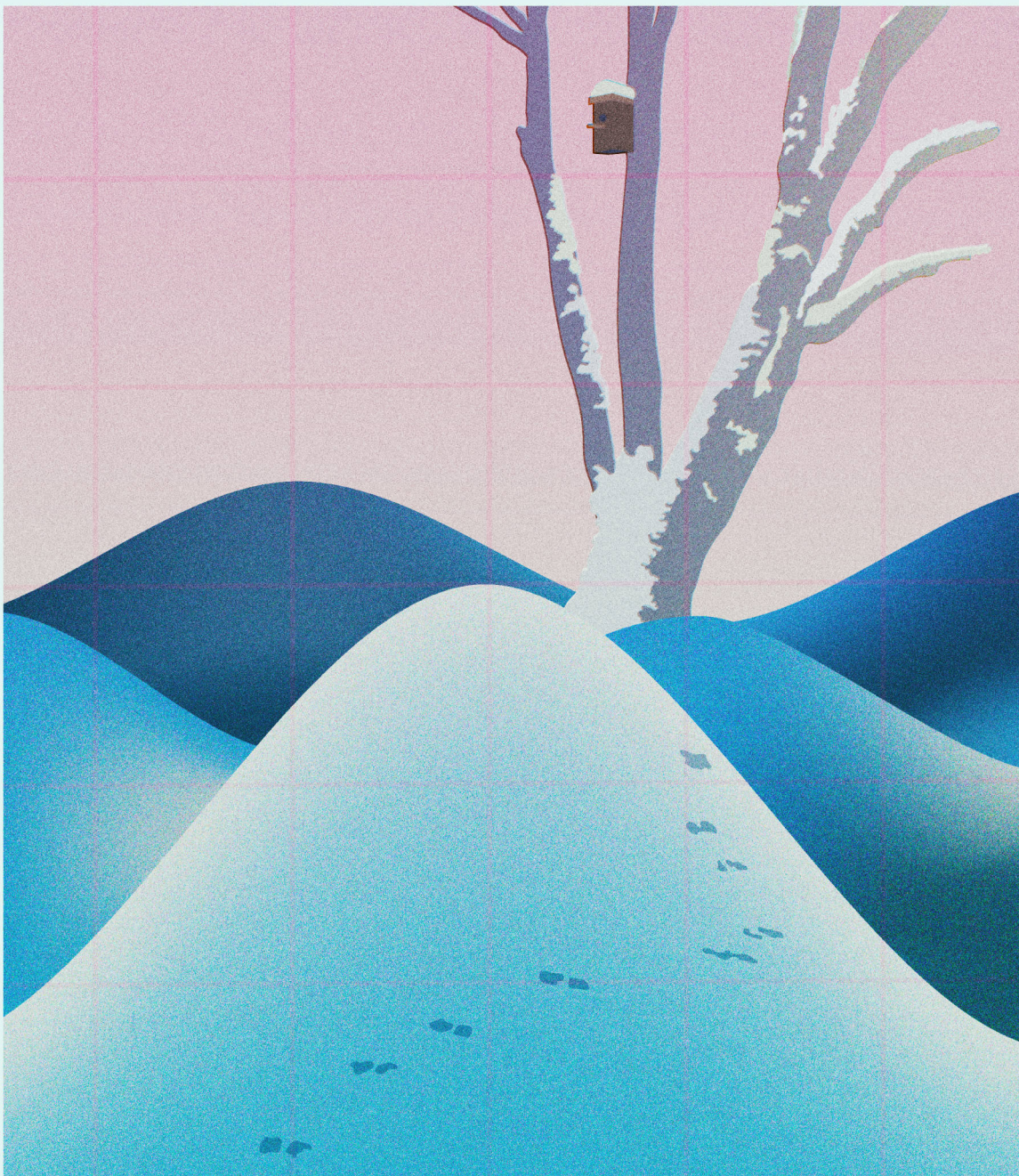


S&LMU

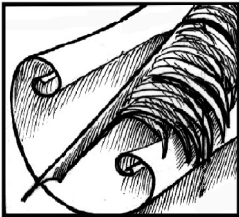
MATEMATIIKKALEHTI 3/2022

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Ylioppilaskirjoitukset, pääsykoepisteet ja aineiden suosio (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten 2022 tehtäviä ja ratkaisuja (Aino Aulanko, Siiri Roschier, Anni Tapionlinna, Minea Tiitinen)	5
Pelkkää tylsyyttä odotettavissa? (Jukka Liukkonen)	8
Onpas niitä paljon! (Neea Palojärvi)	14
Tarinoita polynomeista (osa 2) (Jukka Tuomela)	18
Harmonisesta keskiarvosta (Pekka Smolander)	26
Solmun tehtäviä	29



Ylioppilaskirjoitukset, pääsykoepisteet ja aineiden suosio

Pääkirjoitus

Olen usein törmännyt huoleen siitä, että matematiikan antamat korkeat valintapisteet vievät kirjoittajia joiltakin muilta aineilta, kuten kieliltä. Kielissä ei ole enää samoja määriä kirjoittajia kuin aiemmin. Vaikka englantia kirjoitetaan sankoin joukoin, mikä onkin tärkeää kansainvälistyvissä maailmassa, ovat monen muun kielen kirjoittajamäärät melko vähäisiä, mikä on sääli, sillä vaikka englannin osaaminen on tärkeää, on muidenkin kielten osaamisesta usein hyötyä.

Tässä tekstissä pyrin analysoimaan korkeakouluvalintojen vaikutusta eri aineiden suosioon kirjoitettavina aineina. Jotta analyysissä on mitään pohjaa, on ensin huomioitava tutkintojen kokonaismäärän kehitys, samoin aineiden lukumäärän kehitys tutkinnossa.

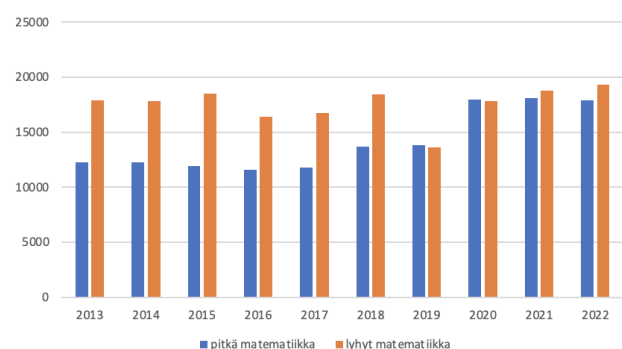
Tilaston [1] perusteella näemme, että tutkintojen lukumäärä on hieman vähentynyt vuosien 2013–2021 aikana. Nykyään tutkintoja suoritetaan runsaat 29000 vuodessa siinä missä vuosina 2013 ja 2014 melkein 32000 vuodessa. Toinen mielenkiintoinen kysymys on tutkinnon sisältämien kokeiden lukumäärä. Saman taulukon mukaan tutkinnon sisältämien kokeiden määrä on kasvanut aavistuksen: keskiarvo on noussut 5,3:sta 5,5:een. Kaiken kaikkiaan erot ovat kuitenkin sen verran pieniä, että kovin merkittäviä eroja kokeiden kirjoittajamäärissä näillä ei voine selittää.

Tarkastellaan seuraavaksi eri kokeisiin ilmoittautuneiden määrää eri koekerroilla. Tämän datan hyödyntäminen ei ole täysin ongelmaton, sillä osa kokelaista ei tule kokeeseen ilmoittautumisesta huolimatta ja osa kokelaista puolestaan uusii kokeen. Tämä ei siis anna

absoluuttista dataa siitä, kuinka moni todella suorittaa jonkun aineen kokeen. Tämän datan hyvä puoli on kuitenkin se, että se on avoimesti tarjolla ja pitkällä aikavälillä, eli vuodesta 2013 lähtien.

Eri koekerroilla eri kokeisiin osallistuneiden määrät viime vuosina löytyvät arvosanajakaumataulukosta [2]. Tämän taulukon ongelma vain on se, että se käsittelee vain aivan viime vuosia, eli vuosia 2020–2022 ja tässä pidemmän ajan data olisi tarpeen. Sen, miten ilmoittautumiset jakautuvat ensikertalaisten ja uusijoiden kesken vuosina 2018–2022 löytää taulukosta [3]

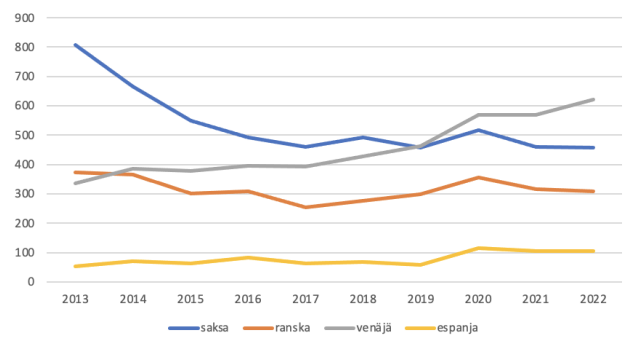
Käsitellään ensin matematiikan kokeisiin ilmoittautuneiden lukumäärän kehitys. Taulukon [4] datalla voidaan piirtää taulukkolaskentaohjelmassa seuraava kuvaaja:



Kuvaajasta voi tehdä muutamia mielenkiintoisia havaintoja. Ensinnäkin pitkän matematiikan kirjoittajien määrä oli varovaisesti kasvamaan päin, kunnes vuonna

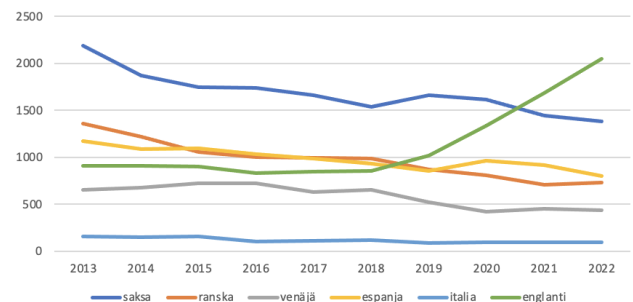
2020 se lisääntyi voimakkaasti. Lyhyen matematiikan ilmoittautuneiden määrä on pysynyt melko samoissa. Vuosi 2019 on mielenkiintoinen notkahdus. Tällöin matematiikan kokeet olivat ensimmäisen kerran sähköisinä, jolloin moni teknisestä osaamisestaan epävarma oli pyrkinyt kirjoittamaan matematiikan jo vuoden 2018 aikana, jos suinkin mahdollista. Melko selvää on, että pitkään matematiikkaan sisäänpääsyyuudistus toi uusia kirjoittajia, ja vertailemalla vuosien 2018–2022 kirjoittajamääriä taulukossa [3] tämän väitteen voi vahvistaa. Siitä taulukosta kuitenkin huomaa myös sen, että hyväksytyn suorituksen uusijoiden määrä on lisääntynyt huomattavasti. Matematiikasta halutaan hyvä arvostana. Kaikki ilmoittautuneet eivät toki ilmesty kokeeseen, jolloin koko totuus ei välity taulukon luvuista.

Vertailun vuoksi todettakoon, että pitkän englannin kokeeseen ilmoittautuu vuodessa yli 40000 kokeilasta. Esimerkiksi vuoden 2022 osalta näistä yli 10000 on ollut hyväksytyn korottajia. Se ei kuitenkaan muuta sitä, että pitkää englantia kirjoitetaan ihan valtavasti. Vuodesta 2013 alkaen määrä on kasvanut jonkin verran, tässäkin on hyppy vuoden 2020 kohdalla ylöspäin. Muut pitkät kielet ovat selvästi harvinaisempia. Keskiytään tarkastelussa vain ei-kotimaisiin kieliin. Espanjan, ranskan, saksan ja venäjän pitkän oppimäärän kokeisiin vuosittain ilmoittautuneiden määrä on seuraavassa kuvaajassa – pitkän latinan kirjoittajien määrä on ollut niin pieni, että sen jätin pois. Kuten luvuista näkee, ovat lukumäärät varsin pieniä. Espanjassa ja venäjässä on merkittävä prosentuaalinen nousu, saksassa puolestaan lasku.



Lyhyet kielet ovat kuitenkin tarkastelun kannalta ehkä kiinnostavampia – päätös lukea A-kieltä tehdään jo lapsena, kun taas lyhyen kielen opiskelu aloitetaan myöhemmin, jolloin tulevaisuuden suunnitelmat jo ehkä hieman enemmän vaikuttavat ratkaisuihin. Lisäksi myös kynnys jättää kirjoittamatta aine, jota on lukenut vain joitakin vuosia, eikä vaikkapa kolmannelta luokasta alkaen, on ehkä matalampi. Seuraavassa kuvaajassa on useiden lyhyiden kielten ilmoittautujamäärät vuosittain. Kuvaajasta on kaikkein pienimmät kielet jätet-

ty pois. Yleisesti ottaen lyhyiden kielten ilmoittautujamäärät ovat laskussa, paitsi englantia nousee voimakkaasti. Huomionarvoista on kuitenkin se, että lasku on alkanut jo paljon aikaisemmin kuin sisäänpääsyyuudistuksen aikaan. Tämä data ei ainakaan tue sitä väitettä, että korkeakoulujen pisteytysjärjestelmä veisi kirjoittajia lyhyiltä (tai pitkiltä) kieliltä, vaan syyt ovat ihan muualla.

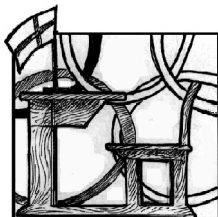


Reaaliaineet jätän tämän tekstin ulkopuolelle, sillä niitä on melko paljon, eivätkä ne välttämättä sovi vastaavaan yksittäiseen karsinaan kuin lyhyet kielet tai pitkät kielet tai matematiikan oppimäärät. Kuitenkin niiden ilmoittautumisdata on myös lähteessä [4]. Niistä voisinkin kuitenkin todeta sen, että myös hyvin monen reaaliaineen suosio on vuosien varrella noussut. Toki poikkeuksiakin on. Muutos niidenkin tapauksessa on pitkäjänteistä kehitystä. Toki yksittäisiä hyppyjäkin löytyy, mutta pitkän aikavälin dataa tuijottaessa pääpiirre tuntuu olevan se, että reaaliaineiden suosio määräytyy muilla tekijöillä kuin sisäänpääsypisteillä.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Viitteet

- [1] YTL: Kokeiden määrä tutkinnossa 2013–2022. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/ext/stat/FS2022A2013T4020.pdf>
- [2] YTL: Arvosanajakaumat 2020–2022. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/ext/stat/FS2022A2020T4002.pdf>
- [3] YTL: Uusintojen osuus ilmoittautumisissa kokeittain 2018–2022. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/ext/stat/FS2022A2018T2041.pdf>
- [4] YTL: Ilmoittautuneet eri kokeisiin tutkintokerroittain 2013–2022. <https://www.ylioppilastutkinto.fi/ext/stat/FS2022A2013T2010.pdf>



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten 2022 tehtäviä ja ratkaisuja

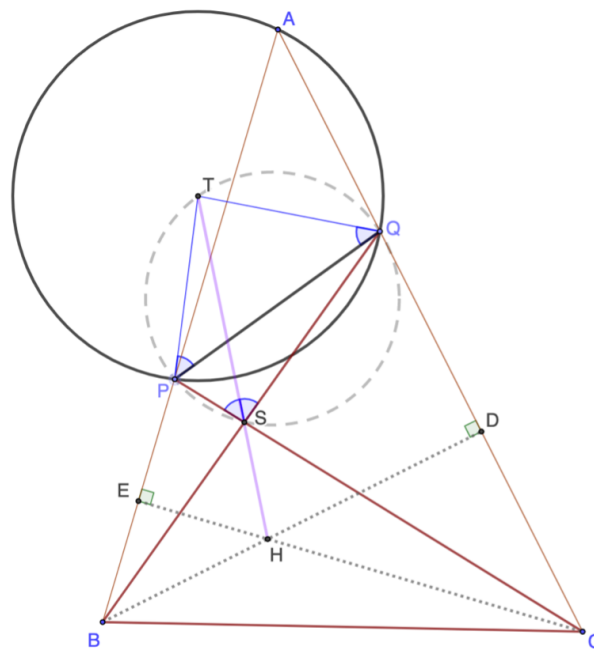
Aino Aulanko, Siiri Roschier, Anni Tapionlinna, Minea Tiitinen

Tehtävä 1: Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa on voimassa $BC < AB$ ja $BC < CA$. Olkoon P sellainen piste janalla AB ja Q sellainen piste janalla AC , että $P \neq B, Q \neq C$ ja $BQ = BC = CP$. Olkoot T kolmion APQ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, H kolmion ABC ortokeskus ja S suorien BQ ja CP leikkauspiste. Osoita, että pisteet T, H ja S ovat samalla suoralla.

Ratkaisu (Siiri): Todistus perustuu sen osoittamiseen, että sekä piste H että piste T ovat kulman $\angle BSC$ kulmanpuolittajalla. Osoitetaan aluksi, että piste H on tällä kulmanpuolittajalla. Koska $BQ = BC = CP$, on kolmio $\triangle BCP$ tasakylkinen, ja siten sen kulmasta C lähtevä korkeusjana on myös sen kulmanpuolittaja. Täten sen kulmanpuolittaja kulkee pisteen H kautta. Sama voidaan osoittaa identtisesti kolmiolle $\triangle QBC$, ja saadaan, että kulmien $\angle CBQ = \angle CBS$ ja $\angle PCB = \angle SCB$ kulmanpuolittajat kulkevat pisteen H kautta. Koska kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat kaikki samassa pisteessä, voidaan huomata myös kulman $\angle BSC$ kulmanpuolittajan kulkevan pisteen H kautta.

Ristikulmina $\angle BSC = \angle QSP$. Tasakylkisestä kolmiosta $\triangle BCP$ saamme, että $\angle PCB = \angle SCB = 180^\circ - 2\angle B$, ja vastaavasti kolmiosta $\triangle QBC$ yhtäsuuruuden $\angle CBQ = \angle CBS = 180^\circ - 2\angle C$. Tästä saamme

$$\begin{aligned}\angle QSP &= \angle BSC = 180^\circ - \angle SCB - \angle CBS \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle B) - (180^\circ - 2\angle C) \\ &= 180^\circ - 2\angle A.\end{aligned}$$



Koska T on ympyrän APQ keskipiste, $\angle PTQ = 2\angle PAQ = 2\angle BAC = 2\angle A$. Nyt $\angle PTQ + \angle QSP = 2\angle A + 180^\circ - 2\angle A = 180^\circ$, ja $PTQS$ on jännekuilu. Koska ympyrän säteinä $PT = TQ$, ovat niiden kehäkulmatkin samat, $\angle TSP = \angle TQP = \angle QPT = \angle QST$. Siis T on kulman $\angle QSP$ kulmanpuolittajalla, joka on sama suora kuin ristikulman $\angle BSC$ puolittaja, jolla H sijaitsee, ja voimme todeta, että pisteet T, S ja H sijaitsevat kaikki samalla suoralla, joka on kulman $\angle QSP$ kulmanpuolittaja.

Tehtävä 2: Olkoon $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f: N \rightarrow N$, joille pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvulla a, b

$$(1) f(ab) = f(a)f(b) \text{ sekä}$$

(2) ainakin kaksi luvusta $f(a)$, $f(b)$ ja $f(a+b)$ ovat yhtäsuuria.

Ratkaisu (Anni): Vastaukseksi saadaan $f(n) = k^{\nu_p(n)}$, jossa $k \in N$, p on alkuluku ja $\nu_p(n)$ on p :n suurin potenssi, joka jakaa n :n.

Ensiksi voimme todeta kaikkien tätä muotoa olevien funktioiden toteuttavan ehdot. Ensimmäinen ehto pätee, sillä

$$\begin{aligned} f(ab) &= k^{\nu_p(ab)} = k^{\nu_p(a) + \nu_p(b)} \\ &= k^{\nu_p(a)} \cdot k^{\nu_p(b)} = f(a)f(b). \end{aligned}$$

Toinen ehto pätee, sillä jos $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, niin selkeästi $f(a) = f(b)$, ja jos $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, niin pätee $\nu_p(a+b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$, jolloin $f(a+b) = f(a)$ tai $f(a+b) = f(b)$.

Seuraavaksi osoitetaan näiden olevan ainoat ratkaisut. Sijoittamalla $a = b = 1$ ensimmäiseen yhtälöön saadaan $f(1) = 1$. Lisäksi yksinkertaisella induktiolla saadaan

$$f\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^k f(p_i)^{\alpha_i}.$$

Olkoon S joukko alkulukuja p , joilla $f(p) \neq 1$. Jos $|S| = 1$, niin $S = \{p\}$ ja $f(p) = k$ jollain $k \neq 1$, ja siksi aiemman induktion tuloksesta $f(n) = K^{\nu_p(n)}$. Toisaalta, jos S on tyhjä joukko, niin $f(n) = 1$ kaikilla n , jonka voi kirjoittaa aiemmassa muodossa, kun $k = 1$. Oletetaan nyt, että S sisältää vähintään kaksi alkulukua. Olkoot $p < q$ joukon kaksi pienintä alkioita. Koska kaikki $q-p$:n alkutekijät ovat q :ta pienempiä ja erisuuria kuin p , niin $f(q-p) = 1$. Käyttäen ehtoa (2) lukuihin p ja $q-p$ saadaan, että jotkin kaksi luvusta $f(p) \neq 1$, $f(q) \neq 1$, $f(q-p) = 1$ ovat yhtäsuuria. Tästä seuraa, että $f(p) = f(q)$. Olkoon $t \geq 2$ pienin kokonaisluku, jolla $p^t > q$, ja merkitään $p^t = aq + b$, jossa $0 \leq b < q$. Koska $q \geq p^{t-1}$, eikä q ole jaollinen p :llä, niin saamme $q > p^{t-1}$, eli $a < p$ ja siksi $f(a) = 1$. Tästä seuraa, että aq ei ole jaollinen p :llä eikä täten myöskään b ole. Koska $b < q$, niin $f(b) = 1$, nyt käyttäen toista ehtoa lukuihin aq ja b saamme, että jotkin kaksi luvusta $f(aq) = f(a)f(q) = f(q) = f(p)$, $f(b) = 1$ ja $f(aq+b) = f(p^t) = f(p)^t$ ovat yhtäsuuria, mikä on ristiriita, joten joukko S sisältää joko yhden tai ei yhtäkään alkulukua, jolloin ainoa ratkaisu on $f(n) = k^{\nu_p(n)}$.

Tehtävä 4: On annettu positiivinen kokonaisluku $n \geq 2$, selvitä suurin positiivinen kokonaisluku N , jota kohti on olemassa $N+1$ reaalilukua $a_0, a_1, \dots, a_N$, joilla

$$(1) a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} \text{ ja}$$

$$(2) (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}, \text{ kun } 1 \leq k \leq N-1.$$

Ratkaisu (Aino): Kerron tässä oman ratkaisuni sekä sen, minkä ideoiden kautta päädyin siihen.

Kokeilin ensin, mitä tapahtuu, jos $n = 2$. Nyt valitaan $k = 1$, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} (a_1 + a_0)(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{2}a_1 - a_0 + \frac{1}{2}a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}(a_1 + a_0) - \frac{1}{2}(a_0 - a_2) &= 0 \\ -\frac{1}{2}(a_0 - a_2) &= -\frac{1}{4} \\ a_0 - a_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön ja saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) &= \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= -1. \end{aligned}$$

Nyt valitaan $k = 2$:

$$\begin{aligned} (a_2 + a_1)(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\ -a_2 - a_3 &= a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten kun $n = 2$, niin $N = 2$.

Nyt on selvää, että N :lle on olemassa raja ainakin jollain n . Kun tämä oli tiedossa, päätin kokeilla, mitä arvoja saadaan lukujonon alussa mielivaltaisella n :

$$\begin{aligned} (a_1 + a_0)(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{n}a_1 - a_0 + \frac{n-1}{n}a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_0) - \frac{n-1}{n}(a_0 - a_2) &= 0 \\ -\frac{n-1}{n}(a_0 - a_2) &= -1/n^2 \\ a_0 - a_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_2) &= \frac{1}{n(n-1)} \\ a_1 + a_2 &= -\frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Kokeillaan vielä, mitä tapahtuu, kun $k = 2$:

$$\begin{aligned}(a_2 + a_1)(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\ -\frac{1}{n-1}(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\ -\frac{1}{n-1}a_2 + \frac{n-2}{n-1}a_3 - a_1 &= 0 \\ -\frac{1}{n-1}(a_2 + a_1) &= \frac{n-2}{n-1}(a_1 - a_3) \\ a_1 - a_3 &= \frac{1}{(n-2)(n-1)}, \\ -\frac{1}{n-1}(a_2 + a_3) &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\ a_2 + a_3 &= -\frac{1}{n-2}.\end{aligned}$$

Näyttäisi siltä, että $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla k , ja ristiriita tulee, kun $a_k + a_{k-1} = -1$. Varmistetaan vielä, että ristiriita tosiaan seuraa tästä jokaisella n :

$$\begin{aligned}(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\ -a_k - a_{k+1} &= a_{k-1} - a_{k+1} \\ a_{k-1} + a_k &= 0.\end{aligned}$$

Nyt tarvitsee enää todistaa, että $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla k . Tehdään tätä varten induktio-oletus, että tämä pätee k :lla, ja osoitetaan, että tällöin se pätee myös $k+1$:llä:

$$\begin{aligned}(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\ -\frac{1}{n-k+1}a_k - \frac{1}{n-k+1}a_{k+1} &= a_{k-1} - a_{k+1} \\ -\frac{1}{n-k+1}(a_{k-1} + a_k) &= \frac{n-k}{n-k+1}(a_{k-1} - a_{k+1}) \\ a_{k-1} - a_{k+1} &= \frac{1}{(n-k)(n-k+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\ -\frac{1}{n-k+1}(a_k + a_{k+1}) &= \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} \\ a_k + a_{k+1} &= -\frac{1}{n-k} = -\frac{1}{n-(k+1)+1}.\end{aligned}$$

Induktiodistatus on nyt valmis, sillä alkuaskel on jo tehtävänannossa, jossa annettiin $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} = -\frac{1}{n-1+1}$.

Siis $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla n ja k , ja ristiriita tulee, jos ja vain jos $a_k + a_{k-1} = -1$, eli kun $n-k+1 = 1$ eli $k = n$. Lukujonoa voidaan siis jatkaa a_n :ään asti, mutta ei pidemmälle. Siispä $N = n$.

Sain omasta ratkaisustani kuusi pistettä, koska unohdin mainita, että luvut a_0 ja a_1 on aina mahdollista löytää. Tämä on kuitenkin triviaalia, sillä $a_1 = -\frac{1}{n} - a_0$, joka on reaaliluku jokaisella reaaliluvulla a_0 .

Tehtävä 5: Olkoon $f(n, 2k)$ lukumäärä, joka kertoo kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, k , kuinka monella eri tavalla $n \times 2k$ -lauta voidaan peittää täysin nk kappaleella kokoa 2×1 olevilla dominolaatoilla. (Esimerkiksi on $f(2, 2) = 2$ ja $f(3, 2) = 3$.) Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k luku $f(n, 2k)$ on pariton.

Ratkaisu (Minea): Olkoon $f(m, n)$ lukumäärä, joka kertoo erilaisten laatoitusten lukumäärän $m \times n$ -laudalla. (Käytännöllisyyden vuoksi määritellään, että jos $m = 0$ tai $n = 0$, niin $f(m, n) = 1$.)

Väite 1: $f(m, 2n+1) = f(m, n) \pmod{2}$ kaikilla luvuilla n ja parillisilla luvuilla m .

Todistus: Peilataan $m \times (2n+1)$ laatoitukset keskisarakeen suhteen. Nyt kukin peilattu laatoitus on samanlainen joko itsensä tai jonkun toisen alkuperäisen laatoituksen kanssa. Toiselle laatoitukselle peilautuvia laatoituksia on parillinen määrä, joten modulossa 2 tarkasteltuna $f(m, 2n+1)$ on kongruentti itselleen peilautuvien laatoitusten lukumäärälle.

Itselleen peilautuvissa laatoituksissa keskisarakeen on pysyttävä muuttumattomana peilauksessa, joten keskisarakeessa on oltava $m/2$ pystysuoraa dominopaliikkaa. Sen molemmille puolille jää $m \times n$ kokoinen osa laudasta. Koska lauta on keskisarakeen suhteen itselleen peilautuva, jokaista oikean puolen laatoitusta vastaa yksi mahdollinen vasemman puolen laatoitus. Itselleen peilautuvien laatoitusten lukumäärä on siis $f(m, n)$, joten $f(m, 2n+1) = f(m, n) \pmod{2}$.

Väite 2: $f(n, n) = 0 \pmod{2}$ kaikille parillisille $n \geq 2$.

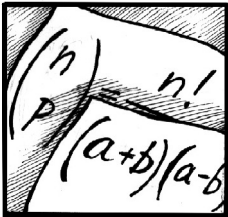
Todistus: Jos $n \times n$ -laudan laatoitus peilataan lävis-täjänsä suhteen, se ei voi peilautua itselleen. Jokaisella laatoituksella on peilattuna pari, joten $n \times n$ -laatoitusten määrä on aina parillinen.

Ensimmäisestä väitteestä seuraa, että luku n toteuttaa vaatimuksen, jos ja vain jos luku $\frac{1}{2}(n-1)$ toteuttaa.

Jos $n \geq 2$, toisen väitteen perusteella luku n ei toteuta vaatimusta.

Jos $n = 0$, määritelmän mukaan luku n toteuttaa vaatimuksen, sillä $f(m, 0) = 1$.

Etsityt luvut n ovat siis muotoa $2^k - 1$. (Huomaa, että tämä sisältää myös tapauksen $n = 0$.)



Pelkkää tylsyyttä odotettavissa?

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Lokeromalli

Pallot ja lokerot kuuluvat todennäköisyyslaskennan harrastajan perusasettiin. Palloja heitellään lokeroihin sattumanvaraisesti ja lasketaan todennäköisyyksiä. Tässä artikkelissa palloja on n kappaletta ja lokeroita m kappaletta. Sekä pallot että lokerot voidaan erottaa toisistaan; periaatteessa niiden kylkiin voidaan maalata yksilölliset tunnisteet. Lokerot muodostavat lokerikon, jossa on $m - 1$ väliseinää.

$$\begin{aligned} \text{Pallot: } \beta \in \{1, \dots, n\} \\ \text{Lokerot: } \ell \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Olkooot kaikki pallot jo lokerikossa. Erilaiset palloasetelmat samastetaan kokonaislukujonojen

$$\mu = (\ell_1, \dots, \ell_n), \quad 1 \leq \ell_\beta \leq m,$$

kanssa. Niitä kutsutaan **mikrotiloiksi**. Jono tulkitaan niin, että pallo β on lokerossa ℓ_β .

Makrotilat ovat lukumääräonoja

$$M = (k_1, \dots, k_m), \quad k_1 + \dots + k_m = n.$$

Luku $k_\ell \geq 0$ ilmoittaa, kuinka monta palloa on lokerossa ℓ . Yhteen makrotilaan liittyy yleensä monta mikrotilaa.

Pallon β osumistodennäköisyys lokeroon ℓ oletetaan pallosta ja lokerosta riippumattomaksi vakioksi $1/m$. Silloin mikrotilojen todennäköisyydet ovat keskenään samat.

Esimerkki. Kolme palloa P1, P2 ja P3 sijoitetaan kahteen lokeroon L1 ja L2. Kaikki mahdolliset mikro- ja makrotilat ovat:

Mikrotila		Makrotila	
L1	L2	L1	L2
	P1,P2,P3	0	3
P1	P2,P3	1	2
P2	P1,P3	1	2
P3	P1,P2	1	2
P1,P2	P3	2	1
P1,P3	P2	2	1
P2,P3	P1	2	1
P1,P2,P3		3	0

Esimerkiksi makrotila $(1, 2)$ koostuu mikrotiloista $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ ja $(2, 2, 1)$. Tällöin sanotaan, että makrotilan $(1, 2)$ **multiplisiteetti** on 3. Mikrotilojen todennäköisyydet ovat keskenään samat, joten makrotilan todennäköisyys saadaan jakamalla sen multiplisiteetti kaikkien mikrotilojen lukumäärällä eli kaikkien

makrotilojen multiplisiteettien summalla. Multiplisiteetit ja todennäköisyydet ovat:

Makrotila	Multiplisiteetti	Todennäköisyys
(0,3)	1	1/8
(1,2)	3	3/8
(2,1)	3	3/8
(3,0)	1	1/8

Lukijalle saattaa tulla mieleen Pascalin kolmion potenssia 3 vastaava rivi. ▲

Variaatiot, permutaatiot ja kombinaatiot

Tarkoituksena on selvittää, montako erilaista k -alkioista osajoukkoa on n -alkioisella joukolla A . Kysymystä lähestytään helpommin ratkaistavan ongelman kautta: montako k -alkioista jonoa voidaan muodostaa joukon A alkioista, kun yksi alkio saa esiintyä jonossa vain kerran? Tilastotieteen termein kysymyksessä on *otanta ilman takaisinpanoa*. On syytä muistaa, että joukosta puhuttaessa alkioiden keskinäisellä järjestyksellä ei ole väliä. Sitä vastoin jonon alkioiden järjestyksellä on ratkaiseva merkitys. Jonojen lukumäärän laskemiseksi lähdetään liikkeelle seuraavalla tavalla:

- Jonon ensimmäiseksi alkioiksi kelpaa mikä tahansa n alkioista.
- Jokaista ensimmäisen alkion valintaa kohti jäljellä on $n-1$ mahdollista seuraajaa. Tällöin 2-alkioisia erilaisia jonoja on $n(n-1)$ kappaletta.
- Jokaista kaksialkioista jonoa kohti on $n-2$ vaihtoehtoa kolmanneksi alkioiksi, joten 3-alkioisia erilaisia jonoja on kaikkiaan $n(n-1)(n-2)$ kappaletta.

Jatkamalla jonon pidentämistä alkio kerrallaan havaitaan, että erilaisten k -alkioisten jonojen, joukon A **k -variaatioiden**, lukumäärä on

$$(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Erityisesti n -alkioisia erilaisia jonoja, joukon A **permutaatioita**, on

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

kappaletta. Tälle tulolle on aikojen kuluessa vakiintunut merkintä

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Joukko, joka koostuu n alkioista, voidaan siis järjestää jonoksi $n!$ eri tavalla. Lukumäärää $n!$ kutsutaan *n -kertomaksi*. Yleisesti on sovittu, että $0! = 1$. Laven-tamalla tulolla $(n-k)!$ voidaan kirjoittaa

$$(n)_k = \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Jos k -alkioisia erilaisia osajoukkoja on x kappaletta, ja edellä todetun mukaisesti jokainen näistä joukoista voidaan järjestää jonoksi $k!$ eri tavalla, k -variaatioiden lukumäärä on $x \cdot k!$, mutta toisaalta se on $n!/(n-k)!$. Yhtälöstä

$$x \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ratkaistaan

$$x = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Näin monta k -alkioista osajoukkoa, **k -kombinaatiota**, on n -alkioisella joukolla. Kombinaatioiden lukumäärää merkitään vakiintuneen tavan mukaisesti

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Merkintä luetaan ” n yli k :n”. Lukuja $\binom{n}{k}$ sanotaan *binomikertoimiksi*, sillä tunnetusti

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Tämä *binomikaavaksi* kutsuttu identiteetti jätetään tässä todistamatta. Kaava todistetaan ja sitä havainnollistetaan esimerkein Wikipedia-sivulla [6]. Solmus-sa binomikaavaa on käsitelty mm. Pekka Alestalo [3]. Kun $a = b = 1$, binomikaavasta nähdään binomikertoimien summa:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Binomikertoimien avulla saadaan selville makrotilojen lukumäärä. Ratkaistavana on siis tehtävä, monel-lako tavalla luku n voidaan esittää m ei-negatiivisen kokonaisluvun $k_1, \dots, k_m$ summana. Luku k_ℓ ajatellaan jonoksi, jossa on k_ℓ kappaletta ykkösiä. Summa $k_1 + \dots + k_m$ koostuu silloin ykkösistä, joita on n kappaletta, ja plusmerkeistä, joita on $m-1$ kappaletta. Montako tällaista jonoa on olemassa? Jos plusmerkin jommallakummalla puolella ei ole ykköstä, sillä kohdalla on tyhjä lokero, ja summassa $k_1 + \dots + k_m$ vastaavasti nolla. Ykkösten ja plusmerkkien jonossa on kaikkiaan $n+m-1$ paikkaa. Niistä voidaan valita paikat $m-1$ plusmerkille

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

eri tavalla. Yhtälö johtuu binomikertoimien symmetriasta.

Erilaisia makrotiloja on

$$\binom{n+m-1}{n}$$

kappaletta.

Multinomikertoimet

Makrotila $(k_1, \dots, k_m)$, missä $k_1 + \dots + k_m = n$, koostuu yhdestä tai useammasta mikrotilasta. Tarkan lukumäärän eli makrotilan multiplisiteetin laskemiseksi päätellään seuraavasti:

- Valittaessa k_1 palloa lokeroon 1 erilaisia vaihtoehtoja on $\binom{n}{k_1}$ kappaletta.
- Kun lokeroon 1 on pallot valittu, mahdollisia valintoja lokeroon 2 palloiksi on $\binom{n-k_1}{k_2}$ kappaletta. Siis kahden ensimmäisen lokeron sisältö voidaan valita $\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2}$ eri tavalla.
- Jokaista jo tehtyä valintaa kohti lokeroon 3 pallot voidaan valita jäljellä olevien $n-k_1-k_2$ pallon joukosta $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ eri tavalla. Kolmen ensimmäisen lokeron sisällöiksi on täten $\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ erilaista vaihtoehtoa.

Jatkamalla samaan tyyliin loppuun asti havaitaan, että vaaditut ehdot täyttäviä palloasetelmia on kaikkiaan

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{k_m}{k_m} \\ &= \frac{n!}{k_1! (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! (n-k_1-k_2)!} \\ & \quad \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3! (n-k_1-k_2-k_3)!} \cdots \\ & \quad \cdot \frac{k_m!}{k_m! 0!} \\ &= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö saadaan supistamalla joka kohdassa tulon osamäärämuotoisen tekijän nimittäjästä ja seuraavan tekijän osoittajasta yhteinen tekijä pois. Lukuja

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

sanotaan *multinomikertoimiksi*, sillä

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

Yhtälön todistus sivuutetaan. Lukija voi niin halutessaan todistaa sen itse tai katsoa todistuksen Wikipediasta [8].

Makrotilan $\mathbf{M} = (k_1, \dots, k_m)$ multiplisiteetti on

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m}.$$

Esimerkki. Kun yhdeksän palloa sijoitetaan kolmeen lokeroon, makrotilan $(0, 9, 0)$ multiplisiteetti on

$$\binom{9}{0, 9, 0} = \frac{9!}{0! \cdot 9! \cdot 0!} = 1.$$

Hajanaisemman tilan $(4, 4, 1)$ multiplisiteetti on paljon suurempi:

$$\binom{9}{4, 4, 1} = \frac{9!}{4! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 = 630.$$

Eniten levällään on tila $(3, 3, 3)$, jonka multiplisiteetti on

$$\binom{9}{3, 3, 3} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

Näyttää siltä, että mitä tasaisempi pallojakauma, sitä suurempi multiplisiteetti. ▲

Multiplisiteettien vertailua

Binomi on erikoistapaus multinomista, ja binomikertoimet ovat samalla multinomikertoimia:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}.$$

Binomikertoimista muodostetun Pascalin kolmion keskellä näyttää olevan huomattavasti suurempia lukuja kuin kolmion laidoilla. Seuraavaksi osoitetaan, että näin todella on, ja vastaava tulos pätee kaikille multinomikertoimille.

Kokonaislukujen jakoyhtälö kertoo, että jaettaessa kokonaisluku toisella saadaan osamäärä ja jakojäännös, jotka ovat kokonaislukuja ja määräytyvät yksikäsitteisesti jaettavasta ja jakajasta. Kun pallojen lukumäärä n jaetaan lokeroitten lukumäärällä m , jakoyhtälön nojalla on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut $q \geq 0$ (osamäärä) ja $r \geq 0$ (jakojäännös), joille

$$r < m \quad \text{ja} \quad n = qm + r.$$

Lause. Edellä määritellyin merkinnöin

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} \leq \binom{n}{\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r \text{ kpl}}, \underbrace{q, \dots, q}_{m-r \text{ kpl}}}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \{q, q+1\}$.

Todistus. Jos $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \{q, q+1\}$, jakoyhtälön yksikäsitteisyyden nojalla jonossa $(k_1, \dots, k_m)$ pitää esiintyä q tasan $m-r$ kertaa ja $q+1$ tasan r kertaa. Tällöin multinomikertoimet ovat yhtäsuuret.

Olkoon (*) $\{k_1, \dots, k_m\} \not\subset \{q, q+1\}$. Kaikki luvut k_h eivät voi olla isompia kuin q , sillä muulloin olisi $n = k_1 + \dots + k_m \geq m(q+1) = qm + m > qm + r$. Toisaalta, jos kaikki luvut k_h olisivat pienempiä kuin $q+1$, oletuksen (*) nojalla eräs niistä olisi aidosti pienempi kuin q , ja silloin olisi $n = k_1 + \dots + k_m < mq \leq qm + r$. Täten eräs luvuista k_h on korkeintaan q , ja eräs toinen luvuista k_h on vähintään $q+1$. Oletuksen (*) nojalla on siis välttämättä olemassa indeksit $i, j \in \{1, \dots, m\}$, joille $k_i > k_j + 1$. Merkinnät voidaan olettaa valituiksi niin, että $i=1$ ja $j=2$ (muulloin vaihdetaan merkinnät, ja pelkkä merkintöjen vaihtaminen ei muuta taustalla olevaa tilannetta). Tällöin $k_1 > k_2 + 1$, ja

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} &= \frac{1}{k_1! k_2! k_3! \dots k_m!} n! \\ &< \frac{1}{(k_1 - 1)! (k_2 + 1)! k_3! \dots k_m!} n! \\ &= \binom{n}{k_1 - 1, k_2 + 1, \dots, k_m}. \end{aligned}$$

Epäyhtälö keskellä johtuu siitä, että

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1! k_2!} &= \frac{k_2 + 1}{k_1} \frac{1}{(k_1 - 1)! (k_2 + 1)!} \\ &< \frac{k_1}{k_1} \frac{1}{(k_1 - 1)! (k_2 + 1)!} \\ &= \frac{1}{(k_1 - 1)! (k_2 + 1)!}. \end{aligned}$$

Jono $(k_1 - 1, k_2 + 1, \dots, k_m)$ on "tasaisempi" kuin alkuperäinen jono $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Jatkamalla tasoittamista tarvittaessa päädytään lopulta jonon

$$\left(\underbrace{q+1, \dots, q+1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{m-r} \right)$$

permutaatioon. ■

Tämä oli ns. laiskan matemaatikon induktiotodistus, joka tarvittaessa voidaan kirjoittaa viralliset muoto-vaatimukset täyttäväksi täydelliseksi induktioksi.

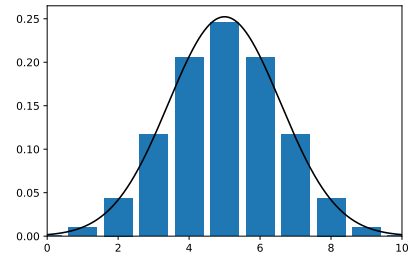
Multinomikerroin

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m}$$

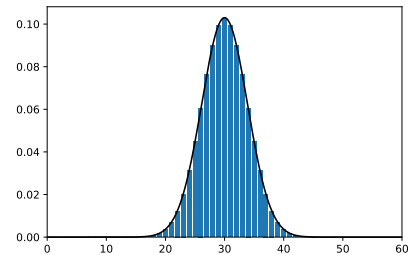
ja samalla makrotilan $\mathbf{M} = (k_1, \dots, k_m)$ multiplisiteetti suurenee, kun jonoa $\mathbf{M}$ tasoitetaan kasvattamalla sen pieniä lukuja ja pienentämällä vastaavasti suuria lukuja, kunnes ollaan tilanteessa, jossa jonon luvut poikkeavat toisistaan korkeintaan yhdellä.

Edellä saatu tulos kertoo sen, että Pascalín kolmion ja sen monilotteisessa vastineessa, jota ehkä voitai-

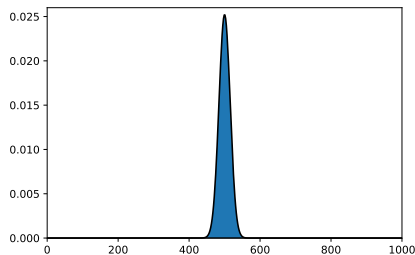
siin kutsua Pascalín m -simpleksiksi, luvut ovat suurimmillaan keskellä ja pienenevät laitoja kohti. Pienenemisen voimakkuudesta tulos ei sano mitään. Asiaa on helpointa tutkia lähtemällä liikkeelle tilanteesta $m = 2$. Seuraaviin kuviin on piirretty tekijällä 2^{-n} skaalatut binomikertoimet $2^{-n} \binom{n}{k}$ pylväinä pallomäärillä $n \in \{10, 60, 1000\}$.



Kuva 1. Pallojen lukumäärä $n=10$.



Kuva 2. Pallojen lukumäärä $n=60$.



Kuva 3. Pallojen lukumäärä $n=1000$.

Pylväät erottuvat kunnolla toisistaan vain ensimmäisessä kuvassa. Skaalauksesta johtuen pylväiden pituuksien summa on tasan 1. Silloin ne ilmoittavat suoraan pylväeseen liittyvän kahden lokeron makrotilan todennäköisyyden. Näitä todennäköisyyksiä sanotaan *binomitodennäköisyyksiksi*, ja pylväikkö on kuva *binomijakaumasta* [5]. Kuviin on vertailun vuoksi piirretty myös pylväikköön sovitetun normaalijakauman $N(n/2, n/4)$ tiheysfunktion kuvaaja [9]. Jakauman odotusarvo $n/2$ ja varianssi $n/4$ ovat samat kuin binomijakaumalla, jota tällä tavoin approksimoidaan normaalijakauman

avulla [1] [2]. Kuvien perusteella normaalijakaumasta saadaan erinomaisia likiarvoja binomitodennäköisyyksille, kun n on suuri. Jakaumia on esitelty Wikipediassa sivulla [10].

Todennäköisyys näyttää keskittyvän sitä voimakkaammin jakauman keskelle, mitä suurempi n on kyseessä. Kun n on oikein suuri, esimerkiksi $n = 10^{23}$, jakauma on arvatenkin laihtunut äärimmäisen ohueksi piikiksi¹ odotusarvon $5 \cdot 10^{22}$ kohdalle, ohueksi suhteessa odotusarvoon. Tämä tarkoittaa, että kumpaankin lokeroon hyvin tarkkaan tasaisesti jakautuneet makrotilat ovat lähestulkoon ainoat mahdolliset. Muiden tilojen todennäköisyys on häviävän pieni. Valtava enemmistö makrotiloista on siis sellaisia, jotka eivät käytännössä ”milloinkaan” toteudu. Seuraavassa kappaleessa tämä ilmaistaan täsmällisesti.

Tasaisen jakauman musertava ylivoima

Kun epäsymmetristä kolikkoa, jolle kruunan todennäköisyys on p , heitetään n kertaa, tuloksen kruuna esiintymiskertojen lukumäärää kuvaa binomijakauma $\text{Bin}(n, p)$. Sen odotusarvo μ_n ja varianssi σ_n^2 ovat tunnetusti [5]

$$\mu_n = np, \quad \sigma_n^2 = np(1-p).$$

Sama jakauma kuvaa makrotiloja, kun kruuna tulkitaan niin, että pallo osuu tiettyyn kiinteään lokeroon L. Silloin klaava vastaa tilannetta, jossa pallo sujahtaa johonkin muuhun lokeroon. Merkillepantavaa on, että keskihajonnan ja odotusarvon suhde lähestyy nollaa pallojen lukumäärän kasvaessa rajatta:

$$\frac{\sigma_n}{\mu_n} = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{np} = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Suurilla pallomäärillä binomijakaumaan liittyvät todennäköisyydet ovat hyvin tarkkaan samoja kuin vastaavan odotusarvon ja varianssin omaavaan normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet. Lokeroon L kertyneiden pallojen lukumäärää merkitään X_n . Jakauman kaventumista tutkittaessa X_n oletetaan normaalijakautuneeksi parametrein μ_n ja σ_n^2 . Normaalijakautumista tiedetään, että parametrein μ ja σ^2 normaalijakautuneen satunnaismuuttujan arvoista

- 68,2689 % sijoittuu välille $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$,
- 95,4500 % sijoittuu välille $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$,
- 99,7300 % sijoittuu välille $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$,
- 99,9937 % sijoittuu välille $[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma]$,

ja niin edelleen. Välin $[-4\sigma_n, 4\sigma_n]$ ulkopuolelle sijoittuvat pallomäärät X_n ovat siis hyvin, hyvin harvinaisia. Lisäksi välin pituuden $8\sigma_n$ suhde odotusarvoon eli

symmetrisen jakauman tapauksessa jakauman keski-kohtaan μ_n lähestyy nollaa, kun pallojen määrä n kasvaa rajatta. Tämähän merkitsee juuri sitä, että pallojen lisääntyessä jakauma kapenee kapenemistaan ja näyttää lopulta pelkältä odotusarvon kohdalle pystytetyltä ohuelta piikiltä.

Jakauman hoikistumisilmiö toistuu jokaisen lokeron kohdalla erikseen. Artikkelin alussa tehdyn oletuksen mukaan pallon osumistodennäköisyys tiettyyn lokeroon on vakio $p = 1/m$. Silloin kunkin lokeron piikki osuu pallomäärän $\mu_n = np = n/m$ kohdalle.

Edellä sanottua kannattaa maistella hetki. Kaikki mikrotilat ovat yhtä todennäköisiä. Makrotilojen todennäköisyysvarallisuus keskittyy lähes kokonaan äärimmäisen harvalle kapitalistimakrotilalle, joille yhteistä on se, että pallot ovat hyvin tarkkaan tasaisesti jakautuneet lokeroperheen jäsenten kesken. Mitähän Karl Marx sanoisi tästä?

Tuloksen täsmällinen muotoilu

Edellä tehdyissä päättelyissä turvauduttiin osittain geometriseen mielikuvaan ja jätettiin paljon väliä vaiheita pois. Lopputulostakaan ei esitetty kuin mielikuvan tasolla. Kaikki vaadittava työ voidaan kyllä tehdä ehdottoman täsmällisesti yksityiskohtia myöten. Se ei ole edes vaikeaa henkilölle, joka on hankkinut tietämystä ja kokemusta differentiaali- ja integraalilaskennan sekä todennäköisyyslaskennan alkeiskurssilla yliopistotasolla. Päättelyt jäivät hieman hatariksi, mutta lausuttakoon kuitenkin lopputulos täsmällisesti.

Olkoon $X_{n,\ell}$ pallojen määrä lokerossa ℓ pallojen kokonaismäärän ollessa n . Kun satunnaismuuttujan $X_{n,\ell}$ odotusarvoa merkitään $\mu_{n,\ell} = n/m$, muuttujan *suh-teellinen poikkeama odotusarvosta* määritellään kaavalla

$$\mathcal{D}[X_{n,\ell}] := \left| \frac{X_{n,\ell} - \mu_{n,\ell}}{\mu_{n,\ell}} \right|.$$

Lause. Olkoot ϵ ja δ kaksi positiivista reaalilukua. Silloin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_0 , että kaikilla $n > n_0$ on voimassa

$$\mathbb{P}\{\mathcal{D}[X_{n,\ell}] < \delta \text{ kaikilla } \ell = 1, \dots, m\} > 1 - \epsilon.$$

Merkintä $\mathbb{P}\{\dots\}$ tarkoittaa tapahtuman $\{\dots\}$ todennäköisyyttä.

Lokerikon pallomäärien jakauma saadaan niin lähelle tasaista jakaumaa kuin halutaan niin suurella todennäköisyydellä kuin halutaan, kunhan palloja otetaan mukaan peliin tarpeeksi suuri määrä.

¹Kun n kasvaa rajatta, jakaumasta muotoutuu kuuluisa *Diracin delta* -piikki [4].

Merkitys maailmankaikkeudelle

Ludwig Boltzmannin mukaan eristetyn termodynaamisen systeemin mikrotilat ovat keskenään yhtä todennäköisiä. Kun systeemi elää, sen mikrotila matemaattisella vääjäämättömyydellä ajautuu porukkaan, siis makrotilaan, jossa on eniten vaihtoehtoja tarjolla. Tuo porukka, kuten edellä todettiin, on tasaisten jakaumien sangen tylsä seurapiiri. Vääjäämättömyyttä kutsutaan nimellä *termodynamiikan toinen pääsääntö*. Maailmankaikkeus on eristetty termodynaaminen systeemi. Pallot eivät todellisuudessa ole palloja, vaan maailmankaikkeuden pienen pieniä rakennusosasia. Lokerotkaan eivät oikeasti ole lokeroita, vaan noiden vähäisten hiukkasten tiloja; hiukkanen on aina jossakin tilassa. Jos tilaksi käsitetään esimerkiksi paikka ja liikemäärä, hiukkasten tasainen jakautuminen eri tilojen kesken merkitsee melkoista sekamelskaa, systeemin makrotilaa, josta parhaallakaan hahmottamiskyvyllä ei ole mahdollista löytää minkäänlaista rakennetta.²

Todennäköisyysslakien mukaan maailma on siis pikkuhiljaa muuttumassa universaaliksi, tasaiseksi, mielenkiinnottomaksi mössöksi. Prosessia kutsutaan *lämpökuolemaksi* [7]. Älä kuitenkaan heitä kirvestäsi kaivoon: lämpökuolema ei tule vielä huomenna. Odotellessa on hyvä tutustua sellaisten suurhenkilöiden kuin Rudolf Clausius, Ludwig Boltzmann (mainittiinkin jo), J. Willard Gibbs, John von Neumann ja Claude Shannon aikaansaannoksiin. En suinkaan vähättele listalta pois jääneitä. Tämä oli vain satunnaisotos sieltä joukon kärkipäästä.

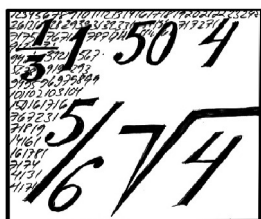
Viitteet

- [1] Alestalo, Pekka: *Presidentti-gallup*. Solmu 3/2005.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/3/>

[gallup.pdf](#)

- [2] Alestalo, Pekka: *Normaalijakauman kertymäfunktiosta*. Solmu 1/2006.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/alestalo.pdf>
- [3] Alestalo, Pekka: *Binomikaava*. Solmu 2/2013.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2013/2/binomi.pdf>
- [4] Liukkonen, Jukka: *Yleistetyt funktiot eli distributiot*. Solmu 1/2007.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/1/distributiot.pdf>
- [5] Wikipedia: *Binomial distribution*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution
- [6] Wikipedia: *Binomial theorem*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem
- [7] Wikipedia: *Heat death of the universe*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_death_of_the_universe
- [8] Wikipedia: *Multinomial theorem*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem
- [9] Wikipedia: *Normal distribution*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
- [10] Wikipedia: *Probability distribution*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_distribution

²Fyysikot alkoot menettäkö malttiaan tämän ”kaiken teorian” takia.



Onpas niitä paljon!

Neea Palojärvi

Helsingin yliopisto

Opetin viime syksynä Helsingin yliopistolla kombinatoriikan kurssia. Kurssilla muun muassa laskettiin erilaisien tapojen lukumääriä. Esimerkiksi tutkittiin, kuinka monella eri tavalla jokin määrä ihmisiä voidaan laittaa jonoon. Kurssin opettamisesta innostuneena kerroin kurssin tehtävistä myös sellaisille ystäväilleni, sukulaisilleni ja tutuilleni, joilla ei ole matematiikan opiskelusta yliopistotaustaa. Osalla viimeisimmät matematiikan opinnot olivat kansakoulusta usean vuosikymmenen takaa, osalla toisen asteen opinnoista muutama vuoden takaa. Heistä useampaa yhdisti hämmästyks, kuinka paljon erilaisia tapoja on.

Tässä kirjoituksessa esitellään kolme kombinatoriikan kurssillani esiintynyttä tehtävää, joissa pohditaan eri asioiden lukumääriä. Tehtävät on valittu niin, että niissä on jotain konkreettista mukana ja tilannetta voi hahmotella esimerkiksi järjestelemällä kirjoja. Tätä voi tehdä vaikka yhdessä kavereiden kanssa! Kuten monesti matematiikan tehtävissä muutenkin, tehtävää yksinkertaisempien tilanteiden tutkiminen voi auttaa saamaan ajatuksesta kiinni. Tehtävät pyrkivät olemaan helpommasta vaikeampaan, mutta on toki varsin yksilöllistä, mitkä tehtävät kokee vaikeiksi. Alkuun pääsee peruskoulun tarjoamilla matematiikan tiedoilla, mutta korkeammasta matemaattisesta ajattelukyvyystä on hyötyä. Erityisesti tehtävien vinkeissä ajattelu on pyrittä kirjoittamaan melko selkeästi auki ja teksti niin, että aktiiviset ja taitavat ysiluokkalaisetkin saisivat siitä jotain irti.

Kirjojen järjestys

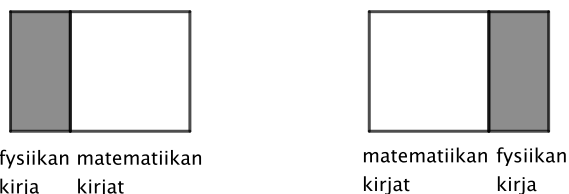
Tehtävä: Kirjahyllyyn laitetaan viisi matematiikan, neljä tietotekniikan, neljä fysiikan, kolme kemian ja kolme biologian kirjaa. Kuinka monella tavalla kirjat voidaan järjestää niin, että saman aineen kirjat ovat peräkkäin?

Vinkkejä tehtävän ratkaisuun: Tässä tehtävässä jokainen järjestys on eri, mikäli kirjat ovat eri järjestyksessä. Eli jos vasemmalla on ensin matematiikan kirja A ja sitten matematiikan kirja B, niin se on eri järjestys kuin jos vasemmalla olisi ensin kirja B ja sitten kirja A.

Kuten tekstin alussa mainittiinkin, kannattaa ensin miettiä yksinkertaisempia tilanteita. Mikä olisi vastaus, jos kysyttäisiinkin vain, kuinka monella eri tavalla kaksi matematiikan kirjaa voidaan laittaa eri järjestykseen hyllylle? Voit kokeilla tätä ihan oikeilla kirjoilla! Entä kaksi matematiikan kirjaa ja yksi fysiikan kirja? (Älä lue eteenpäin, jos et halua lukea edellisiin kysymyksiin vastauksia.) Ensimmäiseen kysymykseen vastaus on kaksi eri tapaa; voi olla, että toinen on vasemmanpuoleinen tai sitten päinvastoin. Jälkimmäiseen kysymykseen vastaus on neljä eri tapaa. Keksitkö tähän seläiset perustelut, joiden avulla voidaan vakuuttua, että järjestyksiä on kahden matematiikan kirjan ja yhden fysiikan kirjan tapauksessa juuri tuon verran – ei yhtään enempää tai vähempää?

Esitetään nyt edelliselle kahden matematiikan kirjan ja

yhden fysiikan kirjan tilanteelle yksi mahdollinen ratkaisutapa. Tarkastellaan ensin, kuinka monella eri tavalla yksi fysiikan kirja voi olla hyllyllä kahteen matematiikan kirjaan nähden. Koska matematiikan kirjojen on oltava peräkkäin, fysiikan kirjan on oltava joko niitä ennen tai niiden jälkeen. Tätä on havainnollistettu kuvassa 1. On kuitenkin vielä huomattava, että kummassakin näissä järjestyksissä matematiikan kirjojen paikat voivat vaihdella. Edellisessä kappaleessa on todettu, että ne voi laittaa kahteen eri järjestykseen. Eli kumpaakin kuvan 1 tilannetta kohti on täsmälleen kaksi eri matematiikan kirjojen järjestystä. Kaiken kaikkiaan kysytyjä järjestyksiä on siis $2 \cdot 2 = 4$.



Kuva 1: Havainnollistava kuva yhden fysiikan kirjan sijainnista matematiikan kirjoihin nähden.

Pystyisitkö nyt yleistämään tilanteen ja vastaamaan alkuperäiseen kysymykseen? Halutessasi voit yrittää vielä pohtia joitain muita tehtävänannon tilannetta yksinkertaisempia tilanteita tai muilla sopivin tavoin yrittää hahmottaa tilannetta.

Tehtävän ratkaisu: Käytetään tässä ratkaisussa tunnettua merkintää $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$, joka on tässä määritelty kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n . Esimerkiksi on $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Tarkastellaan ensin, kuinka monella eri tavalla eri aineet voivat olla, ja sitten, kuinka monella eri tavalla kirjat voidaan järjestää näiden aineiden sisällä.

Kirjoja on viidestä eri aineesta. Siispä vasemmanpuoleisin aine voidaan valita viidellä eri tavalla. Jäljellä on neljä ainetta, joista voidaan valita vasemmalta lukien toinen aine. Tämän jälkeen jäljellä on enää kolme ainetta, sitten kaksi ja oikeanpuoleisimman aineen kohdalla on enää yksi jäljellä. Siispä aineiden järjestämistapoja on $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ erilaista, sillä esimerkiksi jokaisesta vasemmanpuoleisista ainevalintaa kohti on aina neljä erilaista valintaa sen vieressä olevalle aineelle ja kukin näistä tuottaa erilaisen lopputuloksen.

Kuitenkin jokaisessa edellisistä järjestyksistä saman aineen kirjat voivat olla eri järjestyksissä. Vastaavalla tavalla kuin edellisessä kappaleessa on päätelty, voidaan todeta, että matematiikan kirjat voidaan järjestää $5!$ eri tavalla, tietotekniikan $4!$, fysiikan $4!$, kemian $3!$ ja biologian $3!$ eri tavalla.

Yhteensä mahdollisia järjestystapoja on siis

$$5! 5! 4! 4! 3! 3! = 120 \cdot 120 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 6 = 298\,598\,400.$$

Siis lähes 300 miljoonaa! Ei siis luultavasti kannata alkaa testaamaan tällaisella kirjamäärällä, mikäköhän kirjojen järjestys näyttäisi parhaimmalta hyllyssä.

Istumajärjestykset

Tehtävä: *Illalliselle osallistuu kymmenen ihmistä, joista viisi juo viiniä ja viisi ei juo. He syövät illallisen pyöreän pöydän ympärillä ja asettuvat sen ympärille istumajärjestyksen mukaan niin, että mitkään kaksi viiniä juovaa eivät istu vierekkäin eivätkä mitkään kaksi henkilöä, jotka eivät juo viiniä, istu vierekkäin. Illallisen järjestäjä suunnittelee kirjoittavansa ylös kaikki mahdolliset edelliset vaatimukset toteuttavat istumajärjestykset ja valitsevansa niistä parhaimman.*

Laske, kuinka monta erilaista istumajärjestystä on, ja kerro sen perusteella, kannattaako illallisen järjestäjän toteuttaa suunnitelmansa.

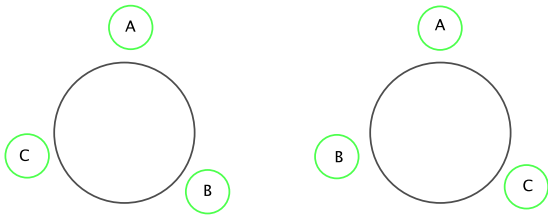
(Kaksi istumajärjestystä ovat samat, mikäli niissä jokaisen henkilön oikealla puolella istuva henkilö on kummassakin sama ja samoin vasemmalla puolella istuva.)

Vinkkejä tehtävän ratkaisuun: Kuten aiemminkin, tehtävää voi yrittää hahmottaa pienemmillä määrillä tai vaikka ilman lisäehtoja. Edellisessä tehtävässä käsiteltiin jo asioiden laittamista jonoihin eli tällaisia tilanteita osataan tutkia. Voisiko siis auttaa, jos ensin jättäisi kokonaan huomioimatta pöydän ympärillä istumisen ja keskittyisikin vain jonon tutkimiseen? Milloista jonoa kannattaisi tutkia, jotta siitä olisi hyötyä tämän tehtävän kannalta? (Älä lue eteenpäin, jos et halua tähän kysymykseen vastausta.)

Tutkittavissa istumajärjestyksissähan pitäisi joka toisen juoda viiniä ja joka toisen olla juomatta. Näin ol- len olisi luonnollista tutkia sellaisia jonoja, joissa tämä ehto toteutuu. Voisiko joitain edellisessä tehtävässä esiintyneitä ajatustapoja soveltaa tämän tehtävän ratkaisuun? Vaikka nyt samalla tavalla toimivat (viiniä juovat tai eivät juovat) eivät ole vierekkäin kuten edellisessä kohdassa saman aineen kirjat, niin jonossa on kuitenkin samanhenkistä säännönmukaisuutta. Voit jälleen kerran tarvittaessa hahmotella tilannetta pienemmällä ihmismäärillä ja vaikka kokeilla kavereiden kanssa, kuinka monta erilaista jonoa löydätte. Kuinka monta sellaista jonoa, jossa joka toinen henkilö juo ja joka toinen ei juo viiniä, on, kun viisi ihmistä juo viiniä ja viisi ihmistä ei juo viiniä? Vastaus tähän kysymykseen löytyy tehtävän ratkaisun toisesta kappaleesta.

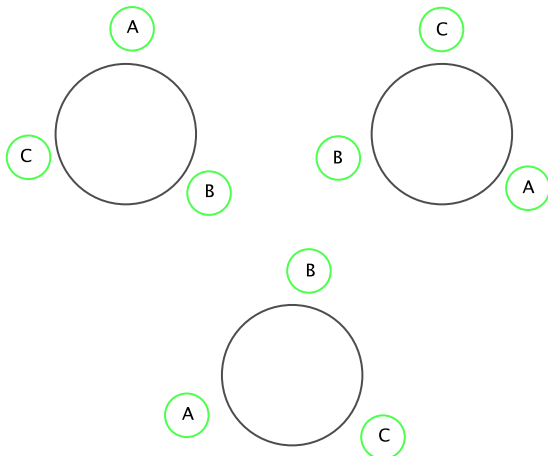
Tehtävässä kuitenkin kysyttiin istumajärjestyksiä, eikä jonoja. Alkuun voi hahmotella, mitä nämä rajoitukset oikein tarkoittavat ilman, että otetaan viinin juomista tai juomattomuutta huomioon. Esimerkiksi, jos pyöreän pöydän ympärillä esiintyy kolme eri ihmistä, niin kuinka monta erilaista istumajärjestystä on suluisa olevan tekstin perusteella (ei siis vielä tutkita viinin

juomista tai juomattomuutta)? Vastaus näkyy kuvasta 2.



Kuva 2: Kolmen ihmisen erilaiset istumajärjestykset pöydän ympärillä.

Erityisesti siis, kun ihmiset vain kiertävät ympäri pöytää myötä- tai vastapäivään (ks. kuva 3), niin tehtävänannon mukaan sama istumajärjestys säilyy. Mitä tapahtuu, jos tehdään ihan mikä tahansa sellainen muutos istumajärjestykseen, jota ei ole mahdollista saavuttaa alkuperäisen istumapaikkoja kiertämällä myötä- tai vastapäivään? Onko uusi istumajärjestys tehtävänannon tulkinnan mukaan silloin sama kuin alkuperäinen istumajärjestys? (Vastaus tähän löytyy seuraavasta kappaleesta.)



Kuva 3: Istumajärjestyksen kiertäminen myötä- tai vastapäivään.

Vastaus edelliseen kysymykseen on, ettei istumajärjestys voi olla sama kuin alkuperäinen. Jos se nimitäin olisi, niin kaikilla olisi samat henkilöt oikealla ja vasemmalla puolella molemmissa istumajärjestyksissä. Kun tätä istumajärjestystä kierrettäisiin niin, että jokin henkilöistä istuisi samalla paikalla kuin alkuperäisessä istumajärjestyksessä, niin myös hänen vasemmalla puolellaan olevan pitäisi istua samalla paikalla kuin alkuperäisessä istumajärjestyksessä. Sama luonnollisesti pätee myös tämän vasemmalla puolella olevalle ja niin edelleen. Siispa kaikkien olisi istuttava samoilla paikoilla kuin alkuperäisessä istumajärjestyksessä, mitä ei haluttu, koska tutkittavaa istumajärjestystä ei pitänyt saada aikaiseksi alkuperäistä istumajärjestystä kiertämällä.

Nyt on siis huomattu, että vain sellaiset tavat, joissa

istumajärjestys saadaan toiseksi kiertämällä, ovat samoja. Jos siis pöydän ympärillä istuu kolme ihmistä, niin kuinka monta tämän istumajärjestyksen kanssa samanlaista istumajärjestystä on, kun istumajärjestystä kierretään? (Vastaus: Kolme, kukin saadaan kiertämällä vaikka myötäpäivään istumajärjestystä yhden askeleen eteenpäin.) Miten päättely yleistyy vaikka neljään, viiteen tai kymmeneen ihmiseen?

Kun edellinen, yhden istumajärjestyksen kanssa samanlaisten järjestysten lukumäärä on saatu selville, on aika yhdistää se aiempaan jonoajatteluun; tähän on enää ainoa asia, mikä tehtävän ratkaisusta puuttuu. Miten jonossa olevat ihmiset voidaan laittaa istumaan pöydän ympärille (miettimättä viinin juomista tai juomattomuutta)? Mitkä erilaiset jonot tuottavat samanlaiset istumajärjestykset? Voit esimerkiksi miettiä kolmen hengen muodostamia jonoja. Kuinka monta niitä on? Miten voit laittaa nämä jonot pöydän ympärille? Miten tämä vertautuu kuvassa 2 esitettyjen istumajärjestysten lukumäärään? Entä sitten siihen, että samanlaiset jonot saadaan, kun kierretään istumajärjestystä ympäri? (Vastaukset seuraavassa kappaleessa.)

Kolmen ihmisen jonojahan on $3! = 6$. Voidaan laittaa jonossa olevat ihmiset pöydän ympärille niin, että ensimmäinen istuu johonkin tiettyyn tuoliin, toinen sen vasemmalle puolelle ja kolmas tämän vasemmalle puolelle. Koska kiertämällä saadaan kuitenkin samanlaiset istumajärjestykset aikaan ja kaikki nämä tulevat erilaisissa jonoissa esiin, niin tulos pitää jakaa kolmella eli kiertojen lukumäärällä. Siispa erilaisia istumajärjestyksiä on kaksi. Miten tätä ajatusta voisi soveltaa tehtävänannon tilanteeseen?

Tehtävän ratkaisu: Tutkitaan tehtävää ensin sellaisessa tilanteessa, joka osataan jo edellisen kohdan pohjalta ratkaista. Ajatellaan siis tilannetta aluksi jonona eli ei oteta huomioon sitä, että ihmiset istuvat pyöreän pöydän ympärillä. (Lopullisessa tulkinnassa ajatellaan, että jonon toinen istuu jonon ensimmäisen vasemmalla puolella, kolmas toisen vasemmalla puolella kunnes lopulta viimeinen istuu ensimmäisen oikealla puolella, kun heidät laitetaan istumaan pöydän ympärille.)

Tässä jonossa ensimmäinen juo viiniä tai ei juo viiniä. Tälle valinnalle on siis kaksi eri vaihtoehtoa. Kun tämä on valittu, jonossa joka toisella on aina oltava tämä sama valinta eli he joko juovat viiniä tai eivät juo riippuen ensimmäisestä henkilöstä. Koska näitä henkilöitä on viisi, heidät voidaan laittaa $5!$ eri järjestykseen. Toisaalta heidän välissään olevat henkilöt voidaan myös laittaa $5!$ eri järjestykseen. Siispa pelkällä jonoajattelulla tapoja on $2 \cdot 5! \cdot 5!$.



Kuva 4: Jonossa joka toinen juo tai ei juo viiniä. Samalla tavalla juovia/ei juovia on kuvattu samanlaisilla ympyröillä.

Nyt on kuitenkin vielä huomioitava, että kun ihmiset laitetaan pöydän ympärille, niin kiertämällä istumajärjestystä pöydän ympäri saadaan uusi samanlainen istumajärjestys. Koska pöydän ympärillä on kymmenen paikkaa, niin tämä kierto voidaan tehdä kymmenellä eri tavalla. Lisäksi nämä käyvät läpi kaikki tavat saada kaksi samanlaista istumajärjestystä yhdestä istumajärjestyksestä, sillä muussa tapauksessa oikealla ja vasemmalla puolella olevat naapurit eivät säily. Siis edellisessä kappaleessa saatu tulos on vielä jaettavalla kymmenellä kysyttyjen istumajärjestysten lukumäärän saamiseksi:

$$\frac{2 \cdot 5! \cdot 5!}{10} = 4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880.$$

Lähes 3000 istumajärjestyksen läpikäynti on työlästä, joten ehkä järjestäjän kannattaisi päättää sopiva istumajärjestys jollain muulla tavalla kuin käymälle kaikki järjestykset läpi.

Salasanojen lukumäärä

Tehtävä: *Kuinka monta sellaista kahdeksan merkkiä pitkää salasanaa on, jotka koostuvat vain merkeistä a, b ja ! sekä jotka sisältävät jokaisen merkin ainakin kerran?*

Vinkkejä tehtävän ratkaisuun: Kuten jo aiemmissa esimerkeissä huomattiin, voi tehtävän tutkiminen ilman lisäehtoja ja sen jälkeen lisäehtojen huomioiminen auttaa tehtävän ratkaisussa. Mikä voisi olla tässä tehtävässä se lisäehto, jota ilman tehtävää voisi aluksi miettiä? Miten tämän yksinkertaistuksesta pystyy muodostamaan ratkaisun kysyttyyn tehtävään? (Jos et halua nähdä yhtä mahdollisuutta vielä, älä siirry seuraavaan kappaleeseen.)

Yksi mahdollisuus on alkuun miettiä, kuinka monta sellaista salasanaa on, jotka koostuvat merkeistä a, b tai ! ilman mitään lisärajoituksia. Nythän kysyttyjen salasanojen lukumäärä saadaan, kun tuloksesta vähennetään ne salasanat, joista puuttuu jokin merkeistä a, b tai !. Kuinka monta salasanaa, jotka koostuvat merkeistä a, b, ! on? (Vastaus löytyy ratkaisun toisesta kappaleesta.)

Seuraavaksi olisi laskettava, kuinka monta sellaista jonoa on, josta puuttuu jokin merkeistä a, b tai !. Miten tämän voisi laskea? Miten voidaan soveltaa edellisen kappaleen laskuissa esitettyä ratkaisutapaa? Onko jotain erityistä otettava huomioon? Voi auttaa, että hahmottelee itselleen erilaisia salasanoja. Kun kaikki nämä havainnot yhdistää, onkin ratkaisu jo valmis.

Tehtävän ratkaisu: Lasketaan tämä lukumäärä laskemalla kaikki salasanat ja vähentämällä niistä ne salasanat, jotka eivät sisällä jotain merkeistä a, b tai !.

Lasketaan ensin kaikkien merkit a, b tai ! sisältävien salasanojen lukumäärä. Koska salasana on kahdeksan merkkiä pitkä ja kullekin merkille on kolme vaihtoehtoa, on kaikkia salasanoja 3^8 .

Nyt on vielä vähennettävä sellaisten salasanojen, jotka eivät sisällä jotain merkeistä a, b tai !, lukumäärä. Huomataan, että tällöin siis kukin salasana koostuu korkeintaan kahdesta eri merkistä (ne kaksi muuta merkkiä) ja on kahdeksan merkkiä pitkä. Siispä sellaisia salasanoja, jotka eivät sisällä merkkiä a, on 2^8 kappaletta, sellaisia, jotka eivät sisällä merkkiä b, on myös 2^8 kappaletta ja sama pätee merkille !.

Nyt on kuitenkin vielä huomattava, että voi olla, ettei salasana sisällä myöskään kahta eri merkkiä. Esimerkiksi salasana aaaaaaaa ei sisällä merkkiä b, eikä merkkiä !. Se on siis laskettu edellisessä kappaleessa mukaan sekä silloin, kun tutkitaan salasanoja, jotka eivät sisällä merkkiä b että silloin, kun tutkitaan jonoja, jotka eivät sisällä merkkiä !. Näin ollen se on tullut laskettua edellä kahdesti. Siispä se on vähennettävä kerran. Koska salasana, joka ei sisällä mitä tahansa kahta merkkiä, on salasana joka sisältää vain yhden merkin, on tällaisia salasanoja kaiken kaikkiaan kolme kappaletta. Minkään muun tyyppisiä salasanoja ei ole laskettu mukaan useampaan kertaan. Siispä sellaisia salasanoja, jotka eivät sisällä jotain merkeistä a, b tai !, on $3 \cdot 2^8 - 3$.

Nyt siis sellaisia kahdeksan merkin salasanoja, jotka koostuvat vain merkeistä a, b ja ! ja jotka sisältävät vähintään kerran kunkin merkeistä, on

$$\begin{aligned} 3^8 - (3 \cdot 2^8 - 3) &= 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 3 \cdot (3^7 - 2^8 + 1) \\ &= 3 \cdot (2187 - 256 + 1) = 3 \cdot 1932 = 5796 \end{aligned}$$

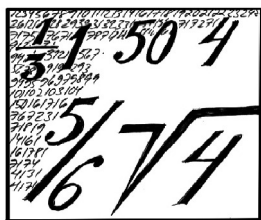
kappaletta. Jo siis kolmella merkillä ja edellisillä rajoituksilla saa kohtuullisen paljon salasanoja aikaan. Pohdintatehtävänä voi olla, kuinka monta erilaista salasanaa saadaan aikaiseksi suuremmilla merkkimäärillä – joko lisärajoituksilla tai ilman.

Lopuksi

Edellisissä esimerkeissä näkyy hyvin, kuinka positiivisilla, ykköistä suuremmilla kokonaisluvulla kerrottaessa tulo kasvaa nopeasti suureksi ja näin ollen edelliset vastauksetkin kasvavat melko nopeasti. Esimerkiksi, on jo

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

ja 2^{20} on yli miljoonan! Tai $10!$ (eli ”kuinka monella eri tavalla kymmenen ihmistä voi laittaa jonoon”) on 3 628 800. Kannattaa siis edellisten esimerkkien valossakin olla hieman varovainen ennen kuin päättää alkaa käymään kaikkia erilaisia mahdollisia tapoja läpi laittaa eri asioita järjestykseen – edes silloin, kun asioita on verrattain pieni määrä.



Tarinoita polynomeista (osa 2)

Jukka Tuomela

Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
jukka.tuomela@uef.fi

Kertaus

Jatketaan siitä mihin kirjoituksessa [7] jäätiin. Lukijalta oletetaan, että hän tietää mitä tarkoittaa polynomien yhteen- ja kertolasku, ja lisäksi toisen asteen polynomin ratkaisukaava oletetaan tunnetuksi. Tekstissä viitataan algebran peruslauseeseen ja jakolaskualgoritmiin, jotka on esitetty kirjoituksessa [7].

Erinomainen kirja polynomeista kiinnostuneille on [3], ja erityisesti tämän kirjoituksen asioista löytyy lisätietoa kirjoista [2, 6]. wxMaxima, jonka avulla esimerkkejä voi helposti laskea, on vapaasti saatavilla oleva symbolisen laskennan ohjelmisto.¹

Myös Sage on ilmainen ohjelmisto, jolla voi laskea sekä symbolisesti että numeerisesti [1].² Jäljempänä olevat tehtävät voi helposti laskea myös Sagen avulla. Samoin Wolfram Alphalla voi kätevästi laskea polynomeilla.³

Esimerkkeinä on taas käytetty matematiikkakilpailusivun tehtäviä.⁴

Juurilauseketehtävät ovat polynomitehtäviä

Juurilausekkeet ovat monella tavalla ongelmallisia. Jokainen, joka on edes vähän käyttänyt symbolisen las-

kennan ohjelmistoja, tietää, että ohjelmistot usein eivät käsittele juurilausekkeita niin kuin käyttäjä haluaisi. Jos i on imaginaariyksikkö, niin esimerkiksi ohjelmisto saattaa tulkita, että $\sqrt{1-x} = i\sqrt{x-1}$, mikä tuskin on käyttäjän tarkoitus.

Johtopäätös on, että juurilausekkeita pitää välttää, ja kun on päässyt näin pitkälle, niin huomaa, että useimmiten ne ovatkin tarpeettomia. Laskut kannattaa tehdä polynomeilla, jolloin voidaan edetä algoritmisesti. Itse asiassa juurilausekkeita harvoin esiintyy missään ”luonnollisessa” matemaattisessa ongelmassa. Matematiikan tehtävissä esiintyy juurilausekkeita, koska niiden käsittely on hankalaa, ja halutaan opettaa tätä: luodaan siis ongelmia sinne missä niitä ei välttämättä ole.

Tavallaan voisi sanoa, että juurilauseketehtävät ovat polynomitehtäviä, joissa ratkaisijan pitää etsiä se oleellinen polynomi, jonka tehtävän laatija on piilottanut. Katsotaan esimerkki tällaisesta tapauksesta.

Esimerkki 1. Matematiikan olympiavalmennuksen helmikuun 2020 valmennustehtävissä piti ratkaista yhtälö

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x. \quad (1)$$

Lähes sama tehtävä oli ylioppilaskirjoituksissa keväällä 1978, kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa

¹<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/index.html>

²<https://www.sagemath.org/index.html>

³<https://www.wolframalpha.com/>

⁴<https://matematiikkakilpailut.fi/aiheet/>

vuonna 1963 sekä Youtubessa.⁵ Youtuben tehtävä oli siinä mielessä erilainen, että siinä oli vain kompleksisia ratkaisuja.

Neliöjuuritehtävissä perinteisesti lähdetään liikkeelle siitä, että katsotaan milloin neliöjuuret ovat reaalisia, mutta nyt ei välitetä siitä tässä vaiheessa. Lasketaan ensin tehtävä yleisesti, ja lopuksi voidaan sitten katsoa mitä ratkaisuja halutaan.

Juurilausekkeista päästään eroon seuraavasti. Otetaan käyttöön apumuuttujat u ja v , joitten avulla alkuperäistä yhtälöä vastaa seuraava systeemi.

$$\begin{aligned}f_0 &= x - u - v = 0 \\f_1 &= u^2 - a - x = 0 \\f_2 &= v^2 - a + x = 0.\end{aligned}$$

Tavoitteena on nyt eliminoida muuttujat u ja v , jolloin jäljelle jää jokin polynomiyhtälö muuttujalle x . Eliminoinnin idea on, että systemaattisesti kumotaan halutun muuttujan isoin termi. Ennemmin tai myöhemmin muuttujan potenssi on nolla, jolloin kyseistä muuttujaa ei enää esiinny.

Eliminoidaan ensin u .

$$\begin{aligned}f_3 &= uf_0 + f_1 = (x - v)u - x - a \\f_4 &= (x - v)f_0 + f_3 = v^2 - 2xv + x^2 - x - a.\end{aligned}$$

Sitten eliminoidaan v . Ensimmäin lasketaan

$$f_4 - f_2 = -2xv + x^2 - 2x = x(x - 2v - 2).$$

Saatiin kaksi tapausta: joko $x = 0$ tai $f_5 = x - 2v - 2 = 0$. Jatketään v :n eliminointia jälkimmäisessä tapauksessa.

$$\begin{aligned}f_6 &= 2f_4 + vf_5 = -(3x + 2)v + 2x^2 - 2x - 2a \\f_7 &= 2f_6 - (3x + 2)f_5 = x^2 - 4a + 4.\end{aligned}$$

Päädettiin siis siihen, että jos x on yhtälön (1) ratkaisu, niin joko $x = 0$ tai $x^2 - 4a + 4 = 0$. Huomaa, että parametri a olisi yhtä hyvin voinut olla kompleksiluku; tämä ei vaikuta laskuihin mitenkään. Voisikin todeta jo tässä vaiheessa, että tehtävä on ratkaistu.

Kuitenkin juurilauseketehtävissä on tapana enemmän tai vähemmän keinotekoisesti rajoittaa haluttujen ratkaisujen joukkoa. Katsotaan siis vielä, mitkä näistä ratkaisuista ovat tehtävän laatijan mielestä hyväksyttäviä ratkaisuja.

Alkuperäisessä tehtävässä ajateltiin, että neliöjuuret ovat ei-negatiivisia, joten $u \geq 0$ ja $v \geq 0$, mistä sitten seuraa, että myös $x \geq 0$.

Jos $x = 0$, niin $u = -v$ ja $u^2 = v^2 = a$. Vastaus $x = 0$ voidaan hyväksyä vain, jos $a = 0$.

Jos taas $x^2 - 4a + 4 = 0$ ja halutaan reaalisia ratkaisuja, niin $a \geq 1$. Edelleen yhtälöstä $f_5 = 0$ saadaan, että $v = -1 + x/2$. Mutta jos $1 \leq a < 2$, niin $v < 0$, joten pitää itse asiassa vaatia, että $a \geq 2$.

Yhdistämällä nämä tapaukset voidaan sanoa, että yhtälö (1) on ekvivalentti seuraavan tehtävän kanssa:

Olkoon annettu $\hat{f} = x(x^2 - 4a + 4)$; etsi sellaiset nollakohdat, joille joko $x > 0$ ja $a \geq 2$ tai $x \geq 0$ ja $a = 0$.

Näin muotoiltuna tehtävä tietysti vaikuttaa oudolta. Toisaalta voisi sanoa, että juurilauseketehtävät lähtökohtaisesti ovat outoja sen jälkeen, kun ne on muotoiltu ”oikein”. ☆

Katsotaan sitten toinen samantyyppinen tehtävä.

Esimerkki 2. Tämä ongelma esitettiin YouTubessa:⁶

$$x = \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} = ?$$

Heti nähdään numeerisesti, että x on lähellä ykkösiä, joten varmaankin $x = 1$, mutta miten tämän voisi osoittaa?

Edetään kuten äskeisessä esimerkissä, ja tarkastellaan seuraavaa tehtävää.

$$\begin{aligned}x &= u + v \\f_1 &= u^3 - 8 - 3w = 0 \\f_2 &= v^3 - 8 + 3w = 0 \\f_3 &= w^2 - 21 = 0.\end{aligned}$$

Tässäkin voitaisiin systemaattisesti eliminoida muuttujat u , v ja w , mutta edetään nyt suoremmin. Koska $f_1 + f_2 = u^3 + v^3 - 16$, niin

$$\begin{aligned}x^3 &= (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\&= 3uv(u + v) + 16 = 3uvx + 16.\end{aligned}$$

Termi uv saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}f_1f_2 + 8(f_1 + f_2) - 3w(f_1 - f_2) - 9f_3 \\&= u^3v^3 + 125 = 0.\end{aligned}$$

Jos halutaan, että uv on reaalinen, niin $uv = -5$ ja saatiin siis

$$x^3 + 15x - 16 = (x - 1)(x^2 + x + 16) = 0,$$

joten voidaan kirjoittaa

$$\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} = 1.$$

☆

⁵<https://www.youtube.com/watch?v=tREYHgIKB2k>

⁶<https://www.youtube.com/watch?v=II61QgawnYQ>

Mutta onko vastaus itse asiassa $x = 1$? Tuossahan laskettiin, että $x^3 + 15x - 16 = 0$. Eikö silloin lausekkeen $\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}}$ pitäisi kuvata yhtä hyvin polynomin $g = x^2 + x + 16$ nollakohtia? Mihin nämä nollakohdat hävisivät? Itse asiassa

$$x = \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} \quad (2)$$

on ratkaisukaava polynomin $f = x^3 + 15x - 16$ nollakohdille, joka keksittiin Italiassa 1500-luvulla. Tätä kaavaa ei ole tapana opettaa, eikä sitä ole syytäkään opettaa, juuri tuon äskeisen ongelman takia: kaavan pitäisi kuvata kaikkia kolmea nollakohtaa yhtäaikaan. Lisäksi tiettyissä tapauksissa kaavassa pitää ottaa neliöjuuri negatiivisesta luvusta, vaikka selvästi haluttu nollakohta on reaalinen. Huomattiin kuitenkin, että jos vain laskee käyttäen kaavaa $(\sqrt{-1})^2 = -1$, niin saadaan lopulta oikea vastaus. 1500-luvulla negatiiviset luvutkin olivat vielä vähän epäilyttäviä, joten oltiin täysin valmistautumattomia kohtaamaan kompleksilukuja.

Joka tapauksessa ratkaisukaavan löytyminen sai paljon huomiota, joten käsitteellisistä ongelmista huolimatta matemaatikot yrittivät sitten löytää ratkaisukaavoja yleisessä tapauksessa. Pian löydettiinkin ratkaisukaava neljännen asteen polynomille, käyttäen samoja ideoita kuin kolmannen asteen tapauksessa.

Tämän jälkeen ratkaisukaavoja ei enää löytynytäkään, ja luultavasti jo 1700-luvulla, lukuisten epäonnistuneitten yritysten jälkeen, epäily alkoi kasvaa, että ratkaisukaavoja ei aina voitaisi löytää. Lopulta Galois 1800-luvun alkupuolella osoitti tämän. Mutta jo parikymmentä vuotta aikaisemmin Gauss oli jo vakuuttunut tästä [5, s. 71]:

Parhaat matemaatikot ovat ponnistelleet vuosia algebrallisten yhtälöitten parissa, mutta on vain vähän toivota, että ratkaisu löytyisi. On yhä todennäköisempää, että ratkaisu on mahdoton yleisessä tapauksessa.

Äskeisen esimerkin huvittava piirre on se, että ratkaisukaava esitetään ongelmana, ja ongelman ratkaisu perustuu siihen, että löydetään polynomi, jolle se ei ole ratkaisukaava.

Itse asiassa Galois'n tulos osoitti myös paljon laajemmin, että ratkaisukaavat ovat oikeastaan hyödyttömiä, ja polynomien tutkimisessa mielenkiinto pitäisi suunnata muualle.

Paradoksaalisesti siis ratkaisukaavojen etsiminen vaikutti merkittävästi (polynomi)algebran kehitykseen, kunnes sitten lopulta huomattiin, ettei niillä tee mitään. Miten sitten polynomin nollakohtia pitäisi analysoida?

Mitä tarkoittaa polynomin nollakohtien ratkaiseminen?

Edellä olevissa esimerkeissä oli kyseessä polynomien nollakohtien ratkaiseminen, vaikka tehtävät olivat muotoiltu siten, että tätä ei suoraan sanottu. Yleisesti ottaen polynomin nollakohtia ei tunneta, mutta jos esimerkiksi $g = x^2 - 2$, niin on tapana sanoa, että tämän nollakohdat ovat $\pm\sqrt{2}$. Mutta mitä tämä oikeastaan tarkoittaa? Kun katsoo asiaa toisesta näkökulmasta, niin voitaisiin sanoa, että tässä ei oikeastaan *ratkaista* nollakohtia, vaan pikemminkin *nimetään* nollakohdat. Yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa: g :n nollakohdat ovat $\pm\alpha$, missä α on luku, jolle pätee $\alpha^2 - 2 = 0$. Samoin edellä ollut ratkaisukaava (2) on tavallaan vain eräs (huono) tapa nimetä polynomin $f = x^3 + 15x - 16$ nollakohdat.

Jo Gauss oli tullut siihen tulokseen, että ratkaisukaavoissa on kyse nimeämisestä eikä varsinaisesta ratkaisusta [5]. Hän sanoi, että jos on annettu yhtälö $x^n = a$ ja sitten sanotaan, että sen ”ratkaisu” on $x = \sqrt[n]{a}$, niin eihän tässä ole muuta tehty kuin keksitty uusi merkin-tätapa, siis nimetty yksi nollakohta. Yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa, että $x = \alpha$ on ”ratkaisu”, jossa siis tautologisesti α on luku, jolle pätee $\alpha^n = a$.

Mutta jos ”ratkaisun” sijaan vain ”nimetään” nollakohtia, niin mitä iloa tästä sitten voisi olla? Osoittautuu, että tämä on ehkäpä yllättävänkin hyödyllinen idea. Moran mukaan [6] Kronecker sitten varsinaisesti kehitti systemaattisesti tätä uutta näkökulmaa. Mora kutsumme tätä Kroneckerin filosofiaksi, ja hän tiivistää sen idean näin:

Koska ei voi laskea nollakohtia, niin yritetään kuitenkin laskea nollakohdilla.

Nimetään siis nollakohdat sillä tavalla järkevästi, että niillä voi laskea.

Tavallaan tämän idean pitäisi olla tuttu: neliöjuurimerkintää on käytetty jo satoja vuosia, ja kouluissa on opetettu, että symbolin $\sqrt{2}$, siis polynomin $g = x^2 - 2$ nollakohdan, avulla voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= ac + (ad + bc)\sqrt{2} + bd(\sqrt{2})^2 \\ &= ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Symboli $\sqrt{2}$ ei siis oikeastaan ole reaalityyppinen luku, vaan jokin algebrallisesti määritelty luku, jolle pätee $(\sqrt{2})^2 = 2$. Aivan samoin lasketaan kompleksiluvuilla: luku i on polynomin $g_i = x^2 + 1$ nollakohta, joten

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Luku $\sqrt{2}$ on siis olemassa samalla tavalla kuin imaginaariyksikkö i . Tässä ehkä lukijalla herää epäily, että

voidaanko noin vain nollakohtia ikään kuin luoda tyhjästä. Tähän ei olekaan mitään yksinkertaista vastausta. Kuitenkin monilla matematiikan alueilla, esimerkiksi differentiaaliyhtälöitten teoriassa, on esiintynyt tilanteita, joissa ratkaisua ei ole olemassa siellä missä sen ”pitäisi olla” tai missä sen luultiin olevan tai missä sen haluttiin olevan. Tällöin on sitten yritetty etsiä ratkaisua ”jostain muualta”, mutta tietenkin pitää myös perustella, että tämä muualta tullut ratkaisu on jotenkin järkevä.

Joka tapauksessa voidaan osoittaa [6, section 5.5]:

nimeämällä saadut nollakohdat voidaan samaistaa algebran peruslauseen avulla saatujen (reaalisten ja kompleksisten) nollakohtien kanssa.

Tässä on tietysti laajemminkin ongelmana se, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että jokin matemaattinen objekti, kuten reaalityttö, vektori jne, ”on olemassa”. Tätä, ja paljon muuta on mielenkiintoisesti pohdittu kirjassa [4], mutta sivuutetaan tässä nämä filosofiset ongelmat ja lähestytään asiaa käytännöllisesti. Todetaan vain, että i ja $\sqrt{2}$ ovat olemassa, koska niillä voi järkevästi laskea. Reaali- ja kompleksiluvuilla ei voi laskea, mutta hyväksytään nyt niittenkin olemassaolo muista syistä.⁷

Katsotaan sitten eräs esimerkki, jossa nollakohdilla laskeaan. Tätä sitten hyödynnetään, kun ratkaistaan jäljempänä olevia tehtäviä. wxMaximassa jakolasku saadaan komennolla `divide`.

Esimerkki 3. Olkoon annettu

$$f = x^6 - 2x^5 + 7x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

Mikä on $f(-11/7)$? Luonnollisesti x :n paikalle voi sijoittaa luvun $-11/7$ ja laskea tavalliseen tapaan. Olkoon kuitenkin $g_0 = 7x + 11$, jolloin $-11/7$ on g_0 :n nollakohta. Nyt jakolaskualgoritmin avulla

$$f = q_0(7x + 11) + \frac{6913306}{117649}.$$

Siis $f(-11/7) = 6913306/117649$. Tässä osamäärällä q_0 ei ole merkitystä, ja voitaisiinkin kirjoittaa, kuten kokonaislukujen tapauksessa:

$$f = \frac{6913306}{117649} \pmod{7x + 11}.$$

Jätän harjoitustehtäväksi sen pohtimisen, kumpi tapa laskea polynomin arvo on nopeampi, perinteinen vai jakolaskuun perustuva.

Entäpä mikä on $f(\sqrt{2})$? Nyt viimeistään kannattaa luopua merkinnästä $\sqrt{2}$ ja kirjoitetaan: olkoon α polynomin $g_1 = x^2 - 2$ nollakohta, siis luku, jolle pätee $\alpha^2 - 2 = 0$. Tämä on parempi sen takia, että

nyt voidaan, jos niin halutaan, määritellä polynomi $g_\alpha = \alpha^2 - 2$, jossa α tulkitaan muuttujaksi. Juuri tällainen tilanne tulee vastaan seuraavissa esimerkeissä. Symbolin $\sqrt{2}$ tulkitseminen muuttujaksi voisi aiheuttaa tarpeetonta hämmennystä.

Jakolaskulla saadaan nyt:

$$f = (x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 3x + 15)(x^2 - 2) - x + 31,$$

joten $f(\alpha) = -\alpha + 31$. Samalla tavalla voidaan laskea f :n arvo minkä tahansa polynomin nollakohdassa. Olkoon $g_2 = x^3 - 3$ ja olkoon β tämän polynomin nollakohta. Jakolasku antaa nyt

$$\begin{aligned} f &= (x^3 - 2x^2 + 7x + 4)(x^3 - 3) - 9x^2 + 26x + 13 \\ \implies f(\beta) &= -9\beta^2 + 26\beta + 13. \end{aligned}$$

★

Esimerkki 4. Matti Lehtisen tehtäväkokoelmassa *Kilpailumatematiikan lajeja ja periaatteita* oli seuraava tehtävä.

Olkoon α polynomin $f = x^6 - 18x^3 + 1$ reaalin nollakohta. Laske $\alpha^4 + 1/\alpha^4$.

Myös Solmun tehtäväkokoelmassa (Solmu 3/2021) oli käytännössä sama tehtävä:

Olkoon α polynomin $\hat{f} = x^4 - 7x^2 + 1$ positiivinen nollakohta. Laske $\alpha^5 + 1/\alpha^5$.

Kummankin tehtävän alkuperäinen muotoilu oli hiukan toinen. Esimerkiksi Lehtinen kirjoitti: ”reaaliluvulle x on voimassa $x^3 + 1/x^3 = 18$ ”. Tässä ratkaisijaa hämätään käyttämällä nollakohdalle ja muuttujalle samaa symbolia. Nämä kuitenkin pitäisi pitää erillään, koska ratkaisu perustuu tekijöihinjakoon, ja tällöin nollakohdalla täytyy olla eri symboli kuin muuttujalla.

Joka tapauksessa molemmat tehtävät ratkeavat yhtä aikaa, koska tehtävien polynomeilla on yhteinen tekijä:

$$\begin{aligned} f &= (x^2 - 3x + 1)(x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 3x + 1) \\ \hat{f} &= (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Tehtävissä on siis eri polynomi, mutta sama α . Luki- ja kenties ihmettelee, miten kahdessa eri tehtävässä on sattumalta sama tekijä. Vai onko se sittenkään sattumaa? Tämän voi ajatella niin, että tehtävän laatija on mennyt yli siitä mistä aita on matalin. Jos lähdetään liikkeelle tekijästä $x^2 + ax + b$ ja etsitään yksinkertaisinta sopivaa tapausta, niin ensin valitaan $b = 1$. Sitten huomataan, että jos $a = \pm 1$, niin nollakohdat olisivat kompleksisia. Toisaalta jos $a = \pm 2$, niin tällöin kyseessä olisi kaksinkertainen nollakohta. Siis $x^2 \pm 3x + 1$ on tavallaan yksinkertaisin mahdollinen tilanteeseen sopiva polynomi.

wxMaximalla tekijät saadaan suoraan komennon `factor` avulla. Katsotaan nyt ensin, miten tehtävä ratkeaa, kun

⁷Jätän lukijalle harjoitustehtäväksi sen pohtimisen mitä nämä muut syyt voisivat olla.

tekijät tiedetään, ja vasta sitten, miten tekijät voitaisiin löytää, jos komentoa `factor` ei ole käytössä.

Polynomin f reaaliset nollakohdat α ja β ovat polynomin $g = x^2 - 3x + 1$ nollakohdat ja selvästi pätee

$$\beta = 3 - \alpha = 1/\alpha.$$

Molemmat reaaliset nollakohdat antavat saman tuloksen:

$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \alpha^4 + \beta^4 = \frac{1}{\beta^4} + \beta^4.$$

Sitten vain lasketaan. Koska $1/\alpha = 3 - \alpha$, niin

$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \alpha^4 + (3 - \alpha)^4.$$

Olkoon nyt

$$f_0 = x^4 + (3 - x)^4.$$

Kuten esimerkissä 3, halutaan laskea $f_0(\alpha)$. Jakamalla g :llä saadaan

$$f_0 = (2x^2 - 6x + 34)(x^2 - 3x + 1) + 47,$$

joten $f_0(\alpha) = 47$. Solmun tehtävässä määritellään $f_1 = x^5 + (3 - x)^5$, mistä sitten jakamalla saadaan

$$f_1 = (15x^2 - 45x + 120)(x^2 - 3x + 1) + 123,$$

joten $f_1(\alpha) = 123$.

Kompleksiset nollakohdat antavat eri tuloksen ja vastaukset eivät ole rationaalilukuja. ☆

Tehtävästä voisi ehkä saada käsityksen, että nollakohden reaalisuus oli jotenkin oleellista, mutta näin ei ole. Vastaus on yksinkertainen sen takia, että löydettiin toisen asteen polynomi, joka oli annetun polynomin tekijä, ja reaaliset nollakohdat olivat tämän tekijän nollakohdat. Jätänkin harjoitustehtäväksi seuraavan jatkokysymyksen.

Olkoon α polynomin $f = x^6 - 286x^3/343 + 1$ nollakohta. Laske $\alpha^4 + 1/\alpha^4$.

Ennen kuin katsotaan miten polynomien f ja $\hat{f}$ tekijät löydetään, niin katsotaan kuutiojuurien nimeämistä. Tätä tarvitaan myös viimeisessä esimerkissä.

Olkoon $h = x^2 + x + 1$ ja sanotaan, että h :n nollakohdat on ω , missä $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Mutta h :lla on kaksi nollakohtaa, ja nyt selvästi toinen on $-\omega - 1$, koska

$$(x - \omega)(x + \omega + 1) = x^2 + x - \omega^2 - \omega = x^2 + x + 1.$$

Lisäksi $\omega \neq -\omega - 1$, koska $-1/2$ ei ole h :n nollakohta. Tässäkään ei tarvitse tietää mitään algebran peruslauseesta, mikä onkin hyvä merkki: jos vältetään epäkonstruktiivisia ideoita, niin silloin oikeasti voidaan laskea jotain.

Jos käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, havaitaan, että polynomin $h = x^2 + x + 1$ nollakohdat

ovat kompleksisia. Mutta ω ei oikeastaan ole kompleksiluku, vaan se on määritelty kuten $\sqrt{2}$ ja i edellä, ja voidaan laskea esimerkiksi

$$\begin{aligned}(a + b\omega)(c + d\omega) &= ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc - bd)\omega.\end{aligned}$$

Luvun ω avulla voidaan nyt nimetä kuutiojuuret. Olkoon $f_2 = x^3 - 3$; tämän nollakohtaa on tapana merkitä symbolilla $\sqrt[3]{3}$. Mutta f_2 :llä on kolme nollakohtaa, joten tuon merkinnän avulla ei voida puhua niistä erillisinä lukuina. Nyt $\pm$ merkintä ei auta, koska on kolme eri vaihtoehtoa. En tiedä onko joku kenties ehdottanut jonkinlaista kolmoisetumerkkiä, kuten vaikkapa

$$\begin{matrix} \# \\ \natural \\ \flat \end{matrix} \sqrt[3]{3}.$$

Neljänsien ja korkeampien juurien merkinnöissä sitten pitäisi keksiä vielä luovempia yritelmiä.

Kolmoisetumerkin sijaan käytetään lukua ω . On helppo tarkistaa, että $\omega^3 = (-\omega - 1)^3 = 1$. Esimerkiksi

$$\omega^3 = \omega\omega^2 = -\omega(1 + \omega) = -\omega - \omega^2 = 1.$$

Nyt f_2 :n nollakohdat saadaan helposti. Olkoon β luku, jolle pätee $\beta^3 - 3 = 0$. Kaksi muuta nollakohtaa ovat $\omega\beta$ ja $-(\omega + 1)\beta$, koska

$$\begin{aligned}(\omega\beta)^3 &= \omega^3\beta^3 = \beta^3 = 3 \\ ((-\omega - 1)\beta)^3 &= -(\omega + 1)^3\beta^3 = \beta^3 = 3.\end{aligned}$$

Polynomi $f_2 = x^3 - 3$ voidaan siis jakaa tekijöihin:

$$\begin{aligned}f_2 &= x^3 - 3 = (x - \# \sqrt[3]{3})(x - \natural \sqrt[3]{3})(x - \flat \sqrt[3]{3}) \\ &= (x - \beta)(x - \omega\beta)(x + (\omega + 1)\beta).\end{aligned}\quad (4)$$

Huomaa erityisesti, että nämä kolme nollakohtaa ovat erisuuria, ja tässä tekijöihinjaossa ei tarvinnut tietää mitään kompleksiluvuista tai algebran peruslauseesta.

Esimerkki 5. Katsotaan nyt miten yhtälössä (3) olevien polynomien tekijät voidaan löytää.

Olkoot $\pm\alpha$ ja $\pm\beta$ polynomin $\hat{f}$ nollakohdat. Voidaan siis kirjoittaa

$$\hat{f} = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - \beta)(x + \beta).$$

Koska $\alpha^2\beta^2 = 1$, niin tästä saadaan

$$\hat{f} = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - 1/\alpha)(x + 1/\alpha).$$

Merkitään $a = \alpha + 1/\alpha$, jolloin

$$\begin{aligned}\hat{f} &= (x^2 - ax + 1)(x^2 + ax + 1) \\ &= x^4 + (2 - a^2)x^2 + 1 = x^4 - 7x^2 + 1.\end{aligned}$$

Siis $a = \pm 3$.

Olkoot nyt α ja β polynomin f reaaliset nollakohdat. Muut nollakohdat ovat

$$\alpha\omega, \beta\omega, -\alpha(\omega+1), -\beta(\omega+1).$$

Kaikkien nollakohtien tulo on yksi, [7, kaava (4)], ja $-\omega(\omega+1) = 1$, joten $\alpha^3\beta^3 = 1$. Koska oletuksen mukaan α ja β ovat reaalisia, niin $\alpha\beta = 1$. Merkitään $a = \alpha + \beta = \alpha + 1/\alpha$. Tällöin siis

$$g_0 = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - ax + 1.$$

Koska α ja β ovat f :n nollakohtia, niin g_0 on f :n tekijä. Toinen tekijä on selvästi

$$g_1 = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$$

joillekin b, c ja d . Kertomalla auki saadaan

$$f - g_0g_1 = (a - b)x^5 + (ab - c - 1)x^4 + (ac - d - b - 18)x^3 + (ad - c - 1)x^2 + (a - d)x.$$

Siispä $b = d = a$ ja $c = a^2 - 1$ ja a :lle saadaan

$$a^3 - 3a - 18 = (a - 3)(a^2 + 3a + 6) = 0,$$

joten $a = 3$.

Katsotaan vielä toinen tapa. Kirjoitetaan ensin

$$g_1 = (x - \omega\alpha)(x - \omega\beta)(x + (\omega + 1)\alpha)(x + (\omega + 1)\beta).$$

Koska $\alpha + \beta = a$, niin heti voidaan eliminoida β , jolloin saadaan

$$g_1 = (x - \omega\alpha)(x - \omega(a - \alpha))(x + (\omega + 1)\alpha)(x + (\omega + 1)(a - \alpha)).$$

Tulkitaan nyt luvut ω, α ja a muuttujiksi, ja määritellään polynomit

$$g_\omega = \omega^2 + \omega + 1 \\ g_\alpha = \alpha^2 - a\alpha + 1.$$

Jaetaan sitten g_1 polynomin g_ω suhteen:

$$g_1 = q_1g_\omega + r_1 \\ r_1 = \alpha^4 - 2a\alpha^3 + (x^2 - ax + a^2)\alpha^2 + ax(a - x)\alpha + x^2(x^2 + ax + a^2).$$

Tulkitaan sitten, että α on muuttuja, ja a ja x ovat parametreja, ja jaetaan g_α :n suhteen:

$$r_1 = q_2g_\alpha + r_2 \\ r_2 = x^4 + ax^3 + (a^2 - 1)x^2 + ax + 1.$$

★

Esimerkki 6. Matematiikkavalmennuksen tehtävä, syyskuu 2016.

Etsi sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on nollakohta $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Tässä siis pitää etsiä polynomi, jonka ”ratkaisukaava” on

$$x = \pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}. \quad (5)$$

Kun otetaan huomioon kaikki etumerkkikombinaatiot, niin huomataan, että lauseke $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ voidaan tulkita kuudella eri tavalla. Haluttu polynomi ei voi ”tietää”, mitä tulkintaa siltä vaaditaan, joten sillä täytyy olla nämä kaikki nollakohdat: sen täytyy olla varautunut kaikkeen! Polynomin aste on siis kuusi, ja jos nollakohdat ovat $b_1, \dots, b_6$, niin vastaus on

$$f = (x - b_1) \cdots (x - b_6).$$

Nyt pitää vain nimetä luvut b_j ja kertoa auki.

Olkoon α polynomin $g = x^2 - 2$ nollakohta; käyttämällä lisäksi yhtälön (4) tekijöitä nähdään, että nollakohdat ovat

$$b_1 = \alpha + \beta, \quad b_2 = \alpha + \omega\beta, \quad b_3 = \alpha - (\omega + 1)\beta \\ b_4 = -\alpha + \beta, \quad b_5 = -\alpha + \omega\beta, \quad b_6 = -\alpha - (\omega + 1)\beta.$$

Nyt vain lasketaan:

$$h_1 = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) = (x - \alpha)^3 - 3 \\ = x^3 + 6x - 3 - \alpha(3x^2 + 2) \\ h_2 = (x - b_4)(x - b_5)(x - b_6) = (x + \alpha)^3 - 3 \\ = x^3 + 6x - 3 + \alpha(3x^2 + 2).$$

Tästä sitten saadaan

$$f = h_1h_2 = (x^3 + 6x - 3)^2 - 2(3x^2 + 2)^2 \\ = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Täysin algoritmisesti vastaus saadaan seuraavasti. Tulkitaan taas α, β ja ω muuttujiksi ja määritellään polynomit $g_\alpha = \alpha^2 - 2$, $g_\beta = \beta^3 - 3$ ja $g_\omega = \omega^2 + \omega + 1$. Sitten lasketaan jakolaskualgoritmilla

$$f = q_0g_\omega + r_0 \\ r_0 = x^6 - 3\alpha^2x^4 - 2\beta^3x^3 + 3\alpha^4x^2 - 6\alpha^2\beta^3x + \beta^6 - \alpha^6 \\ r_0 = q_1g_\alpha + r_1 \\ r_1 = x^6 - 6x^4 - 2\beta^3x^3 + 12x^2 - 12\beta^3x + \beta^6 - 8 \\ r_1 = q_2g_\beta + r_2 \\ r_2 = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Ensin suoritetaan jakolasku muuttujan ω suhteen, sitten α :n ja lopuksi β :n. Huomaa, että ei ole väliä, missä järjestyksessä tämä tehdään, siinä mielessä, että aina saadaan sama r_2 . Luonnollisesti r_0 ja r_1 riippuvat jakojärjestyksestä.

Tämä voidaan laskea wxMaximalla seuraavasti. Määritellään ensin polynomit:

$$ga : \alpha^2 - 2; \quad gb : \beta^3 - 3; \quad go : \omega^2 + \omega + 1;$$

wxMaximassa kaksoispiste on sijoitusoperaattori ja puolipiste tarkoittaa komennon päättymistä. Sitten määritellään polynomi, jota halutaan sieventää:

$$\begin{aligned} f : & (x - \alpha - \beta) \cdot (x - \alpha - \omega \cdot \beta) \cdot \\ & (x - \alpha + (\omega + 1) \cdot \beta) \cdot (x + \alpha - \beta) \cdot \\ & (x + \alpha - \omega \cdot \beta) \cdot (x + \alpha + (\omega + 1) \cdot \beta) \end{aligned}$$

Ratkaisu saadaan nyt komennon `divide` avulla:

```
qr:divide(f,ga,α);
qr0:divide(qr[2],gb,β);
qr1:divide(qr0[2],go,ω);
```

Haluttu polynomi on `qr1[2]`.

Ratkaistaan tämä nyt aivan toisella tavalla eliminoinnin avulla, kuten esimerkeissä 1 ja 2. Olkoon siis

$$\begin{aligned} f_0 &= x - u - v \\ f_1 &= u^2 - 2 \\ f_2 &= v^3 - 3. \end{aligned}$$

Eliminoidaan muuttujat u ja v , jolloin jäljelle jää haluttu polynomi. Huomaa erityisesti, että lasku on täysin algoritmisen. Lisäksi tässä ei tarvitse välittää mistään rajoituksista muuttujien u ja v suhteen, toisin kuin esimerkiksi 1, vaan päinvastoin tässä nimenomaan pitää sallia kaikki mahdolliset arvot.

Eliminoidaan ensin u :

$$\begin{aligned} f_3 &= u f_0 + f_1 = (x - v)u - 2 \\ f_4 &= (x - v)f_0 + f_3 = v^2 - 2xv + x^2 - 2. \end{aligned}$$

Sitten eliminoidaan v .

$$\begin{aligned} f_5 &= v f_4 - f_2 = -2xv^2 + (x^2 - 2)v + 3 \\ f_6 &= 2x f_4 + f_5 = -(3x^2 + 2)v + 2x^3 - 4x + 3 \\ f_7 &= (3x^2 + 2)f_4 + v f_6 \\ &= (-4x^3 - 8x + 3)v + 3x^4 - 4x^2 - 4 \\ f_8 &= (-4x^3 - 8x + 3)f_6 + (3x^2 + 2)f_7 \\ &= x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1. \end{aligned}$$

Tämän toisen menetelmän mielenkiintoinen piirre on se, että sanaa nollakohta ei tarvitse edes mainita. ☆

Entäpä sitten jos haluttaisiin mennä toiseen suuntaan: jos on annettu polynomi

$$f = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1,$$

niin miten voidaan tietää, että tällä polynomilla on ”ratkaisukaava” (5)? Tähän ei ole mitään helppoa vastausta. Tähän liittyviä kysymyksiä on perusteellisesti käsitelty muun muassa kirjoissa [2, 6]. Avainsana on *juurikunta* (splitting field).

Jatkuu ensi numerossa

Jakolaskualgoritmi oli taas hyödyllinen työkalu, kuten viime kerrallakin. Usein itse tehtävässä ei varsinaisesti tule esille, että ratkaisua kannattaa etsiä nimenomaan tätä kautta. Tavallaan pitää tottua ajattelemaan asiaa jakolaskun kannalta. Tehtävissä ei tosiaankaan kannusteta tämänkaltaiseen näkökulmaan. Tyypillisesti ei koskaan sanota esimerkiksi, että olkoon $f = 5x^3 - 7x^2 - 2x - 9$ vaan kirjoitetaan: tarkastellaan yhtälöä

$$\frac{x}{7x^2 + 9} = \frac{1}{5x^2 - 2}.$$

Ratkaisijaa hämätään kirjoittamalla ongelma hassusti, jolloin ei ehkä heti tule mieleen, että tehtävä ratkeaa systemaattisesti polynomityökalujen avulla.

Myös polynomin jakaminen tekijöihin ja muuttujien eliminointi esiintyy jatkuvasti polynomitehtävien yhteydessä. Palataan tähän tarkemmin joskus myöhemmin.

Tässä ja edellisessä kirjoituksessa tarkasteltiin polynomiyhtälöitä. Itse asiassa osoittautuu, että jakolasku on hyödyllinen myös epäyhtälöitten yhteydessä. Tämä oli minullekin hiukan odottamatonta, koska epäyhtälöitten tapauksessa ei ole täysin selvää, miksi tämä tapa johtaa niin usein haluttuun lopputulokseen. Palataan tähänkin myöhemmin ja katsotaan ensi kerralla, miten polynomien avulla voidaan tarkastella Eukleideen geometrian tehtäviä.

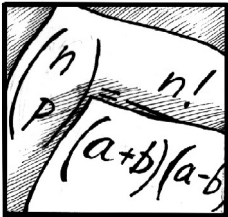
Luonnollisesti tarkoitus ei ole täysin korvata geometrian menetelmiä polynomeilla, mutta uusi näkökulma antaa aina uudenlaisia ideoita, ja esimerkiksi polynomien näkökulmasta saadaan helposti pari mielenkiintoista tulosta. Ensimmäinen ongelma oli vaivannut matemaatikkoja satoja vuosia, ja toista pidettiin varsin yllyttävänä kun se löydettiin:

- (i) Kuutiojuurta ei voi konstruoida harpilla ja viivoittimella.
- (ii) Itse asiassa viivoitin on turha: kaikki konstruktiot voidaan tehdä pelkästään harpilla.

Viitteet

- [1] G. V. Bard, *Sage for undergraduates*, American Mathematical Society, 2015.
- [2] D. A. Cox, *Galois theory*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics (Hoboken), John Wiley & Sons, 2012.
- [3] D. A. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

- | | |
|--|---|
| <p>[4] P. Davis, R. Hersh, and E. Marchisotto, <i>The mathematical experience, study edition</i>, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.</p> <p>[5] É. Ghys, <i>A singular mathematical promenade</i>, ENS Éditions, Lyon, 2017.</p> | <p>[6] T. Mora, <i>Solving polynomial equation systems. I</i>, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 88, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, The Kronecker-Duval philosophy.</p> <p>[7] J. Tuomela, <i>Tarinoita polynomeista (osa 1)</i>, Solmu (2022), no. 2.</p> |
|--|---|



Harmonisesta keskiarvosta

Pekka Smolander

Karelia-ammattikorkeakoulu

Luvuille voidaan tavallisen keskiarvon eli aritmeettisen keskiarvon lisäksi määritellä myös muita keskiarvoja, esimerkiksi geometrinen keskiarvo ja harmoninen keskiarvo. Muistutetaan mieleen, että positiivisten lukujen a ja b aritmeettinen keskiarvo on

$$A = \frac{a+b}{2}$$

ja geometrinen keskiarvo

$$G = \sqrt{ab}.$$

Harmoninen keskiarvo voidaan määritellä käänteislukujen avulla seuraavalla ilmaisulla: "Lukujen a ja b harmoninen keskiarvo H on käänteislukujen $1/a$ ja $1/b$ aritmeettisen keskiarvon käänteisluku." Tämä ajatus ilmaistaan kaavalla

$$\frac{1}{H} = \frac{1/a + 1/b}{2},$$

tai

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Ratkaisemalla tästä H saadaan, että lukujen a ja b harmoninen keskiarvo on

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Tarkastelemalla kaavoja nähdään, että nämä kolme keskiarvoa liittyvät läheisesti toisiinsa. Nimittäin positiivisille luvuille a ja b saadaan

$$AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2.$$

Näin ollen

$$G = \sqrt{AH},$$

eli G on lukujen A ja H geometrinen keskiarvo.

Tässä kirjoitelmassa ollaan kiinnostuneita harmonisesta keskiarvosta. Katsotaan ensin, kuinka se liittyy keskinopeuksien laskemiseen ja värähtelevän kielen äänen korkeuksiin. Lopuksi käsitellään muutamia harmonisen keskiarvon geometrisia konstruktioita.

Yksi harmonisen keskiarvon konstruktio on esitelty Solmun artikkelissa [1]. Siinä konstruoidaan useita kahden luvun eri keskiarvoja puolisuunnikkaan avulla. Nettihaku "harmonic mean" johtaa verkkosivuille, joilta löytyy lisää harmonisen keskiarvon konstruktioita. Katso esimerkiksi [2].

Nopeuksien keskiarvo

Tarkastellaan seuraavaa ajatusleikkiä. Pekka ajaa polkupyörällä ensin 5 km nopeudella 10 km/h ja sen jälkeen 5 km nopeudella 30 km/h. Mikä on Pekan keskinopeus koko 10 km pyörälenkillä?

Ensiksi tulee mieleen nopeus 20 km/h, sillä 20 on lukujen 10 ja 30 keskiarvo. Tällä nopeudella Pekalta kuluisi 10 km:n matkaan puoli tuntia. Mutta Pekalta kuluu

nopeudella 10 km/h jo pyörälenkin 5 km:n alkumatkaan puoli tuntia. Siis keskinopeus ei voi olla 20 km/h. Luovutaan kokeilemisesta.

Oikea keskinopeus saadaan, kun lasketaan ensin matkaan käytetty aika ja jaetaan sillä matka 10 km. Kuten jo edellä huomattiin 5 km:n matkaan nopeudella 10 km/h aikaa kuluu 30 min. Vastaavasti 5 km:n loppumatkaan nopeudella 30 km/h aikaa kuluu 10 min. Kokonaan 10 km pyörälenkkiin kuluu siis aikaa 40 min, josta saadaan keskinopeudeksi 15 km/h.

Mutta kuinka luku 15 liittyy lukuihin 10 ja 30? Lasketaan keskinopeus yleisemmässä tilanteessa. Ajatellaan, että ensin ajetaan matka s keskinopeudella v_1 ja sen jälkeen sama matka s keskinopeudella v_2 . Näihin matkoihin käytetään ajat $t_1 = s/v_1$ ja $t_2 = s/v_2$. Siis keskinopeus koko matkalla on

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2},$$

josta muokkauksen jälkeen saadaan

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Siis v on lukujen v_1 ja v_2 harmoninen keskiarvo. Nyt jos $v_1 = 10$ ja $v_2 = 30$, niin

$$v = \frac{2 \cdot 10 \cdot 30}{10 + 30} = 15.$$

Duurikolmisointu

Nimitykset harmoninen keskiarvo ja harmoninen jono periytyvät antiikin Kreikasta, jossa Pythagoraan koulunkunta teki huomioita värähtelevien kielten pituuksien ja sävelkorkeuksien yhteydestä. Huomattiin, että jos kolmen samanlaisen kielen pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten luvut $1/4$, $1/5$ ja $1/6$, niin saadaan harmoniselta kuulostava sointu. Näin muodostuukin puhdas duurikolmisointu. Katsotaan, kuinka se liittyy harmoniseen keskiarvoon.

Tarkastellaan värähtelevää kieltä ja merkitään vapaan kielen pituutta luvulla 1. Tehdään seuraavia huomioita:

- Jos kieli laitetaan värähtelemään ensin koko pituudella 1 ja sitten pituudella $1/2$, niin äänien taajuudet muodostavat oktaavin suuruisen intervallin.
- Lukujen 1 ja $1/2$ harmoninen keskiarvo on $2/3$. Kielen pituuksia 1 ja $2/3$ vastaavien äänien taajuudet muodostavat intervallin puhdas kvintti.
- Lukujen 1 ja $2/3$ harmoninen keskiarvo on $4/5$ ja kielen pituuksia 1 ja $4/5$ vastaavista äänien taajuuksista syntyy intervalli suuri terssi.

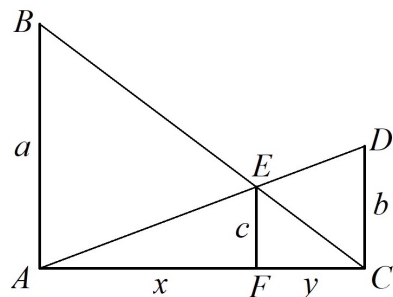
Näin ollen värähdyspituuksia 1 , $4/5$ ja $2/3$ vastaavista taajuuksista muodostuu duurikolmisointu.

Huomataan, että duurisoinnun antavat kielen värähtelypituudet 1 , $4/5$ ja $2/3$ suhtautuvat toisiinsa samalla tavalla kuin luvut $1/4$, $1/5$ ja $1/6$. Kannattaa huomata myös, että tässä puhutaan puhtaista intervalleista. Sointinten tasaviritys ei aivan täsmälleen tuota tässä tarkasteltuja kielen pituuksien suhteita.

Konstruktio

Kahden positiivisen luvun harmoniselle keskiarvolle on keksitty useita erilaisia konstruktioita. Solmun artikkelissa [1] esitetään yksi konstruktio puolisuunnikkaan avulla. Piirtämällä puolisuunnikas sopivasti voidaan tuota päättelyä hieman keventää.

Olkoot a ja b positiivisia lukuja. Piirretään janat AB ja CD siten, että $a = AB$ ja $b = CD$ ja että nämä janat ovat kohtisuorassa janan AC kanssa. Piirretään yhdysjanat AD ja BC . Olkoon E yhdysjanojen leikkauspiste ja F pisteen E kohtisuora projektio janalle AC . Merkitään $c = EF$ ja osoitetaan, että c on lukujen a ja b harmonisen keskiarvon puolikas.



Merkitään $x = AF$ ja $y = CF$. Kolmioiden ABC ja FEC yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{x+y}{y} = \frac{a}{c}$$

eli

$$\frac{x}{y} + 1 = \frac{a}{c}.$$

Koska x ja y ovat yhdenmuotoisten kolmioiden ABE ja CDE korkeudet, niin niille pätee

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Siis

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a}{c}.$$

Ratkaisemalla tästä c saadaan

$$c = \frac{ab}{a+b}.$$

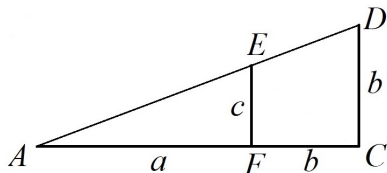
Siis c on puolet lukujen a ja b harmonisesta keskiarvosta.

Virtaviivaistetaan konstruktiota

Edellisessä konstruktiossa käytettiin verrantoa

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Koska $x + y$ on janan AC pituus, se voidaan valita vapaasti. Valitaan nyt $x = a$ ja $y = b$. Tällöin riittää tarkastella edellisen kuvan kolmiota ACD , joka on irrotettu ohaiseen kuvaan.



Muodostetaan siis suorakulmainen kolmio ACD , jolla on kateetit $a + b = AC$ ja $b = CD$. Valitaan sivulta AC sellainen piste F , että $a = AF$ ja $b = FC$. Valitaan sivulta AD piste E siten, että FE on yhdensuuntainen sivun CD kanssa.

Merkitään $c = EF$. Nyt nähdään, että c on puolet lukujen a ja b harmonisesta keskiarvosta. Nimittäin kolmiot AFE ja ACD ovat yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{a + b}.$$

Siis

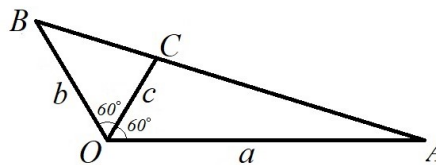
$$c = \frac{ab}{a + b}.$$

Tehtäviä

Aiheesta kiinnostunut lukija voi konstruoida positiivisten lukujen a ja b harmonisen keskiarvon puolikkaan seuraavien tehtävien avulla. Konstruktioiden todistukset ovat mukavia geometrian harjoitustehtäviä ja ne jätetään lukijalle.

Tehtävä 1. Piirretään kolmio OAB siten, että $a = OA$ ja $b = OB$. Lisäksi oletetaan, että kulma AOB on 120°

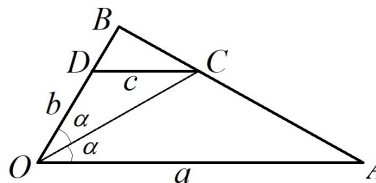
astetta. Olkoon C kulman AOB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste.



Osoita, että luvulle $c = OC$ pätee

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Tehtävä 2. Piirretään kolmio OAB siten, että $a = OA$ ja $b = OB$. Olkoon C kulman AOB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. Olkoon D sivun OB sellainen piste, että jana DC on yhdensuuntainen sivun OA kanssa.



Osoita, että luvulle $c = DC$ pätee

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Viitteet

- [1] Esa V. Vesalainen: ”Kahden muuttujan keskiarvoista”, Solmu 1/2019, s. 11-14.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2019/1/keskiarvoista.pdf>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_mean



Solmun tehtäviä

Tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

1. Osoita, että jos reaalityluvut x , y ja z toteuttavat yhtälön

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1,$$

niin

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0.$$

Määritä kaikki ehdon toteuttavat reaalityluvut.

2. Opi kirjoitti 2022 luvun listan seuraavasti: Listan kolmas luku on toinen luku jaettuna ensimmäisellä luvulla, listan neljäs luku on kolmas luku jaettuna toisella luvulla, ja niin edelleen, esimerkiksi listan 100. luku on 99. luku jaettuna 98. luvulla. Mikä on Oprin listan viimeinen luku, jos sen ensimmäinen luku on 20 ja toinen luku on 22?

3. Nelikulmion $ABCD$ sivut AD ja DC ovat yhtä pitkät. Kulman DAB suuruus on α , kulman ABC suuruus on 2α , kulman BCD suuruus on 3α ja kulman CDA suuruus on 4α . Osoita, että sivu AB on kaksi kertaa niin pitkä kuin sivu AD .

4. Olkoot x_1 ja x_2 yhtälön $15x^2 - 21x + 7 = 0$ reaalityjuuret. Määritä lausekkeen

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

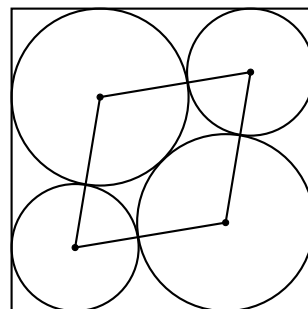
tarkka arvo.

5. Viisikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaksi sen kulmista ovat suoria. Kuinka suuria muut kolme kulmaa voivat olla?

6. Edel tekee puisia tikkuja, joiden pituus on kokonaistiluku. Mitkään kolme tikkuja eivät saa muodostaa kolmiota. Tikuissa on pituudeltaan 1 ja 10 olevat tikut ja pisimmän tikun pituus on 100. Kuinka monta tikkuja Edel voi enintään tehdä?

7. Kahden kolminumeroisen luvun keskiarvo on luku, joka saadaan kirjoittamalla kyseiset luvut peräkkäin ja erottaen luvut desimaalipilkulla. Mitkä nämä kaksi lukua ovat?

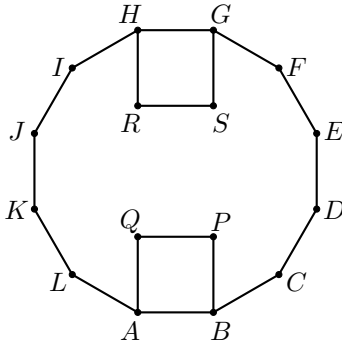
8. Yksikköneliön sisään piirretään neljä ympyrää kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Kaksi suurempaa ympyrää ovat samankokoiset ja samoin kaksi pienempää ympyrää ovat samankokoiset. Ympyrät sivuavat toisiaan ja neliön sivuja. Mikä on ympyröiden keskipisteet yhdistämällä muodostuvan vinoneliön pinta-ala?



9. Määritä kaikki positiiviset reaalityluvut x , joille $x + \frac{1}{x}$ on kokonaistiluku ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ on alkuluku.

10. Mitkä luvuista $1, \dots, 50$ voidaan lausua vähintään kahden peräkkäisen ei-negatiivisen kokonaistiluvun summana?

11. Säännöllisen 12-kulmion $ABCDEFGHIJKL$ sisään sivuille AB ja GH piirretään neliöt $ABPQ$ ja $GHSR$ kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Osoita, että PQ ja RS ovat säännöllisen 6-kulmion vastakaiset sivut.



12. Kahteen astiaan mahtuu kumpaankin 2 litraa nestettä. Ensimmäisessä astiassa on 2 litraa 100-prosenttista appelsiinimehua ja toisessa astiassa on 1 litra vettä. Puolet ensimmäisen astian appelsiinimehusta kaadetaan toiseen astiaan, jossa on vettä, ja neste sekoitetaan. Sekoitetusta nesteestä kaadetaan 1 litra takaisin ensimmäiseen astiaan. Menettely toistetaan: Ensimmäisestä astiasta kaadetaan 1 litra toiseen astiaan, neste sekoitetaan ja 1 litra sekoitettua nestettä kaadetaan takaisin ensimmäiseen astiaan. Kuinka monta prosenttia kummankin astian nesteestä on appelsiinimehua?

13. Kolme vihkoa ja kaksi lyijykynää maksavat kirja-kaupassa yhteensä 11,10 euroa. Viisi vihkoa ja neljä lyijykynää maksavat yhteensä 20,10 euroa. Mitä ovat yhden vihkon ja yhden lyijykynän hinnat?

14. Luvuista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 valitaan kolme eri lukua ja lasketaan ne yhteen. Tämä tehdään kaikilla mahdollisilla kolmen luvun valinnoilla. Osa summista on parillisia ja osa on parittomia. Kumpi tulos on yleisempi, parillinen vai pariton summa?

15. Shakkiturnauksessa oli viisi osallistujaa. Jokainen osallistuja pelasi kerran jokaista muuta osallistujaa vastaan. Voitosta sai yhden pisteen, tasapelistä 0,5 pistettä ja häviöstä 0 pistettä. Turnauksen lopuksi havaittiin, että (i) turnauksen voittanut pelaaja ei pelannut yhtään tasapeliä, (ii) toiseksi tullut pelaaja ei hävinnyt yhtään peliä, (iii) kaikilla pelaajilla oli eri määrä pisteitä. Kuinka monta pistettä pelaajat saivat?

16. Positiivisen desimaaliluvun desimaalipilkku siirretään neljä paikkaa oikealle. Saatua lukua on alkuperäisen luvun käänteisluku kerrottuna neljällä. Mikä on alkuperäinen luku?

17. Ratkaise yhtälöryhmä

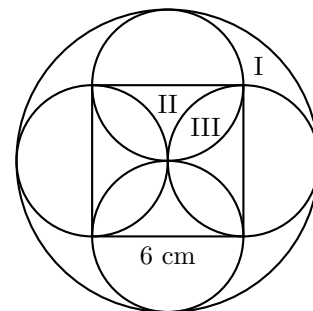
$$\begin{cases} a + d = 9, \\ ad + b = 8, \\ bd + c = 74, \\ cd = 18, \end{cases}$$

kun a, b, c, d ovat kokonaislukuja.

18. Kirppu on lukusuoralla kohdassa 0 valmiina hyppäämään. Jokaisella hyppyllään kirppu liikkuu 3 tai 5 yksikköä joko vasemmalle tai oikealle. Kirpun tavoite on käydä jokaisen luvun $1, \dots, 20$ kohdalla. Etsi jono, jossa on enintään 22 hyppyä ja joka toteuttaa vaaditun tavoitteen.

19. Valitaan kuutiosta satunnaisesti neljä kärkeä. Kaikki mahdolliset neljän kärjen valinnat ovat yhtä todennäköisiä. Mikä on todennäköisyys, että valitut kärjet muodostavat tetraedrin? Entä mikä on todennäköisyys, että valitut kärjet muodostavat säännöllisen tetraedrin?

20. Neliön sivun pituus on 6 cm. Jokainen sivu on ympyrän halkaisija kuten alla olevassa kuvassa on esitetty. Ison ympyrän keskipiste on neliön keskipisteessä ja sen säde on neliön sivun pituinen. Laske alueiden I, II ja III pinta-alat.



Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun tulevissa numeroissa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitukset suomeksi: Mika Koskenoja

Solmu 3/2022

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, jatko-opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

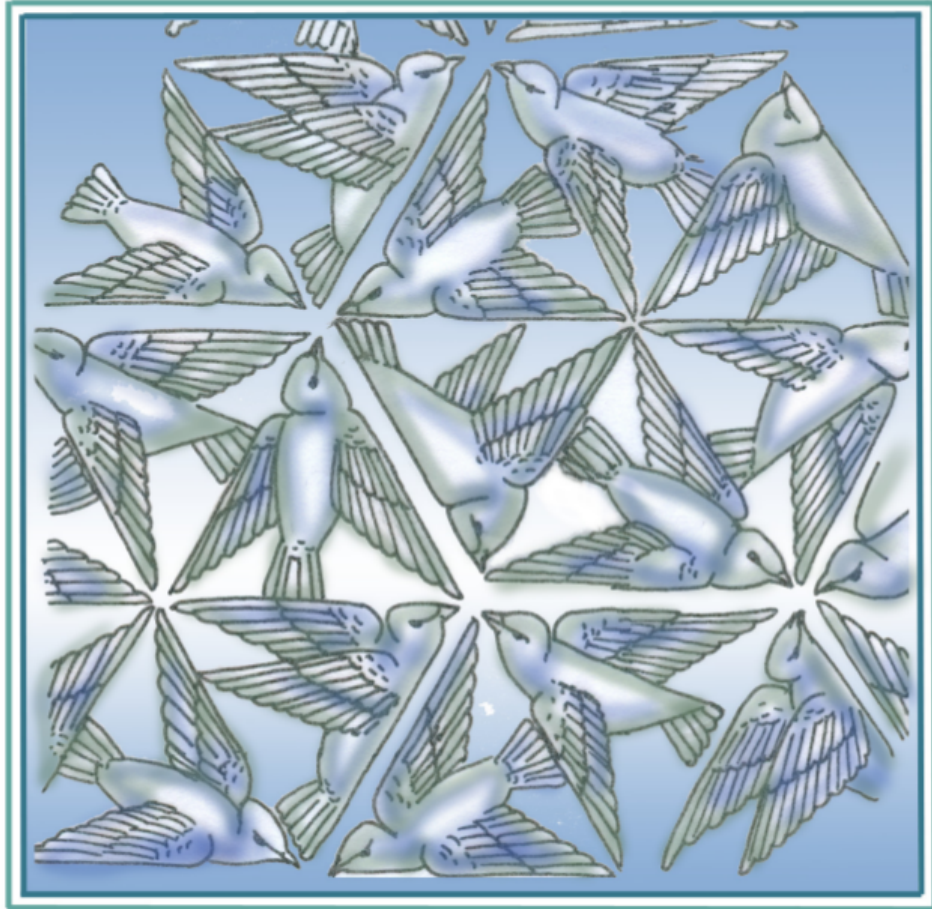
Noora Isoeskelä

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 1/2023 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.1.2023 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi