosessinäkökulmaan matematiikassa sekä siellä luontevasti nouseviin vaatimuksiin hypoteesien todistamisesta (esim. Poranen 2020a, 2020b); tällöin näyttää syntyvän ikään kuin oheistuotteina monia kiinnostavilta vaikuttavia toiminnallisia ajatuksia.

LÄHTEET

Abramowich, S., Grinshpan, A. (2012). BRIDGING K-12 AND UNIVERSITY MATHEMATICS: BUILDING THE STAIRCASE FROM THE TOP. Open Mathematical Education Notes. Vol. 2 (2012), 1 - 21.

Husserl, E. (2007). Geometrian alkuperä. (Der Ursprung der Geometrie, 1954.) Suomentaneet Kaisa Heinlahti ja Tuukka Perhoniemi. Johdanto: Jacques Derrida. Tampere: Eurooppalaisen filosofian seura, 2007.

Joutsenlahti, J. (2005). Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Acta universitatis Tamperensis 1061.

Keranto, T. (2018). Rakentavan argumentaation sekä todistusajattelun kehittämismahdollisuuksista koulumatematiikassa. Teoksessa Matematiikan opetus ja oppiminen, Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.). Niilo Mäki Instituutti, 432–448.

Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T. (2007). Johdatus tasogeometriaan. Porvoo, Helsinki, WSOY Oppimateriaalit Oy.

Leino, P. (2015). Suomen kielioppi. Otavan kirjapaino Oy, Keuruu.

Lindgren, S. (2004). Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä. P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), 381–396.

Nevanlinna, R. (1964). Suhteellisuusteorian periaatteet. Porvoo, Werner Söderström osakeyhtiö. Toinen painos.

Pehkonen, E. (2015). Ongelmakentät keinona edistää oppilaiden matemaattista ymmärrystä peruskoulussa. Teoksessa Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2014, Oulu. P. Hästö & H. Silfverberg (toim.), 71–80.

Poranen, J., Yrjänäinen, S. (2015). Polyasta tunkkiin, tunkista Penrosen laatoitukseen: esimerkki merkitysnarratiivin rakentumisesta. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura, Oulun tutkimuspäivät 2014.

Poranen, J. (2020a). On the process aspect in mathematics through genuine problem-solving. Teoksessa *Subject Teacher Education in Transition*. *Educating Teachers for the Future*. Edited by Ropo, E., & Jaatinen, R. Tampere University Press. ISBN 978-952-359-016-8 (PDF).

Poranen, J. (2020b). Lyhintä reittiä pitkin suurimpaan kulmaan – matkakertomus. *Solmu* 2/2020, 14-20.

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). Elämyksellisyyttä tavoittelemassa. Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Acta Universitas Tamperensis 1550. Tampere University Press. Tampere.

Schoenfeld, A.H. (2012). Problematizing the didactic triangle. ZDM Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-012-0395-0.

Silfverberg, H., Viilo, M-L., Pippola, L. (1997). Matematiikan Taito 3. Geometria. Lukion pitkä matematiikka. Porvoo, WSOY.

Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto, opettajankoulutuslaitos, Tampereen toimipaikka. Vammalan kirjapaino Oy.

Silfverberg, H. (2018). Geometrinen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena. Teoksessa Matematiikan opetus ja oppiminen, Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.). Niilo Mäki Instituutti, 86–109.

Väisälä, K. (1965). Geometria. Yhdeksäs painos. Porvoo, Helsinki, Werner Söderström osakeyhtiö.