

S&LMU

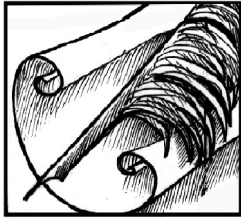
MATEMATIIKKALEHTI 2/2022

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Suuria ja vielä suurempia lukuja (Anne-Maria Ernvall-Hytönen).....	3
Yhden kiven laatoitus (Hannu Korhonen)	4
Solmun 3/2021 tehtävien ratkaisut	7
Tarinoita polynomeista (osa 1) (Jukka Tuomela)	13
Matematiikkadiplomit vuoden 2022 alusta syyskuun puoliväliin (Marjatta Näätänen)	19
Suorakulmio (Jukka Liukkonen).....	21
Tie jatko-opintoihin ulkomailla (Sylvester Eriksson-Bique).....	26



Suuria ja vielä suurempia lukuja

Pääkirjoitus

Eräänä iltana ekaluokkalainen lapseni kertoi, että yksi hänen kavereistaan uskoo, että googolplex on suurin luku ja siitä ei pääse yli. Ymmärrän hyvin lasten kiinnostuksen suuriin lukuihin. Minulla itselläni oli pienessä huoneeni seinällä lista, joka alkoi miljoona, biljoona, triljoona, kvadriljoona ja jatkui melko pitkälle.

Suurten lukujen hahmottaminen ei kuitenkaan ole helppoa. Aika nopeasti luvut muuttuvat niin suuriksi, että niitä harvoin oikeasti tarvitsee. Onkin helppo ymmärtää, miksi ekaluokkalainen uskoo, että suurin luku on olemassa. Ongelmat suurten lukujen kanssa näkyvät myös esimerkiksi ylioppilaskirjoituksissa silloin, jos kokelas saa laskimesta vaikkapa $101^{100^{99}} = \infty$ ja käyttää tätä sujuvasti osana argumenttia.

Matemaatikon näkökulmasta tällainen kokelaan virhe-käsitys on kovin kummallinen: miksi tuo äärellinen luku korotettuna potenssiin, joka on myös äärellisen luvun äärellinen potenssi voisi ikinä antaa äärettömän? Toisaalta, jos on tottunut siihen, että on täysin normaalia, jos laskin vaikkapa antaa tulokseksi, että $\tan 90^\circ = \infty$ (ja tämä tuloshan on ihan mielekäs!), niin ei välttämättä tule edes mieleen miettiä, onko se ääretön jossain toisessa tapauksessa järkevä.

Lisäksi näin suuria lukuja on valtavan hankala hahmottaa. Maailmankaikkeuden atomien lukumääräksi on arvioitu 10^{80} . Jo pelkkä googol on 10^{100} ja googolplex puolestaan 10^{googol} . On kovin hankala miettiä mitään, mihin koskaan törmäisi ja mikä olisi googolplexin suuruinen (paitsi jos ratkaisee tehtäviä, joissa on potenssitorneja).

Jos maailmankaikkeuden atomien lukumäärä on 10^{80} ja jos haluaisimme laskea kaikki permutaatiot, jotka näistä atomeista saataisiin, olisi niiden lukumäärä Stirlingin kaavalla noin

$$10^{80}! \sim \sqrt{2\pi 10^{80}} \left(\frac{10^{80}}{e}\right)^{10^{80}}.$$

Tämä luku on vielä ehkä hieman epäkäytännöllisessä muodossa, joten arvioidaan sitä. $\sqrt{2\pi 10^{80}} < 10^{80}$ ja $\frac{10^{80}}{e} < 10^{80}$, jolloin saadaan

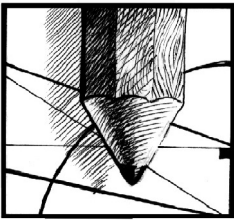
$$< 10^{80} \cdot 10^{80 \cdot 10^{80}}.$$

Vastaavasti voitaisiin myös arvioida lukumäärälle alaraja. Huomataan, että tällaisia permutaatioita on monta kertaluokkaa vähemmän kuin googolplexin verran, mutta sentään huomattavasti yli googolin verran.

Osa meistä on voinut kuulla luvusta e^{3100} siinä yhteydessä, että kun Harald Helfgott vuonna 2013 todisti ternärisen Goldbachin konjektuurin, niin ennen hänen todistustaan oli jo Vinogradov vuonna 1937 todistanut konjektuurin riittävän suurille luvuille ja vuonna 2002 Liu ja Wang osoittaneet, että riittävän suuri on suurempi kuin e^{3100} . Valtava luku, paljon suurempi kuin googol, mutta ei lähelläkään googolplexiä.

Olen päässyt ohimennen tekemään tuttavuutta googolplexiä reilusti suuremman luvun kanssa transkendenttilukuteorian puolella. Siellä vastaan tuli e^{950} . Tässä kohtaa voi todeta, että eipä tuo vielä kovin suuri ole, googolin joku pieni potenssi vain. Juu onkin siinä, että tämä oli erään luvun toinen logaritmi. Khasa ja Srinivasan nimittäin määrittivät Mahlerin transkendenttimittatodistuksessa erälle vakiolle tarkan arvon. Khassan ja Srinivasanin todistus oli voimassa vasta, kun tarkasteltiin sellaista polynomijoukkoa, jossa kerrointen itseisarvo oli rajoitettu parametrilla H , jolle piti olla voimassa esimerkiksi $\log \log H > e^{950}$. Koska $e^{950} > 10^{412}$ ja $e > 10^{1/3}$, voidaan tehdä helppo arvio $\log H > 10^{411}$, jolloin $H > e^{10^{411}} > 10^{10^{410}}$. Tämä luku on valtavasti suurempi kuin googolplex.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Yhden kiven laatoitus

Hannu Korhonen

Matematiikassa *laatoittaminen* (engl. tiling tai tessellation) tarkoittaa tason peittämistä kuvioilla, jotka eivät peitä toisiaan osittainkaan ja joiden väliin ei jää rakoja tai reikiä. Käytännössä useimmat seinä-, lattia- tai katulaatoitukset tehdään neliön tai suorakulmion muotoisista laatoista. Monilla muillakin kuvioilla laatoittaminen onnistuu (kuva 1). Laatoitus on jaksollinen, jos tasoa voidaan siirtää niin, että kuviointi ei muutu. Ongelmallisempia ovat laatoitukset, jotka eivät ole jaksollisia. Sellainen laatoitus onnistuu yhdelläkin laattalla.

Jaksollinen (engl. periodic) laatoitus on siirtosymmetrinen (kuva 1, kolme vasemmanpuoleista). Kuvio ei muutu, jos koko taso siirretään tiettyyn suuntaan tietyn matkan verran. Samalla kuviolla voi olla kaksikin toisistaan riippumatonta siirtosuuntaa ja muita näiden lineaariyhdistelmiä. Siirtosymmetrinen kuvio voi olla myös peilaus- tai kiertosymmetrinen. Penrosen tai Rissasen laatoista kootut ruusukuvioiset, kiertosymmetriset laatoitukset (kuva 1, kaksi oikeanpuoleista)

ovat esimerkkejä *jaksottomista* (engl. aperiodic, non-periodic) laatoituksista [1], [2].

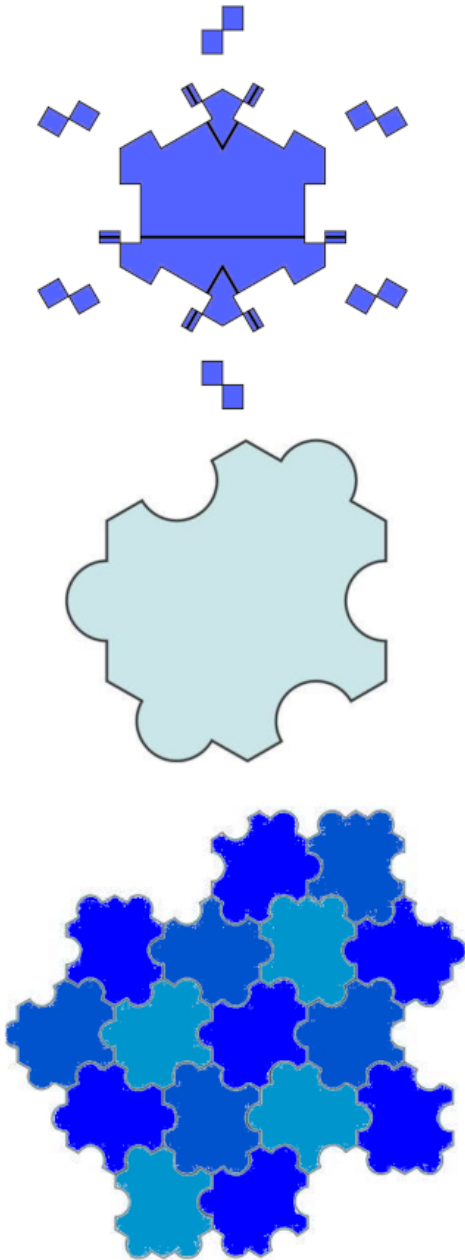
Sekä Penrosen että Rissasen laatoista voidaan tehdä sekä jaksollisia että jaksottomia laatoituksia. Penrosen laatoituksessa käytetään kahta erilaista laattaa ja Rissasen laatoituksessa useampia. Jaksottomaksi laatoitus voidaan pakottaa piirtämällä laattoihin kuvioita, joiden täytyy jatkua reunan yli seuraavalle laatalle, tai tekemällä laatan reunoihin koloja ja ulokkeita, jotka sallivat vain tietyt asennot. Useista laatoista kootuista jaksottomista tason peitoista on kirjoitettu paljon 1970-luvulta lähtien [5], [6], [7], [8].

Pitkään oli avoinna kysymys, olisiko olemassa laatta, josta voitaisiin koota tason peitto, mutta joka ei sallisi jaksollisuutta. Tästä nimi ”*yhden kiven ongelma*” (engl. ein-stein problem). Ensimmäinen ratkaisu keksittiin vasta kymmenkunta vuotta sitten [9]. Sitä ratkaisua ei voi luonnehtia tyylikkääksi, sillä ”laatta” on monimutkainen eikä edes yhtenäinen (kuva 2, ylin).



Kuva 1: Kolme jaksollista (*shakkilauta*, *Pythagoraan laatoitus* ja *Escherin Lintu/kala no 82*) sekä kaksi jaksotonta laatoitusta (*Penrose* [3] ja *Rissanen* [4]).

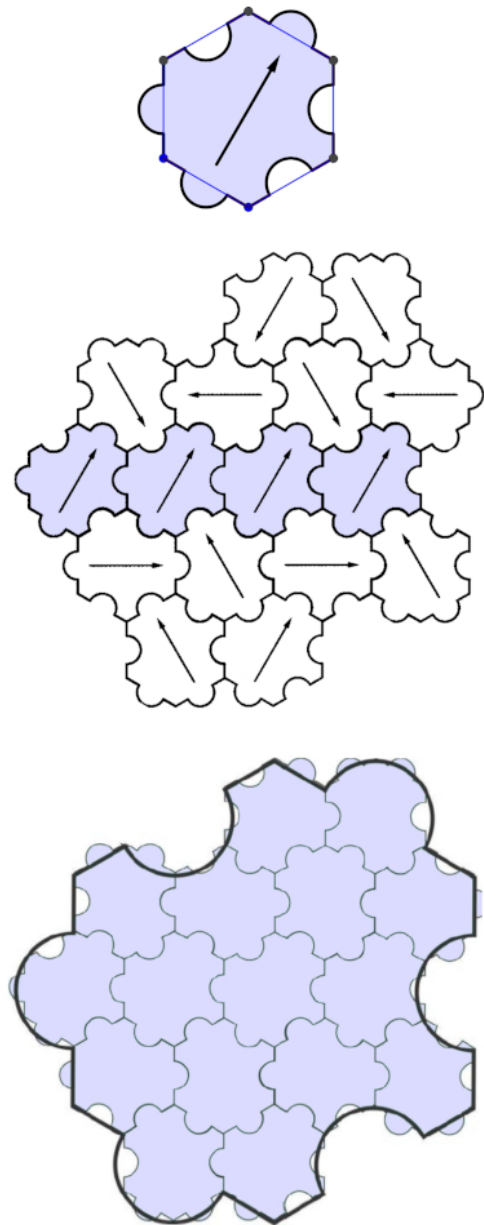
Ihan tuore keksintö [10] on yhtenäinen kuvio, josta voidaan koota jaksoton ja vain jaksoton tason peitto (kuva 2, keskimäinen osakuva). Viiteartikkeli sisältää myös todistuksen laatoituksen jaksottomuudelle. Jaksollisia laatoituksia (esimerkiksi kuva 1, kaksi vasemmanpuoleista) on helppo luoda matematiikkaohjelmilla, esimerkiksi Geogebraalla [11], tai ohjelmoimalla. Sen sijaan jaksottoman laatoituksen rakentaminen on monivaiheisempaa.



Kuva 2: Socolar-Taylor-laatta (ylin [9]), HexSeed-laatta (keskimäinen [10]) ja osa jälkimmäisistä koottua laatoitusta (alin osakuva).

HexSeed-laatan rakenneperusta on säännöllinen kuusikulmio (kuva 3, ylin osakuva). Sen kolmelle sivulle teh-

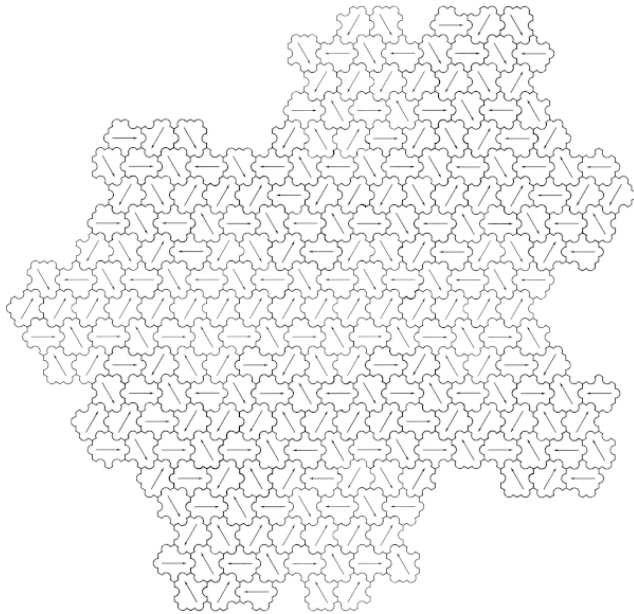
dään puoliympyrän muotoiset lovet ja irrotetut palat siirretään ulokkeiksi muille sivuille. Tason peiton koostamiseen johtava korvaussääntö muodostuu 16 toisiinsa liitetystä laatasta (kuva 3, keskimäinen osakuva). Peruslaattojen kiertokulmat ovat 60 asteen kerrannaisia. Tulokuvio on pääpiirteittäin peruslaatan muotoinen kohdistamisen määräävine lovineen ja ulokkeineen (kuva 3, alin osakuva).



Kuva 3: HexSeed-peruslaatan rakenne ja sääntö, jonka mukaan laatoitus kootaan. Nuolet osoittavat peruslaatan suunnan.

Seuraavassa vaiheessa 16 peruslaatan muodostamia kuvioita liitetään vierekkäin saman korvaussäännön mukaan. Toisen korvauksen jälkeen kuviossa on 256 peruslaattaa (kuva 4). Näitä ryhmiä liitetään sitten taas

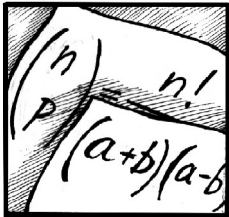
toisiinsa samalla periaatteella. Tulokuvioon sovelletaan samaa korvaussääntöä yhä uudestaan ja uudestaan. Seuraavissa korvauksissa syntyvissä kuvioissa on 4 096, 65 536, 1 048 576, ... peruslaattaa. Peiton pinta-ala kasvaa 16-kertaiseksi jokaisella korvauskerralla. Koko taso peittyy, kun geometrista algoritmia jatketaan rajatta.



Kuva 4: HexSeed-laatoista rakentuva jaksoton tason peitto toisen korvauksen jälkeen.

Lähteitä ja lisäluettavaa

- [1] Korhonen, Hannu: *Sub Rosa*, Dimensio 6/2018 s. 40–41.
- [2] Korhonen, Hannu: *Laatoitusten geometriaa*, Dimensio 2019, osoitteessa <https://dimensiolehti.fi/laatoitusten-geometriaa/>
- [3] Wikipedia-artikkeli *Penrose tiling* osoitteessa https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling#/media
- [4] Rissanen, Markus (2018): *Basic Forms and Nature, From Visual Simplicity to Conceptual Complexity*, väitöskirja, s. 245. Saatavissa osoitteesta <https://taju.uniarts.fi/handle/10024/6275>
- [5] Gardner, Martin (1977): *Mathematical Games. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*. Scientific American, Vol. 236, No. 1, pp. 110–121. Saatavissa osoitteesta <https://web.ma.utexas.edu/users/radin/gardner.pdf>
- [6] Math & the Art of MC Escher (2012): *Aperiodic Tessellations*. Saatavissa osoitteesta https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Aperiodic_Tessellations
- [7] Lindner, John F. (2017): *ein Stein*. Saatavissa osoitteesta <https://woosterphysicists.scotblogs.wooster.edu/2017/11/01/einstein/>
- [8] Klaasen, Bernhard (2019): *Forcing Nonperiodic Tilings with One Tile Using a Seed*. Institute SCAI, Sankt Augustin, Germany. Saatavissa osoitteesta <https://www.arxiv-vanity.com/papers/2109.09384/>
- [9] Socolar, Joshua ja Taylor, Joan (2011): *An aperiodic hexagonal tile*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 118, pp. 2207–2231, saatavissa osoitteesta <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316511000859>
- [10] Gradić, Pierre ja Dongen, Vincent van (2022): *A self-ruling monotile for aperiodic tiling*, saatavissa osoitteesta <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2201/2201.03079.pdf>
- [11] Geogebra-materiaali *Pythagoraan laatoitus* osoitteessa <https://www.geogebra.org/m/fyfudqzs>



Solmun 3/2021 tehtävien ratkaisut

1. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 19, \\ \frac{x(x+y)}{y} = 60, \end{cases}$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Merkitään $a = x + y$ ja $b = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$, jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a + b = 19, \\ ab = 60. \end{cases}$$

Sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä $b = 19 - a$ yhtälöparin toiseen yhtälöön saadaan

$$a^2 - 19a + 60 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat $a = 4$ tai $a = 15$.

Tapaus $a = 4$: Tällöin $x + y = 4$ eli $y = 4 - x$, joten

$$\frac{x}{4 - x} = 15.$$

Tästä seuraa $60 - 15x = x$ eli $16x = 60$, joten $x = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$ ja näin ollen $y = 4 - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}$.

Tapaus $a = 15$: Tällöin $x + y = 15$ eli $y = 15 - x$, joten

$$\frac{x}{15 - x} = 4.$$

Tästä seuraa $60 - 4x = x$ eli $5x = 60$, joten $x = \frac{60}{5} = 12$ ja näin ollen $y = 15 - 12 = 3$.

Yhtälöparilla on siis kaksi ratkaisua $(\frac{15}{4}, \frac{1}{4})$ ja $(12, 3)$.

2. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on yhtä suuri kuin seuraavien kahden kokonaisluvun neliöiden summa. Mitkä nämä peräkkäiset viisi kokonaislukua ovat?

Ratkaisu. On selvitettävä yhtälön

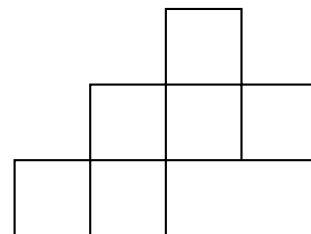
$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

ratkaisut, kun $x \in \mathbb{Z}$. Toiseen potenssiin korotukset tekemällä saadaan

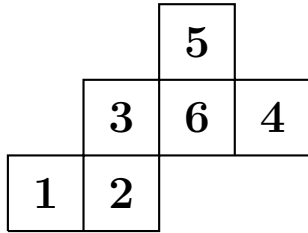
$$3x^2 - 6x + 5 = 2x^2 + 6x + 5,$$

siis $x^2 - 12x = x(x-12) = 0$, joten $x = 0$ tai $x = 12$. Näin ollen kysytyt viisi peräkkäistä kokonaislukua ovat $-2, -1, 0, 1, 2$ tai $10, 11, 12, 13, 14$.

3. Paperille on piirretty alla olevan kuvan mukainen neliöstä koostuva monikulmio. Kaksi neliötä väritetään punaisiksi ja loput neliöt erivärisiksi: yksi neliö vihreäksi, yksi keltaiseksi, yksi siniseksi ja yksi oranssiksi. Monikulmio leikataan irti paperista ja neliöiden yhtymäkohdissa 90° taitoksia tekemällä muodostetaan kuutio. Kuinka monella eri tavalla neliöiden värittäminen on mahdollista tehdä niin, että muodostetussa kuutiossa mitkään vierekkäiset sivut eivät ole samanvärisiä?



Ratkaisu. Numeroidaan neliöt seuraavasti:



Taittelun jälkeen kaikki muut numerot paitsi 6 ovat numeron 1 naapureita, kaikki muut numerot paitsi 5 ovat numeron 2 naapureita ja kaikki muut numerot paitsi 4 ovat numeron 3 naapureita. Näin ollen vain sivut 1 ja 6, sivut 2 ja 5 tai sivut 3 ja 4 voidaan maalata punaisiksi. Kun mikä tahansa edellä mainituista kolmesta sivuparista maalataan punaisiksi, niin jäljelle jäävät sivut voidaan maalata vihreäksi, keltaiseksi, siniseksi ja oranssiksi $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ eri tavalla. Näin ollen erilaisia tapoja maalata kuvio vaaditulla tavalla on $3 \cdot 24 = 72$.

Huomaa, että koska värittäminen tehdään paperille piirrettyyn monikulmioon ennen leikkaamista ja taittelua, niin kuutiota kiertämällä saadut samanlaiset väritykset ovat erilaisia monikulmion värityksiä.

4. Kaksi henkilöä yritti arvioida ulkoilmakonsertin yleisömäärän. Toinen arvioi, että yleisöä oli 2700, ja toinen puolestaan arvioi, että yleisöä oli 3600. Osoittautui, että toisen arvion prosentuaalinen virhe oli kaksi kertaa niin suuri kuin toisen virhe. Lisäksi toinen aliarvioi ja toinen yliarvioi yleisön määrän. Kuinka paljon konsertissa oli yleisöä?

Ratkaisu. Merkitään pienempää virhettä p %. Tällöin on kaksi mahdollisuutta.

Tapaus 1: $\frac{2700}{1 - \frac{p}{100}} = \frac{3600}{1 + \frac{2p}{100}}$. Yhtälön ratkaisu on $p = 10$, joten konsertissa oli yleisöä 3000.

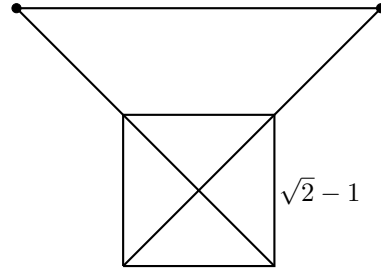
Tapaus 2: $\frac{2700}{1 - \frac{2p}{100}} = \frac{3600}{1 + \frac{p}{100}}$. Yhtälön ratkaisu on $p = \frac{100}{11}$, joten konsertissa oli yleisöä 3300.

Näin ollen konsertissa oli yleisöä joko 3000 tai 3300.

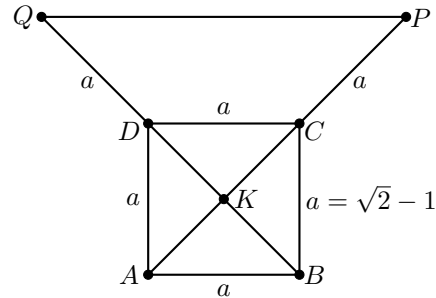
5. Neliön sivun pituus on $\sqrt{2} - 1$. Molempia neliön lävistäjiä jatketaan toisesta päästä neliön sivun pituuden verran, ks. kuva alla.

(a) Kuinka pitkä on jana, joka yhdistää jatkeiden päätepisteet?

(b) Osoita, että neliössä on kärki, joka yhdessä jatkeiden päätepisteiden kanssa muodostaa tasakylkisen kolmion.



Ratkaisu. Käytetään alla olevaan kuvaan lisättyjä merkintöjä.



(a) Koska $AC = \sqrt{2}a$, niin

$$KP = \frac{\sqrt{2}a}{2} + a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)a.$$

Koska QKP on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, niin

$$\begin{aligned} QP &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)a = (\sqrt{2} + 1)a \\ &= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

(b) Koska

$AP = \sqrt{2}a + a = (\sqrt{2} + 1)a = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$, niin $AP = QP$. Näin ollen AQP on tasakylkinen kolmio. (Symmetrian vuoksi myös BPQ on tasakylkinen kolmio.)

6. Kuuden peräkkäisen kokonaisluvun summa kerrotaan kuuden seuraavan kokonaisluvun summalla. Osoita, että tällä tavalla saadun tulon jakojäännös luvulla 36 jaettaessa on aina sama.

Ratkaisu. Olkoon ensimmäinen kokonaisluku a . Tällöin tulon ensimmäinen tekijä on

$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) = 6a + 15$ ja toinen tekijä on

$$\begin{aligned} &(a + 6) + (a + 7) + (a + 8) + (a + 9) + (a + 10) \\ &+ (a + 11) = 6a + 51. \end{aligned}$$

Näiden tulo on

$$\begin{aligned} (6a + 15)(6a + 51) &= 36a^2 + 396a + 765 \\ &= 36(a^2 + 11a + 21) + 9, \end{aligned}$$

jonka jakojäännös luvulla 36 jaettaessa on aina 9.

7. Määritä luvun $11! + 13!$ suurin alkutekijä. (Positiivisen kokonaisluvun n kertoma $n!$ on kokonaislukujen $1, \dots, n$ tulo; esimerkiksi $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

Ratkaisu. Koska

$$11! + 13! = (1 + 13 \cdot 12)11! = 157 \cdot 11!,$$

niin suurin alkutekijä on 157, joka on alkuluku.

8. Kaupan kassassa on 5, 10, 20, 50, 100 ja 200 euron seteleitä yhteensä 18200 euroa. Ennen kuin viimeisin seteli lisättiin kassaan, niin jokaisen setelityypin lukumäärä oli kääntäen verrannollinen setelin arvoon. Kuinka monta 200 euron seteliä kassassa on?

Ratkaisu. Tehdään taulukko seteleiden lukumääristä ennen viimeisen setelin lisäämistä kassaan:

Seteli (€)	5	10	20	50	100	200
Lukumäärä	$40x$	$20x$	$10x$	$4x$	$2x$	x

Näiden seteleiden arvo on

$$5 \cdot 40x + 10 \cdot 20x + 20 \cdot 10x + 50 \cdot 4x + 100 \cdot 2x + 200 \cdot x = 1200x.$$

Tiedämme, että

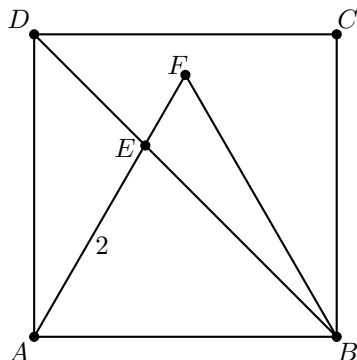
$$1200x + y = 18200,$$

missä $x \in \mathbb{N}$ ja $y \in \{5, 10, 20, 50, 100, 200\}$. Koska sekä 1200 että 18200 ovat jaollisia luvulla 200, niin on oltava $y = 200$. Näin ollen

$$1200x + 200 = 18200 \iff x = 15,$$

joten 200 euron seteleitä on kassassa 16.

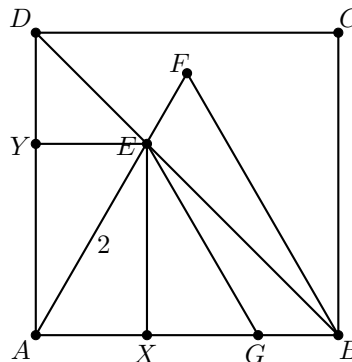
9. Tasasivuinen kolmio ABF on neliön $ABCD$ sisällä alla olevan kuvan mukaisesti. Janan AE pituus on 2. Mikä on neliön $ABCD$ pinta-ala?



Ratkaisu. Piirretään kuvaan suorakulmio, jonka lävistäjä on AE ja sivut ovat neliön $ABCD$ sivujen suuntaisia. Merkitään suorakulmion neliön sivuilla olevia kärkiä X ja Y , katso alla oleva kuva. Koska EXB on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, niin $EX = XB$. Toisaalta, koska AEX on puolet tasasivuisesta kolmiosta

AEF (katso kuva), niin $AE = 2$, $AX = 1$ ja $XE = \sqrt{3}$. Näin ollen $AB = AX + XB = 1 + \sqrt{3}$, joten neliön $ABCD$ pinta-ala on

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,46.$$



10. Aino, Pekka ja Liisa pelaavat seuraavanlaista peliä. He valitsevat vuorotellen jonkin kokonaisluvun yhdestä kymmeneen ja lisäävät luvun aikaisemmin valittujen lukujen summaan. Aino aloittaa, Pekka on toinen ja Liisa on kolmas, jonka jälkeen vuoro siirtyy takaisin Ainolle jne. Selvyiden vuoksi jokainen pelaaja sanoo vuorollaan lukujen uuden summan. Pelin voittaa pelaaja, joka sanoo ensin luvun sata. Osoita, että tytöt voivat keskenään sopia pelistrategian, jolla pelin voittaa varmasti jompikumpi heistä, eikä Pekka voi voittaa peliä.

Ratkaisu. Tytöt pelaavat seuraavalla strategialla: Aino lisää aina luvun 1 summaan, jonka Liisa on sanonut. Kun Pekka on lisännyt luvun i summaan, jonka Aino on sanonut, niin Liisa lisää luvun $11-i$ summaan, jonka Pekka sanoo. Tällöin riippumatta siitä, minkä summan Pekka sanoo, kumpikin tyttö sanoo aina summan, joka on 12 suurempi kuin edellisellä kierroksella. Näin ollen, koska $100 = 8 \cdot 12 + 4$, niin jos Anna aloittaa luvulla 4, niin hän voittaa pelin, ja jos hän aloittaa luvulla 5, niin Liisa voittaa pelin.

11. Heitetään kuusi noppaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan vähintään neljä samaa silmälukua?

Ratkaisu. Täsmälleen 4 samaa lukua voidaan heittää

$$6 \cdot \binom{6}{4} \cdot 1^4 \cdot 5^2 = 2250$$

eri tavalla. Vastaavasti täsmälleen 5 samaa lukua voidaan heittää

$$6 \cdot \binom{6}{5} \cdot 1^5 \cdot 5^1 = 180$$

eri tavalla ja täsmälleen 6 samaa lukua voidaan heittää

$$6 \cdot \binom{6}{6} \cdot 1^6 \cdot 5^0 = 6$$

eri tavalla. Koska nämä eivät voi sattua yhtä aikaa ja kaikkien mahdollisten tapausten lukumäärä on $6^6 = 46656$, niin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{2250 + 180 + 6}{46656} = \frac{2436}{46656} = \frac{203}{3888} \approx 0,0522.$$

12. Positiiviselle reaaliluvulle x on voimassa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Määritä $x^5 + \frac{1}{x^5}$ laskematta luvun x arvoa.

Ratkaisu. Käytetään summan $x + \frac{1}{x}$ potensseja. Koska

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9$$

ja x on positiivinen, niin $x + \frac{1}{x} = 3$. Nyt

$$\begin{aligned} 3^3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3, \end{aligned}$$

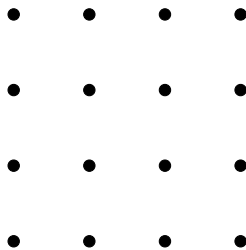
joten $x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$. Näin ollen

$$\begin{aligned} 3^5 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5} \\ &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 5 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 10 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= x^5 + \frac{1}{x^5} + 5 \cdot 18 + 10 \cdot 3. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 243 - 90 - 30 = 123.$$

13. Alla olevassa kuvassa on 16 pistettä. Kuinka monella tavalla on mahdollista valita kolme pistettä niin, että muodostuu kolmio, jonka kärjet ovat valituissa pisteissä?



Ratkaisu. Kolmen pisteen valinta 16 pisteestä voidaan tehdä

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

eri tavalla. Näistä kolmion kärjiksi eivät kelpaa sellaiset valinnat, joissa kaikki kolme pistettä sijaitsevat samalla rivillä. Tällainen rivi voi olla vaakarivi, pystyrivi tai rivi, joka on 90° vinossa (diagonaalinen). Vaakarivillä

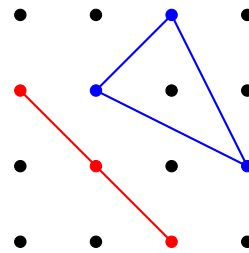
kelpaamattomat pisteet voidaan valita neljällä eri tavalla, ja koska vaakarivejä on neljä, niin vaakariveiltä kelpaamattomat pisteet voidaan valita $4 \cdot 4 = 16$ eri tavalla. Vastaavasti pystyriveiltä kelpaamattomat pisteet voidaan valita myös 16 eri tavalla.

Vasemmalta oikealle alaspäin vinoilta riveiltä kelpaamattomat pisteet voidaan valita $1 + 4 + 1 = 6$ eri tavalla, koska vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevasta 4 pisteen rivistä valinta voidaan tehdä 4 eri tavalla ja tämän rivin ylä- ja alapuolella olevista vinoista 3 pisteen riveistä valinta voidaan tehdä yhdellä tavalla kummastakin. Vastaavasti vasemmalta oikealle ylöspäin vinoilta riveiltä kelpaamattomat pisteet voidaan valita myös 6 eri tavalla.

Näin ollen kelpaamattomia pistevalintoja on yhteensä

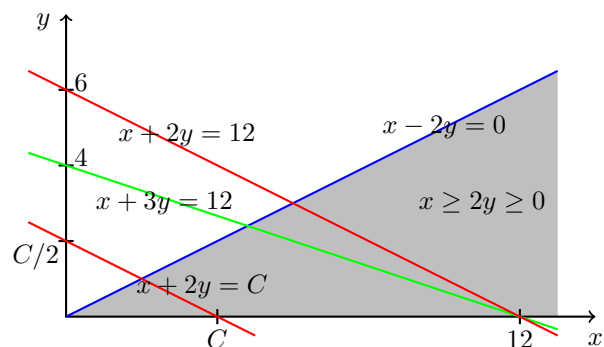
$$16 + 16 + 6 + 6 = 44,$$

joten kelpaavia pistevalintoja on $560 - 44 = 516$. Alla olevaan kuvaan on piirretty yksi kelpaava kolmen pisteen valinta (näkyvä värillisessä kuvassa sinisenä) ja yksi kelpaamaton valinta (näkyvä värillisessä kuvassa punaisena).



14. Reaaliluvut x ja y toteuttavat ehdot $x + 3y = 12$ ja $x \geq 2y \geq 0$. Mitä arvoja $x + 2y$ voi saada?

Ratkaisu. Koska $x \geq 2y \geq 0$, niin $y \geq 0$ ja $y \leq \frac{1}{2}x$. Piirretään tilanteesta kuva (x, y) -koordinaatistoon ja selvitetään pisteet (x, y) , jotka ehtojen perusteella kelpaavat mahdollisten arvojen $C = x + 2y$ laskemiseen.



Pisteet (x, y) , jotka ovat suoralla $x + 3y = 12$ ja ovat kuvassa harmaalla merkityllä alueella, kelpaavat. Vakion C mahdolliset arvot voidaan määrittää piirtämällä suoria, joiden kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$ ja jotka leikkaavat suoran $x + 3y = 12$ harmaalla alueella. Tämän perusteella

C :n arvojen ala- ja yläraja saadaan kahden yhtälöparin ratkaisusta:

$$\begin{cases} x + 3y = 12, \\ x = 2y, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + 3y = 12, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisen yhtälöparin ratkaisu on $(\frac{24}{5}, \frac{12}{5})$ ja toisen $(12, 0)$. Näin ollen C :n arvojen alaraja on $\frac{24}{5} + 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{48}{5} = 9,6$ ja yläraja on $12 + 2 \cdot 0 = 12$, joten $9,6 \leq x + 2y \leq 12$.

15. Millä parametrin a arvoilla toisen asteen yhtälöllä

$$ax^2 + a^2x + a = \frac{1}{a}$$

on kaksoisjuuri?

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö muodossa

$$ax^2 + a^2x + a - \frac{1}{a} = 0.$$

Yhtälöllä on kaksoisjuuri, jos sen diskriminantti on 0:

$$0 = a^4 - 4a \left(a - \frac{1}{a} \right) = a^4 - 4a^2 + 4 = (a^2 - 2)^2.$$

Näin ollen on oltava $a^2 = 2$ eli $a = \pm\sqrt{2}$.

16. Yksin tehdessään Pekalta kuluu työtehtävässä viisi tuntia ja Paavolta kuluu samassa työtehtävässä kuusi tuntia. Kun he tekevät työtehtävän yhdessä, niin heidän tuottavuutensa heikkenee jatkuvan kinastelun takia. Molempien työteho vähenee suhteessa yhtä paljon samalla prosenttimäärällä. Kuinka monta prosenttia heidän työtehonsa vähenee, kun yhdessä heillä kuluu työtehtävässä 3,5 tuntia?

Ratkaisu. Yksin tehdessään Pekka tekee viidesosan työtehtävästä tunnissa ja Paavo tekee vastaavasti kuudesosan. Jos he eivät vaikuttaisi toistensa työntekoon, niin he tekisivät yhdessä $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$ työtehtävästä tunnissa, joka merkitsisi samaa kuin $\frac{77}{60}$ työtehtävästä 3,5 tunnissa. Mutta koska he tekevät $\frac{60}{77}$ työtehtävästä 3,5 tunnissa, niin heidän työtehonsa on $\frac{60}{77}$ alkuperäisestä tehosta. Näin ollen heidän työtehonsa yhdessä työskennellessään vähenee

$$100\% - \frac{60}{77} \cdot 100\% = 22,1\%.$$

17. Tiinalla on uusi työpaikka ja hän kulkee töihin omalla autolla. Ensimmäisenä työpäivänä hän ajoi 70 km/h keskinopeudella ja saapui töihin minuutin myöhässä. Toisena työpäivänä hän lähti liikkeelle samaan aikaan, ajoi 75 km/h keskinopeudella ja saapui töihin minuutin etuajassa. Kuinka pitkä työmatka Tiinalla on?

Ratkaisu. Ensimmäisenä päivänä Tiinan työmatka kesti x tuntia. Toisena päivänä aikaa kului $\frac{2}{60}$ tuntia vähemmän kuin ensimmäisenä päivänä. Koska kuljettu matka oli molempina päivinä sama, niin

$$70x = 75 \left(x - \frac{2}{60} \right) \iff x = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Näin ollen Tiinan työmatka on

$$70 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 35 \text{ km}.$$

18. Joulukuun on aikaa viisi päivää ja joulukuusessa on jäljellä viisi karkkia: kaksi niistä on marmeladia ja kolme on suklaata. Karkkeja ei voi tunnistaa käärepaperin perusteella. Hanna päättää syödä yhden karkin päivässä joulukuun asti. Kumpi seuraavista on todennäköisempää: Hanna syö toisen (ja viimeisen) marmeladikarkin kolmantena päivänä vai hän syö kolmannen (ja viimeisen) suklaakarkin neljäntenä päivänä?

Ratkaisu. Jos Hanna syö toisen marmeladikarkin kolmantena päivänä, niin hänen pitää syödä ensimmäinen marmeladikarkki joko ensimmäisenä tai toisena päivänä. Vaihtoehtoja on siis kaksi. Jos Hanna syö kolmannen suklaakarkin neljäntenä päivänä, niin hänen on syötävä ensimmäiset kaksi suklaakarkkia kolmen ensimmäisen päivän aikana. Tämä merkitsee sitä, että kolmen ensimmäisen päivän aikana on yksi päivä, jolloin Hanna syö marmeladikarkin. Vaihtoehtoja on siis kolme. Näin ollen on todennäköisempää, että Hanna syö kolmannen suklaakarkin neljäntenä päivänä.

19. Heitetään kolikkoa neljä kertaa. Tämän jälkeen heitetään kolikkoa vielä niin monta kertaa kuin saatiin kruunua neljässä ensimmäisessä heitossa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan vähintään viisi kruunaa?

Ratkaisu. On mahdollista saada vähintään viisi kruunaa vain, jos ensimmäisellä neljän heiton kierroksella saadaan kolme tai neljä kruunaa.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa neljällä ensimmäisellä kierroksella saadaan kolme kruunaa. Yhteen vaihtoehtoja on $2^4 = 16$, joista kolme kruunaa saadaan $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla. Tämän jälkeen heitetään kolikkoa kolme kertaa ja pitää saada vähintään kaksi kruunaa. Toisella kolmen heiton kierroksella vaihtoehtoja on yhteensä $2^3 = 8$, joista vähintään kaksi kruunaa saadaan $\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 4$ eri tavalla.

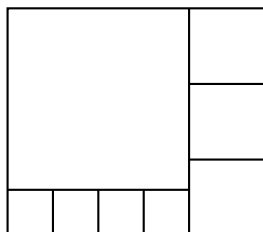
Tarkastellaan sitten tapausta, jossa neljällä ensimmäisellä kierroksella saadaan neljä kruunaa. Neljä kruunaa saadaan vain yhdellä tavalla yhteensä $2^4 = 16$ vaihtoehtosta. Tämän jälkeen heitetään kolikkoa neljä kertaa ja pitää saada vähintään yksi kruunaa. Tämä ei toteudu ainoastaan silloin, kun saadaan neljä klaavaa, joka on mahdollista vain yhdellä tavalla 16 vaihtoehtosta. Näin ollen toisella neljän heiton kierroksella vähintään yksi kruuna saadaan $16 - 1 = 15$ eri tavalla.

Saadaan siis, että todennäköisyys saada vähintään viisi kruunaa on

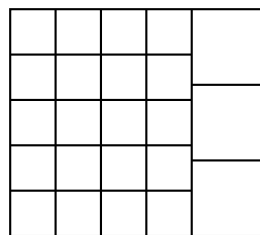
$$\frac{4}{16} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} = \frac{47}{256} \approx 0,18.$$

20. Suorakulmio jaetaan kahdeksaksi neliöksi alla olevassa kuvassa esitetyllä tavalla. Keskikokoisen neliön

pinta-ala on 100 cm^2 . Mikä on alkuperäisen suorakulmion pinta-ala?



Ratkaisu. Keskikokoisten neliöiden sivun pituus on 10 cm. Suurin neliö voidaan jakaa 16 neliöön seuraavasti:



Tästä nähdään, että pienten neliöiden sivun pituus on

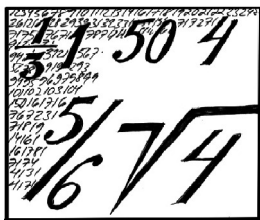
$$\frac{3 \cdot 10 \text{ cm}}{5} = 6 \text{ cm},$$

joten alkuperäisen suorakulmion pinta-ala on

$$20 \cdot 6^2 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 1020 \text{ cm}^2.$$

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitukset suomeksi: Mika Koskenoja



Tarinoita polynomeista (osa 1)

Jukka Tuomela

Itä-Suomen yliopisto, Joensuu

jukka.tuomela@uef.fi

Lähtökohtia

Polynomeja esiintyy kaikkialla matematiikassa, joten polynomeihin liittyviä kysymyksiä voi tulla esille osatehtävinä hyvin monissa eri yhteyksissä. Ei siis ole ihme, että lukiossa käsitellään polynomeja, ja matematiikkakilpailuissakin usein on polynomeihin liittyviä tehtäviä. Nämä tehtävät ovat kuitenkin usein jotenkin kummallisia, ja niihin liittyvät mallivastauksetkin ovat joskus hiukan erikoisia. Ei kuitenkaan ole ihan yksinkertaista selittää, missä mielessä minusta tehtävät ovat joskus hassuja, ja mikä sitten olisi ”luonnollisempi” tapa tarkastella polynomitehtäviä.

Tämä kirjoitus lähtikin liikkeelle yrityksestä selventää tätä asiaa, mutta huomasin, että asiaa tulikin helposti aika paljon, joten oli sitten parasta jakaa tämä kirjoitus osiin. Katsotaan sitten montako osaa tarvitaan.

Ehkäpä lyhyesti voisi sanoa, että polynomitehtävät usein perustuvat johonkin näppärään kikkaan, joka toimii, kun tehtävän polynomi on huolellisesti valittu. Toisaalta monesti tehtävän voisi ratkaista algoritmisesti aivan yleisessäkin tapauksessa. Mutta asia varmaan selkenee, kun katsotaan tarkemmin joitain esimerkkejä. Käytän seuraavassa esimerkkinä tehtäviä, jotka ovat joko ylioppilaskirjoituksista¹ tai matematiikkakilpailusivuilta².

Tässä kirjoituksessa ei oleteta mitään erityisiä lukion ulkopuolen esitietoja. Jotkut termit ja merkinnät voivat olla uusia, mutta tämän ei pitäisi olla ongelmallista. Esitiedoiksi riittää, että tietää, mikä on polynomi ja miten polynomeja lasketaan yhteen ja kerrotaan. Jos sitten haluaa syvällisemmin perehtyä polynomeihin voi aloittaa erinomaisesta kirjasta [2].

Perusasiat

Lähdetään liikkeelle yhden muuttujan polynomeista, jotka ovat muotoa

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j. \quad (1)$$

Jos $a_n \neq 0$, niin sanotaan, että polynomin aste on n ja merkitään $\deg(f) = n$. Tällöin sanotaan, että $\text{LT}(f) = a_nx^n$ on f :n isoin termi (leading term).

Usein tehtävissä esiintyvissä polynomeissa kertoimet a_j ovat rationaalilukuja, mutta ne voisivat myös olla reaali- tai kompleksilukuja.

Olkoon nyt $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko; jos on annettu polynomi (1), missä $a_j \in \mathbb{Q}$, niin merkitään $f \in \mathbb{Q}[x]$. Hyvin usein tehtävissä esiintyy kuitenkin ”parametreja”; tavallaan ne ovat muuttujia, kuten ”varsinainen”

¹<https://matta.hut.fi/matta/yoteht/>

²<https://matematiikkakilpailut.fi/>

muuttuja x , mutta kuitenkin tehtävän kannalta jotenkin eri asemassa.

Esimerkki 1. Keväällä 2014 ylioppilaskirjoituksissa kysyttiin, millä parametrin arvolla a polynomilla

$$f = ax^2 - 5x + 2$$

on kaksinkertainen nollakohta. Tehtävä ratkeaa helposti, kun kirjoitetaan

$$f = ax^2 - 5x + 2 = a(x - b)^2 = ax^2 - 2abx + ab^2.$$

Vertaamalla kertoimia nähdään, että $a = 25/8$ ja $b = 4/5$. ☆

Kun kertoimissa on parametreja, on usein kätevää ajatella, että kertoimet ovat parametrien rationaalifunktioita:

h on a :n rationaalifunktio, $h \in \mathbb{Q}(a)$, jos $h = f/g$, missä $f, g \in \mathbb{Q}[a]$.

Ennen kuin päästään asiaan, otetaan vielä pari termiä. Joukko $\mathbb{Q}[x]$ on *renkas*, mikä tarkoittaa, että voidaan laskea yhteen ja kertoa, mutta käänteisalkiota ei ole: jos f on polynomi, niin $1/f$ ei ole polynomi (paitsi jos f on vakio). Sen sijaan $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Q}(a)$ ovat *kuntia*; näissä myös käänteisalkio on olemassa, joten jos h on rationaalifunktio, niin myös $1/h$ on rationaalifunktio. Nyt voidaan kirjoittaa

$$f = ax^2 - 5x + 2 \in \mathbb{Q}(a)[x].$$

Samoin voidaan merkitä monen muuttujan tapauksessa, esimerkiksi

$$f = \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{a^3b^2}{a-b^4}y^3 - \frac{1}{a+b}xy + \frac{2ab}{a^2+2b^2} \in \mathbb{Q}(a,b)[x,y].$$

Tässä ajatellaan, että f on polynomi muuttujien x ja y suhteen, ja kertoimet ovat parametrien a ja b rationaalifunktioita.

Jos sitten $\mathbb{R}$ on reaaliluvut, niin periaatteessa voitaisiin tarkastella reaalikertoimisia polynomeja: $f \in \mathbb{R}[x]$. Tässä kirjoituksessa ei kuitenkaan tehdä näin. Syy on se, että tarkoituksena on ottaa algoritmisen näkökulma; katsotaan mitä oikeasti voidaan käsin laskea, tai mitä tietokoneelle voi ohjelmoida. Reaaliluvuilla ei voi laskea, sillä niille ei ole äärellistä esitysmuotoa. Muistetaan, että tietokoneet käyttävät liukulukuja (floating point numbers), kun ne approksimoivat reaalilukuja. Toisaalta jos jossain laskussa esiintyy vaikkapa luku π , niin sehän on laskun kannalta kuten mikä tahansa parametri, joten voitaisiin kirjoittaa

$$f = x^3 + 2\pi x + 3\pi^3 \in \mathbb{Q}(\pi)[x].$$

Jatkossa polynomin kertoimet ovat pääasiassa joko rationaalilukuja tai rationaalifunktioita.

Algebran peruslause

Olkon f kuten yhtälössä (1) ja oletetaan nyt, että $a_j \in \mathbb{Q}$ ja $a_n \neq 0$. Algebran peruslauseen mukaan f voidaan kirjoittaa muodossa

$$f = a_n(x - b_1)^{\ell_1} \cdots (x - b_k)^{\ell_k}, \quad (2)$$

missä $b_i \neq b_j$, kun $i \neq j$, ja $\ell_1 + \cdots + \ell_k = n$. Luovut b_j , jotka ovat f :n nollakohdat, ovat yleisesti ottaen kompleksilukuja. Jos siis tiedetään nollakohdat b_j ja niitten kertaluvut ℓ_j , niin polynomi voidaan aina jakaa lineaarisiin tekijöihin. Termi lineaarinen viittaa siihen, että $x - b_j$ on ensimmäisen asteen polynomi. Sanotaan vielä, että nollakohta on yksinkertainen, jos sen kertaluku on yksi.

Usein on kuitenkin mukavampi kirjoittaa

$$f = a_n(x - b_1) \cdots (x - b_n), \quad (3)$$

missä kaikki nollakohdat eivät välttämättä ole erisuuria, vaan niitä toistetaan kertaluvun ilmoittama määrä. Huomaa, että yleisesti ottaen nollakohdat ovat yksinkertaisia, jos polynomin kertoimet valitaan ”satunnaisesti”.

Kertomalla auki nähdään, että

$$\begin{aligned} b_1 \cdots b_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \\ b_1 + \cdots + b_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \end{aligned} \quad (4)$$

mikä on joskus hyödyllistä.

Jos ei haluta kompleksilukuja, niin voidaan jakaa reaaliin tekijöihin. Muistetaan, että jos polynomin kertoimet ovat reaalisia, niin kompleksiset nollakohdat esiintyvät liittolukupareina. Jos b on kompleksinen nollakohta, niin

$$(x - b)(x - \bar{b}) = x^2 - 2\Re b x + |b|^2.$$

Saadaan siis toisen asteen tekijä $x^2 + cx + d$, missä $c^2 - 4d < 0$. Tämä johtaa ”reaaliseen algebran peruslauseeseen”. Tällöin polynomi (1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$f = a_n(x - b_1) \cdots (x - b_\ell)(x^2 + c_1x + d_1) \cdots (x^2 + c_kx + d_k),$$

missä b_j, c_j ja d_j ovat reaalisia, $\ell + 2k = n$ ja $c_j^2 - 4d_j < 0$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\ &= (x + 1 + i)(x + 1 - i)(x - 1 + i)(x - 1 - i). \end{aligned}$$

Reaalinen perusmuoto voi joskus olla kätevämpi. Hyvin usein tehtävissä tarkastellaan vain reaalista tapausta, jolloin kompleksiset nollakohdat tyypillisesti ovat epäoleellisia ratkaisun kannalta.

Koska $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, niin sanotaan, että $\mathbb{R}$ on kunnan $\mathbb{Q}$ kuntalaajennus, ja samoin $\mathbb{C}$ on sekä $\mathbb{Q}$:n että $\mathbb{R}$:n kuntalaajennus. Ideana on, että koska yleensä polynomeilla $f \in \mathbb{Q}[x]$ ei ole nollakohtia $\mathbb{Q}$:ssa, niin yritetään löytää ne nollakohdat jostain isommasta joukosta. Algebran peruslause siis sanoo, että $\mathbb{C}$ on ”riittävän” iso: aina löytyy tarpeeksi nollakohtia.

Jossain mielessä tämä intuitiivisesti selittää, miksi reaali- ja kompleksiluvuilla ei voi olla äärellistä esitysmuotoa: joukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ täytyy olla valtavan isoja, jotta siellä olisi nollakohdat kaikille polynomeille, jopa reaali- ja kompleksikertoimisille, joten tällaisia joukkoja ei voi algoritmisesti käsitellä.

Tunnetusti ei ole mitään algoritmia, millä nollakohdat b_j voitaisiin tarkasti laskea. Palataan myöhemmin tarkemmin siihen, mitä johtopäätöksiä tästä pitäisi vetää.

Lukiot tehtävissä ja kilpailutehtävissä esiintyvät polynomit eivät kuitenkaan missään mielessä ole ”satunnaisia”, vaan päinvastoin ne on varta vasten valittu siten, että niillä on joitain erityisominaisuuksia. Esimerkiksi näissä tehtävissä polynomeilla on usein nollakohtana 0, ± 1 tai ± 2 . Oletetaan siis, että tehtävän ratkaisija löytää tämän kokeilemalla, ja pääsee sitten tämän avulla tehtävässä eteenpäin.

Esimerkki 2. Syksyn 2016 ylioppilaskirjoituksissa oli kaksikin tämäntyyppistä tehtävää. Toisessa tarvittiin tekijöihin jakoa

$$x^3 + 6x^2 - 7x = x(x-1)(x+7)$$

ja toisessa puolestaan

$$x^7 - 60x - 8 = (x-2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4). \quad \star$$

Esimerkki 3. Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa vuonna 2003 tehtävä ratkesi, kun huomasi, että

$$\begin{aligned} f &= x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} \\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Tehtävässä piti osoittaa, että $f \geq 0$ kaikilla x . $\star$

Esimerkki 4. Baltian tie -matematiikkakilpailuissa vuonna 1993 tehtävän ratkaisu edellytti, että jaetaan polynomi

$$f = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$$

tekijöihin. Tässä $x^4 = \pm 1$ ovat nollakohtia, minkä jälkeen helposti löydetään

$$f = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^4+1).$$

Tässä piti osoittaa, että jos x on pariton, niin $f/512$ on kokonaisluku. $\star$

Näitten esimerkkien perusteella voidaan päätellä, että jos ylioppilaskirjoituksissa tai matematiikkakilpailuissa esiintyy polynomitehtäviä, on yllättävän suuri todennäköisyys, että tehtävä ratkeaa, kun kokeilee mitä tapahtuu, kun $x = \pm 1$ tai $x = \pm 2$.

Yritetään kuitenkin nyt katsoa systemaattisesti, mitä voidaan tehdä silloin kun arvaamalla ei päästä eteenpäin.

Jakolasku

Lähdetään liikkeelle jakolaskusta. Muistetaan ensin, että jos on annettu kokonaisluvut m ja k , niin on olemassa $0 \leq r < k$ ja q siten, että

$$m = qk + r.$$

Sanotaan, että q on osamäärä ja r on jakojäännös. Jos ei olla kiinnostuttu osamäärästä, on tapana merkitä

$$m = r \bmod k$$

Polynomeille voidaan määritellä samantapainen jakolasku:

Jos on annettu polynomit f ja g , niin on olemassa yksikäsitteiset polynomit q (osamäärä) ja r (jakojäännös) siten, että

$$f = qg + r$$

ja $\deg(r) < \deg(g)$.

Yksikäsitteisyyden osoittamisen jätän harjoitustehtäväksi. Seuraava algoritmi takaa olemassaolon. Olkoon annettu polynomit f ja g , ja $\text{LT}(f) = a_n x^n$ ja $\text{LT}(g) = c_m x^m$; tällöin merkintä $\text{LT}(g) \mid \text{LT}(f)$ (luetaan: $\text{LT}(g)$ jakaa $\text{LT}(f)$:n) tarkoittaa, että $n \geq m$, jolloin

$$\frac{\text{LT}(f)}{\text{LT}(g)} = \frac{a_n}{c_m} x^{n-m}$$

on hyvin määritelty termi. Seuraava algoritmi laskee osamäärän ja jakojäännöksen.

Algoritmi 1 OSAMÄÄRÄ JA JAKOJÄÄNNÖS

Input: polynomit f ja g , $g \neq 0$.

Output: polynomit q ja r siten, että $f = qg + r$ ja $\deg(r) < \deg(g)$

```

1: q:=0; r:=f;
2: while  $r \neq 0$  ja  $\text{LT}(g) \mid \text{LT}(r)$  do
3:    $q := q + \frac{\text{LT}(r)}{\text{LT}(g)}$ 
4:    $r := r - \frac{\text{LT}(r)}{\text{LT}(g)} g$ 
5: end while
```

Algoritmin rivillä 4 jakojäännöksen isoin termi kumoutuu, joten $\deg(r)$ pienenee joka askeleella. Tämän takia ennemmin tai myöhemmin joko $r = 0$ tai $\deg(r) <$

$\deg(g)$, jolloin algoritmi tulee ulos **while** silmukasta, mikä todistaa, että algoritmi päättyy. Algoritmi on itse asiassa käytännössä sama kuin kokonaislukujen jakaminen jakokulmassa.

Yksinkertainen jakolasku on yllättävän tehokas työkalu.

Esimerkki 5. Britannian matematiikkaolympialaisissa vuonna 2007 piti laskea

$$\frac{1 + 2007^4 + 2008^4}{1 + 2007^2 + 2008^2}.$$

Tietenkin tämän voi laskea suoraan, mutta osoittajaan tulee 14-numeroinen luku, joten tämä olisi hyvin työläästä käsin laskien. Olkoon $f = 1 + x^4 + (x + 1)^4$ ja $g = 1 + x^2 + (x + 1)^2$; jakolasku antaa

$$f = (x^2 + x + 1)g,$$

joten vastaus on $1 + 2007 + 2007^2 = 4030057$. ☆

Esimerkki 6. Baltian tie matematiikkakilpailussa vuonna 1992 oli seuraava tehtävä.

Oletetaan, että $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$.

Todista, että $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

Olkoon

$$\begin{aligned} f &= a^4 + b^4 + (a + b)^4 - c^4 - d^4 - (c + d)^4, \\ g &= a^2 + b^2 + (a + b)^2 - c^2 - d^2 - (c + d)^2. \end{aligned}$$

Tehtävä voidaan nyt muotoilla seuraavasti.

Jos $g = 0$, niin $f = 0$.

Mutta nythän ratkaisu saadaan heti: väite voi olla totta täsmälleen silloin kun g on f :n tekijä. Toisin sanoen kun f jaetaan g :llä, niin jakojäännöksen pitäisi olla nolla.

Nyt tietysti olisi luontevaa ajatella, että $f, g \in \mathbb{Q}[a, b, c, d]$, koska kaikki muuttujat ovat tavallaan samantarvoisessa asemassa. Mutta jakolaskualgoritmin kannalta voidaan yhtä hyvin ajatella vaikkapa, että a on ”muuttuja”, ja muut ovat ”parametreja”, jolloin voidaan ajatella, että $f, g \in \mathbb{Q}(b, c, d)[a]$.

Nyt jakolaskualgoritmi antaa

$$f = qg = (a^2 + ab + b^2 + c^2 + cd + d^2)g,$$

mikä todistaa väitteen. Vaikeaksi tarkoitettu tehtävä ratkeaa siis algoritmisesti suoraan laskemalla. Huomaa, että tässä tehtävän ainoa vaikeus oli siinä, että piti nimetä polynomit f ja g . ☆

Yleisesti ottaen polynomitehtävissä ongelma on tapana muotoilla yhtälöittäin avulla, eikä oleellisia polynomeja suoraan mainita. Tehtävissä siis aina kannattaa nimetä

ne polynomit, joita tarkastellaan. Tuntuu ehkä hassulta, että asioitten nimeäminen ”oikein” ratkaisee tehtävän. Tämän voi mieltää niin, että kun polynomit on nimetty, niin automaattisesti tämä ohjaa ajattelua oikeaan suuntaan. Katsotaan vielä toinen esimerkki tällaisesta ilmiöstä.

Esimerkki 7. Matti Lehtisen tehtäväkokoelmassa *Kilpailumatematiikan lajeja ja periaatteita* oli seuraava tehtävä.

Oletetaan, että

$$\begin{aligned} abc &= 1, \\ a + b + c &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Osoita, että $a = 1$ tai $b = 1$ tai $c = 1$.

Huomaa, että väite

$$a = 1 \text{ tai } b = 1 \text{ tai } c = 1$$

on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$h = (a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0.$$

Olkoon $f_0 = abc - 1$ ja

$$f_1 = abc(a + b + c) - ab - ac - bc.$$

Tehtävä voidaan nyt muotoilla seuraavasti.

Oletetaan, että $f_0 = f_1 = 0$. Osoita, että $h = 0$.

Olkoon edelleen $\hat{f}_1 = a + b + c - ab - ac - bc$. Jos $f_0 = 0$, niin $\hat{f}_1 = f_1$. Tästä saadaan muotoilu:

Oletetaan, että $f_0 = \hat{f}_1 = 0$. Osoita, että $h = 0$.

Mutta nyt heti nähdään, että

$$h = f_0 + \hat{f}_1,$$

mikä todistaa väitteen. ☆

SYT

Jakolaskun avulla voidaan helposti laskea suurin yhteinen tekijä (gcd, greatest common divisor) polynomeille; algoritmi on tuttu Eukleideen algoritmi, jolla lasketaan kokonaislukujen suurin yhteinen tekijä. Jos on annettu polynomit f ja g , niin merkitään äskeisen algoritmin antamaa jakojäännöstä $r = \text{rem}(f, g)$. Lisäksi on kätevää ottaa käyttöön seuraava merkintä: jos $\text{LT}(f) = a_n x^n$, niin isoimman termin kerroin (leading coefficient) on $\text{LC}(f) = a_n$.

Algoritmi 2 SUURIN YHTEINEN TEKIJÄ**Input:** polynomit f ja $g \neq 0$ **Output:** $\text{syt}(f, g)$ $a := f; b := g;$ **while** $b \neq 0$ **do** $r := \text{rem}(a, b)$ $a := b$ $b := r$ **end while** $\text{syt}(f, g) := a/\text{LC}(a)$

Koska jakojäännöksen aste pienenee joka askeleella, niin algoritmi päättyy.

Suurimman yhteisen tekijän avulla nähdään, onko kahdella polynomilla yhteisiä nollakohtia; f :llä ja g :llä on yhteisiä nollakohtia, jos $\deg(\text{syt}(f, g)) > 0$. Tämän selvittäminen on täysin algoritmista, eikä se riipu siitä, osataanko nollakohtia laskea. Jos siis ”unohdetaan” algebran peruslause, niin joka tapauksessa on voimassa seuraava tulos.

Olkoon $f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Jos $\text{syt}(f, g) = 1$, niin tehtävällä $f = g = 0$ ei ole ratkaisuja.

Huomaa erityisesti, että tämä ei riipu siitä mistä $\mathbb{Q}$:n kuntalaajennuksesta ratkaisua etsitään.

Esimerkki 8. Kanadan matematiikkaolympialaisissa vuonna 1988 oli seuraava tehtävä.

Olkoon $f = 1988x^2 + bx + 8891$ ja $g = 8891x^2 + bx + 1988$; millä b :n arvoilla polynomeilla f ja g on yhteinen tekijä?

Tässäkin tehtävä ratkeaa heti, jos huomaa kokeilla, mitä tapahtuu, kun $x = \pm 1$. Tällöin nähdään heti, että $b = \pm 10879$ ja vastaava yhteinen tekijä on $x \pm 1$.

Jos edetään algoritmisesti, niin lasketaan ensin

$$r = \text{rem}(f, g) = \frac{6903}{8891}(bx + 10879)$$

ja sitten

$$r_0 = \text{rem}(g, r) = -\frac{8891}{b^2}(b^2 - 118352641).$$

Jos on yhteisiä tekijöitä, niin $r_0 = 0$, ja tästä saadaan arvaamalla löydetty ratkaisu. ☆

Esimerkki 9. Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa vuonna 2009 oli seuraava tehtävä.

Olkoon $f = x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90$; tiedetään, että f :llä on tekijä $g = x^2 + x + a$. Mikä on a ?

Tässä vaiheessa lukija varmaankin jo arvaa, että $a = \pm 1$ tai $a = \pm 2$.

Jos g on tekijä, niin jakojäännös on nolla. Lasketaan jakojäännös:

$$f = qg + r, \quad \text{missä}$$

$$r = h_1x + h_0 \quad \text{ja}$$

$$h_0 = -8a^8 + 84a^7 - 258a^6 + 365a^5 - 276a^4 + 114a^3 - 116a^2 + 93a - 90,$$

$$h_1 = a^8 - 36a^7 + 211a^6 - 483a^5 + 565a^4 - 370a^3 + 137a^2 - 209a + 94.$$

Tässä ensin ajatellaan, että f ja g ovat x :n polynomeja ja a on parametri, eli $f, g \in \mathbb{Q}(a)[x]$, ja sovelletaan jakolaskualgoritmit x :n suhteen. Nyt jakojäännös on $r = h_1x + h_0$, missä h_j ovat polynomeja a :n suhteen, ja jakojäännös on nolla, jos polynomeilla h_0 ja h_1 on yhteisiä nollakohtia. Nyt suoraan laskemalla $\text{syt}(h_0, h_1) = a - 2$, joten vastaus on $a = 2$. Laskut ovat helpompia, jos huomaa, että

$$\begin{aligned} f &= x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90 \\ &= (x^4 + 1)(x^{13} + x - 90). \end{aligned}$$

Selvästi g :n täytyy olla polynomin $\hat{f} = x^{13} + x - 90$ tekijä, ja jakolasku antaa nyt

$$\hat{f} = \hat{q}g + \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{h}_1x + \hat{h}_0$$

$$\hat{h}_0 = -6a^6 + 35a^5 - 56a^4 + 36a^3 - 10a^2 + a - 90$$

$$\hat{h}_1 = a^6 - 21a^5 + 70a^4 - 84a^3 + 45a^2 - 11a + 2.$$

Luonnollisesti edelleen $\text{syt}(\hat{h}_0, \hat{h}_1) = a - 2$. ☆

Neliövapaa polynomi

Palataan sitten kaavaan (2). Jos ollaan ensisijaisesti kiinnostuttu nollakohdista, ja kertaluvut eivät ole niinkään oleellisia, niin voisi olla mukavampi analysoida polynomia

$$f_{\text{red}} = (x - b_1) \cdots (x - b_k).$$

Sanotaan, että f_{red} on f :n reduktio, ja että f on *neliövapaa* (squarefree), jos $f = f_{\text{red}}$. Jos f ei ole neliövapaa, niin $\deg(f_{\text{red}}) < \deg(f)$, joten siirtyminen redusoituun polynomiin alentaa astetta, mikä puolestaan helpottaa tehtävän analyysiä. Mutta miten redusoitu polynomi voitaisiin laskea? Nollakohtiahan ei tunneta.

Jos b on f :n nollakohta, jonka kertaluku on ℓ , niin tällöin voidaan kirjoittaa

$$f = (x - b)^\ell h(x),$$

missä $h(b) \neq 0$. Mutta tällöin edelleen

$$f' = \ell(x - b)^{\ell-1}h + (x - b)^\ell h' = (x - b)^{\ell-1} \hat{h}.$$

Toisin sanoen $(x - b)^{\ell-1}$ on f :n ja f' :n tekijä, ja kun tämä tekijä poistetaan f :stä, saadaan

$$f_0 = (x - b)h.$$

Tässä päästiin eroon moninkertaisesta nollakohdasta, kun jaettiin f :n ja f' :n tekijällä. Mutta edellä on esitetty algoritmi suurimmalle yhteiselle tekijälle, eikä algoritmissa tarvitse tietää nollakohtia. Siispä

$$f_{\text{red}} = \frac{f}{\text{syt}(f, f')}.$$

Toisella tavalla ajateltuna tässä f jaetaan kahteen tekijään:

$$f = \text{syt}(f, f') f_{\text{red}}.$$

Usein (tai aina) tehtävä helpottuu, jos löydetään jokin tekijöihin jako, sillä tällöin voidaan tutkia alempiasteisia tekijöitä erikseen.

Esimerkin 4 tapauksessa saadaan $\text{syt}(f, f') = x^4 - 1$, joten

$$x^{12} - x^8 - x^4 + 1 = (x^4 - 1)(x^8 - 1).$$

Tästä on sitten helppo jatkaa tekijöihin jakoa.

Redusoituun polynomiin siirtyminen helpottaa tehtävää jo siinä, että polynomin asteluku pienenee, mutta on itse asiassa toinenkin tärkeä syy, miksi tämä reduktio kannattaa tehdä. Palataan tähän sitten myöhemmin.

wxMaxima, Sage ja Wolfram Alpha

Edellä esitellyt algoritmit on toteutettu varmaankin kaikissa symbolisen laskennan ohjelmistoissa. Esimerkiksi wxMaximassa on komento `divide`, joka laskee osamäärän ja jakojäännöksen, ja komento `gcd`, joka laskee suurimman yhteisen tekijän.

Tarkemmin wxMaxima³ on käyttöliittymä Maximaan⁴. Nämä ovat vapaita ohjelmistoja, ja itse asiassa wxMaximaa voi käyttää ylioppilaskirjoituksissa. Siis kaikki edellä mainitut esimerkkitehtävät olisivat ratkenneet

parissa minuutissa, jos ne olisivat olleet ylioppilaskirjoitustehtäviä. Esimerkissä 7 ei tosin tarvinnut jakolaskua, mutta se olisi helposti ratkennut myös toisella tavalla muuttujia eliminoimalla, ja tämäkin onnistuu wxMaximalla. Palataan muuttujien eliminointiin tarkemmin myöhemmin.

Myös Sage on ilmainen ohjelmisto, jolla voi laskea sekä symbolisesti että numeerisesti [1].⁵ Sagea on ehkä kätevintä käyttää Jupyterin avulla.⁶

Netissä on lisäksi vapaasti käytettävissä Wolfram Alpha, jonka avulla voi helposti laskea tässä kirjoituksessa olleet esimerkit.⁷ Tässä on taustalla Mathematica⁸, joka on maksullinen ohjelma. Toinen hyvä maksullinen ohjelma on Maple.⁹

Jatkuu ensi numerossa

Ensi kerralla katsotaan tarkemmin polynomien nollakohtien ratkaisemista. Erityisesti tarkastellaan kriittisesti ratkaisukaavoja ja juurilausekkeita ja päädytään siihen, että jos ne eivät ehkä ole täysin hyödyttömiä, niin ainakin niitten merkitystä on vahvasti liioiteltu. Jakolaskualgoritmi sen sijaan osoittautuu edelleen hyödylliseksi työkaluksi.

Viitteet

- [1] G. V. Bard, *Sage for undergraduates*, American Mathematical Society, 2015.
- [2] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

³<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

⁴<https://maxima.sourceforge.io/>

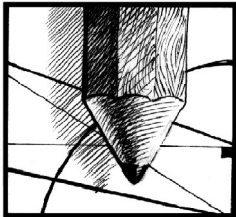
⁵<https://www.sagemath.org/index.html>

⁶<https://jupyter.org/>

⁷<https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/algebra/polynomials>

⁸<https://www.wolfram.com/mathematica/>

⁹<https://www.maplesoft.com/>



Matematiikkadiplomit vuoden 2022 alusta syyskuun puoliväliin

Marjatta Näätänen

Uusia vastauspyyntöjä Solmun matematiikkadiplomeihin tuli 298 kpl näiltä 93 paikkakunnalta:

Akaa, Alajärvi, Alavus, Asikkala, Bryssel, Espoo, Eurajoki, Harjavalta, Hattula, Helsinki, Hollola, Hyvinkää, Iisalmi, Ikaalinen, Ilmajoki, Joensuu, Jokioinen, Joroinen, Jyväskylä, Jämijärvi, Järvenpää, Kaarina, Kangasala, Karkkila, Kauhajoki, Kempele, Kerava, Kirkkonummi, Kokkola, Kontiolahti, Kotka, Kouvola, Kuhmoinen, Kuopio, Kuusamo, Kärkölä, Lahti, Laihia, Lapinlahti, Lappeenranta, Lapua, Laukaa, Liminka, Loimaa, Mikkeli, Muhos, Mustasaari, Muurame, Mäntsälä, Nokia, Nurmijärvi, Orimattila, Orivesi, Oulu, Oulunsalo, Parkano, Pirkkala, Pori, Pyhäjärvi, Pöytyä, Raahe, Raasepori, Raisio, Rauma, Rautalampi, Riihimäki, Rovaniemi, Ruokolahti, Salo, Sastamala, Sauvo, Savitaipale, Savonlinna, Seinäjoki, Siikajoki, Siilinjärvi, Sipoo, Somero, Tallinna, Tampere, Turku, Tuusula, Ulvila, Utajärvi, Utsjoki, Uusikaupunki, Vaasa, Valkeakoski, Vantaa, Vihti, Ylivieska, Ylöjärvi, Äänekoski.

Vastauspyyntöjä laaja-alaisiin tehtäväpaketteihin tuli 6 kpl näiltä neljältä paikkakunnalta: Espoo, Helsinki, Sauvo, Tampere.

On hienoa, että opettajat tarjoavat oppilailleen mahdollisuuden matematiikan harrastamiseen! Koko maan tilanne sen sijaan ei todellakaan näytä hyvältä: Kansallisen koulutuksen arviointikeskus Karvin viime vuoden lopulla tehdyn arvioinnin mukaan erityisesti matematiikan osaamisen taso on laskenut yhtäjaksoisesti jo

vuodesta 2000. Arvioinnissa todettiin, että osaamisen taso on aidosti laskujohteinen riippumatta esimerkiksi koronapandemiasta johtuvista syistä.

Suomen sijoitus Pisa-tuloksissa on laskenut yhtäjaksoisesti vuodesta 2006 alkaen kaikilla Pisa-tutkimuskierroksilla, joista suhteellisesti eniten sijoituksemme on pudonnut matematiikan osaamisessa. Heikentyvä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen on omiaan vaikeuttamaan jo nyt laajamittaista osaajapulaa, joka on elinkeinoelämän pullonkaula. Innovaatiot, joita tarvitaan ilmastonmuutoksen ja muiden uhkien selvittämiseen, ovat uhattuna.

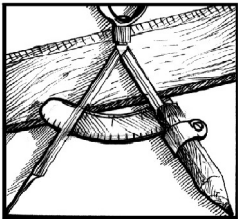
Matematiikan tuntien käyttö nopeasti vanhenevien ohjelmistojen ja koneiden käytön opetteluun on virhe, joka pitäisi jo myöntää ja palauttaa matematiikka omille oppitunneilleen. Tärkeän hienomotoriikan harjoittelua ei myöskään tulisi laiminlyödä. Matematiikan oppimistulosten tason nostaminen vaatii toimia koulun joka tasolla. Monissa kouluissa ei ole päteviä matematiikan opettajia. Luokanopettajakoulutuksessa on lisättävä tuleville luokanopettajille valmiudet opettaa matematiikkaa, opettajille tarjottavan matematiikan lisäkoulutuksen saatavuutta on parannettava. Matematiikan opetuksen sisältöjen ja opetustapojen suunnittelussa tulee alkaa kuunnella matemaatikkoja. Matematiikan vetovoiman parantamiseksi tarvitaan matematiikan opetuksen sisältöjen modernisointia nykytekniikan tarvitsemaan suuntaan. Tähän tarvitaan hyvä perusosaaminen, jolle rakentaa. Algebran merki-

tys on ymmärrettävä, symboleilla (kirjaimilla) on totuttava ”laskemaan”, muuten jatko lukiossa takkuu. Esimerkiksi alkeellisen lukuteorian voisi ottaa lukion kurssien joukkoon sisältäen jäännösluokkien algebran ja RSA-algoritmin esittelyn. Trigonometrian yhteyteen olisi otettava kompleksilukujen alkeisominaisuudet. Geometriassa tulisi painottaa todistamista laskeamisen sijaan; todistaminen on hyvää harjoitusta loogiseen ajatteluun. Matematiikan ja tilastotieteen merkitystä yliopisto-opinnoissa korostaa, että aloituspaikkoja on lisätty aloille, joilla matematiikalla on merkitystä. Koulukurssien kertaaminen enää tässä vaiheessa on vaikeaa. Jos matematiikan valmiudet eivät riitäkään opiskeluun yliopistossa, voi seurauksena olla opintojen venyminen, keskeytyminen tai alan vaihto. Sama pätee opiskeluun ammattikorkeakoulussa ja muissa oppilaitoksissa aloilla, joilla matematiikan ja luonnontieteiden pohjatiedot ovat tärkeitä.

Matematiikan osaamisen merkitys on saatava yleiseen tietoisuuteen ja alan vetovoimaisuutta on parannettava, myös medialla on tässä oma vastuunsa.

Diplomien vastauksia voi edelleen pyytää osoitteesta juha.piste.ruokolainen@at.yahoo.com, Helsingin yliopiston osoitteen käyttöoikeuteni loppuu, mutta minuun saa tarvittaessa yhteyden Juha Ruokolaisen kautta.

Solmun matematiikkadiplomeilla on tekijänoikeudet; aineisto on määritetty suomen kielellä matematiikkalehti Solmun verkkosivuilla julkaistavaksi. Ellei oppilaiden suomen kielen osaaminen riitä, voi opettaja auttaa tekstien ymmärtämisessä. Samalla opitaan suomea kielikylvyn tyyliin. Solmun sivuilla on myös selityksin täydennetty matematiikan verkkosanakirja suomi-englanti, jota voivat englantia osaavat hyödyntää diplomitehtäviä ratkoessaan.



Suorakulmio

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

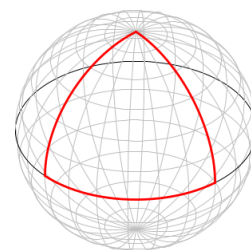
Suora kulma ja suorakulmainen kolmio

Yksi mieltäni kauimmin askarruttaneista käsitteistä on suora kulma. Jos otan käsittelyyn L-kirjaimen muotoon väännetyin rautalanganpätkän ja vedän tuon ainoan kulman suoraksi, tuloksena ei suinkaan ole suora kulma, vaan suoran kulman tuhoutuminen. Mielestäni suoran kulman tulisi olla suora, siis sellainen, joka ei ole kulma ensinkään. Luku nolla on joskus keksitty ilmoittamaan jonkin olevaisen paljoutta silloin, kun tuota olevaista ei ole lainkaan. Siksi suoraksi väännetty rautalanka on mielestäni nollakulman ilmentymä. Mutta kun ei: matematiikan kaanonissa nollakulma tarkoittaa sitä kulmaa, jossa kulmaa eli äkillistä suunnanmuutosta on eniten. Siinä rautalangan päät osoittavat samaan suuntaan.

Geometrian luultavasti jumalallista alkuperää oleva nomenklatuuri on ymmärtääkseni asia, johon en pysty vaikuttamaan. Vaikka suora kulma ja nollakulma ovat mielestäni yksi ja sama asia, jatkan perinteisellä linjalla. Elämän helppoudellakin on oma merkityksensä. Olkoon siis suora kulma yhtä kuin kohtisuora kulma, sellainen 90 asteen tai $\pi/2$ radiaanin suuruinen kulma. Kolmioista tai muista monikulmioista puhuessani tarkoitan kulmilla vain kärkikulmia, en niitä 180 asteen kulmia, joita on ylinumeroituvasti ääretön määrä kärkipisteiden väleissä. Tässäkin noudatan vakiintunutta puhetapaa. Yhdestä periaatteestani en kuitenkaan luovu: kutsun suorakulmaiseksi kolmioksi ainoastaan sellaista kolmiota, jonka kaikki kulmat ovat suoria. Ehdottomasti! Mitä järkeä on siinä, että kolmiota, jonka

kulmista alle 34 % on suoria, kutsutaan suorakulmaiseksi? Sehän on yhtä hölmöä kuin jos pianon, viulun ja sellon muodostamaa kokonaisuutta kutsuttaisiin pianotrioksi. Tuota ... tämä ei tainnut olla osuva vertaus.

Olen piirtänyt aidon suorakulmaisen kolmion kuvaan 1. En viitsi merkitä kulmiin niitä tuttuja väkisiä, suoran kulman merkkejä, sillä kaikki tämän artikkelin kulmiot ovat suorakulmioita.



Kuva 1. Suorakulmainen kolmio.

Suoraan kulkeminen kaareutuvalla pinnalla

Opiskelijariennoista kotiutuessani minulla oli joskus vaikeuksia kulkea suoraan. Nyt jälkikäteen ymmärrän, että hankaluudet johtuivat maapallon pinnan kaareutumisesta. En ollut perehtynyt kaareutuvien pintojen geometriaan tarpeeksi syvällisesti. En yksinkertaisesti edes tiennyt, mitä suoraan kulkeminen kaareutuvalla pinnalla tarkkaan ottaen tarkoittaa.

Newtonin inertiallain mukaan kappale jatkaa suoraviivaista liikettä vakionopeudella, ellei siihen vaikuta mitään voimia. Voiman vaikutus ilmenee kiihtyvyytenä. Sekä nopeus $\mathbf{v}$ että kiihtyvyys $\mathbf{a}$ ovat vektorisuureita, ts. niillä on suuruus ja suunta. Jos $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{a}$ ovat yhden-suuntaiset, siis saman- tai vastakkaissuuntaiset, liike säilyy suoraviivaisena. Liikkeen suunta muuttuu täsmälleen silloin, kun $\mathbf{a}$ on erisuuntainen kuin $\mathbf{v}$. Kiihtyvyyksvektori $\mathbf{a}$ voidaan jakaa nopeusvektorin suuntaiseen komponenttiin $\mathbf{a}_{||}$ ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\mathbf{a}_{\perp}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{||} + \mathbf{a}_{\perp}, \quad \mathbf{a}_{||} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{||}.$$

Liike on suoraviivaista, jos ja vain jos $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{0}$.

Seuraavaksi ajatellaan, että piste liikkuu kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{E}^3$ kaareutuvaa kaksikulotteista pintaa S pitkin. Tuo pinta voisi olla esimerkiksi pallon pinta. Koska pinta kaareutuu, liike ei yleensä ole suoraviivaista kolmiulotteisessa avaruudessa asustavan kolmiulotteisen tarkkailijan näkökulmasta. Entäpä jos liikettä tarkkailee pinnalla asustava kaksikulotteinen tarkkailija Lettu? Hän ei pääse irtaantumaan pinnasta eikä suoraan havaitse kolmatta ulottuvuutta.

Keskinopeus on paikan muutos jaettuna aikavälin pituudella. Paikan muutos on vektori. Se on sitä enemmän pinnan S suuntainen, mitä lyhyempi on aikaväli. Hetkellinen nopeus saadaan raja-arvona, kun aikavälin pituus kutistetaan nollaan. Täten pinnalla tapahtuvan liikkeen nopeusvektori on aina pinnan suuntainen. Tuon nopeusvektorin Lettu havaitsee. Kiihtyvyyksvektorin komponentti $\mathbf{a}_{\perp}$ jaetaan pinnan suuntaiseen komponenttiin $\mathbf{a}_{||}$ ja pintaa vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\mathbf{a}_{\perp}^{\perp}$. Silloin

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}_{||}^{\perp} + \mathbf{a}_{\perp}^{\perp}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_{||} + \mathbf{a}_{||}^{\perp} + \mathbf{a}_{\perp}^{\perp}.$$

Kummankin yhtälön oikealla puolella esiintyvät vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.¹ Vain pinnan suuntaiset komponentit $\mathbf{a}_{||}$ ja $\mathbf{a}_{||}^{\perp}$ näyttäytyvät Letun havaintomaailmassa. Siitä johtuen Lettu pitää liikettä suoraviivaisena, jos $\mathbf{a}_{\perp}^{\perp} = \mathbf{0}$. Toisin sanoen: liike pinnalla on suoraviivaista täsmälleen silloin, kun kiihtyvyyksvektorin nopeusvektoria vastaan kohtisuora komponentti on kohtisuorassa myös pintaa vastaan. Tällöin liikkuvalla pisteellä ei ole pinnan suuntaista kiihtyvyyttä muissa suunnissa kuin mahdollisesti liikkeen ja samalla liikeradan suunnassa.

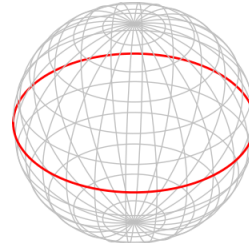
Letun havaintomaailman geometriaa voidaan pitää pinnan S sisäisenä geometriana. Nopeusvektorin $\mathbf{v}$ itseisarvo $|\mathbf{v}|$ sanotaan vauhdiksi tai ratavauhdiksi. Liikerataa pitkin voidaan kulkea myös tasaisella vauhdilla, esimerkiksi yksikön suuruisella vauhdilla. Onkin yksinkertaisempaa määritellä pinnan sisäisessä geometriassa suorat viivat eli geodeesit tasavauhtisen liikkeen avulla:

Määritelmä. Pintaa pitkin tasaisella vauhdilla liikkuvan pisteen liikerata on **geodeesi**, jos liikkeen kiihtyvyyksvektori on kohtisuorassa pintaa vastaan.

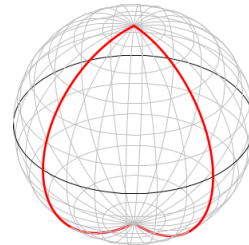
Pallopinnalla geodeesit ovat isoympyrän kaaria tai niiden pätkiä. Isoympyrällä tarkoitetaan pallon keskipisteen kautta kulkevan tason ja pallopinnan leikkausympyrää. Täten kaikki pituuspiirit ovat geodeeseja, mutta leveyspiireistä ainoastaan päiväntasaaja on geodeesi. Isoympyrä kokonaisuudessaan on maksimaalinen geodeesi siinä mielessä, että ei ole pidempää geodeesia, johon isoympyrä sisältyisi aitona osana.

Monikulmiot pinnoilla

Tasomonikulmion peräkkäisiä kärkiä yhdistävät sivut ovat janoja, tason suoria viivoja. Pinnalla S monikulmion sivuilta vaaditaan, että ne ovat geodeeseja. Kuvan 1 esittämän pallokolmion sivut kulkevat isoympyröitä pitkin, joten pallokolmio on ihan laillinen monikulmio. Samoin ovat kuvien 2 ja 3 esittämät suorakulmiot.



Kuva 2. Päiväntasaaja on esimerkki suorakulmaisesta 0-kulmiosta. Mikä tahansa muukin isoympyrä kelpaisi esimerkiksi. Isoympyrän kaikki kulmat todellakin ovat suoria, sillä implikaatio " x on isoympyrän kulma $\Rightarrow x$ on suora kulma" on tosi kaikilla x .

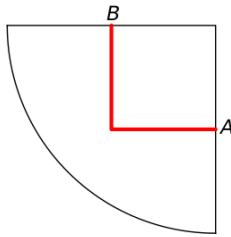


Kuva 3. Kun pallon navat yhdistetään toisiaan vastaan kohtisuorilla isoympyrän kaarilla, syntyy suorakulmainen 2-kulmio.

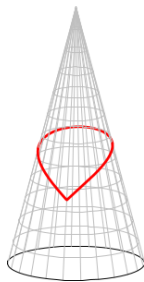
Pallopinnalle saadaan täten piirrettyä suorakulmaiset nolla-, kaksi- ja kolmikulmiot. Suorakulmaisen yksikulmion piirtämistä varten siirrytään kartiopinnalle. Piirtämisen ideaa on havainnollistettu kuvissa 4 ja 5. Jos kartion terävä kärki häiritsee, se voidaan tarvittaessa

¹Nollavektorin ajatellaan olevan kohtisuorassa kaikkia muita vektoreita vastaan.

korvata tasaisen pyöreällä huipulla, joka saumattoman sileästi liittyy muuhun kartioon. Myös kaksi- ja kolmikulmaiset suorakulmiot voidaan toteuttaa kartiopinnalla. Mitenköhän ne saadaan aikaan?

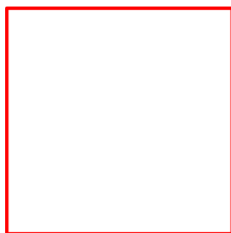


Kuva 4. Suoran ympyräpohjaisen kartion vaippa syntyy, kun ympyräsektorin vaaka- ja pystysivu liimataan yhteen, jolloin pisteet A ja B yhtyvät. Punaisesta viivasta tulee tällöin suorakulmainen 1-kulmio kuvan 5 mukaisesti.



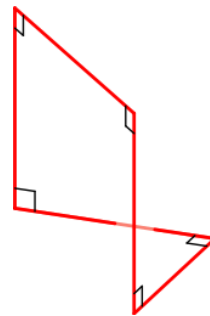
Kuva 5. Suorakulmainen 1-kulmio kartiopinnalla.

Järjestyksessä seuraavana on suorakulmainen nelikulmio. Sitä kutsutaan myös suorakaiteeksi syystä, jota en milloinkaan ole ymmärtänyt. Mikä ihmeen kaide? Ei mene minun pirtaani, ei sitten millään. Kuvassa 6 paistattelee säännöllinen suorakulmainen tasonelikulmio eli neliö. Siinä on neljä yhtä pitkää sivua. Neliöt ovat nykyisin hurjissa hinnoissa varsinkin pääkaupunkiseudulla. Matemaatikoilla on erinomainen tilaisuus vaurastua myymällä neliöitä. Toisaalta norjalaisen Niels Henrik Abelin (1802–1829) esimerkki osoittaa, että matemaatiikan kirkkaimmat helmet hioutuvat vaatimattomissa, suorastaan kurjissa olosuhteissa. Yliopistojen rahoituksesta vastaavat poliittiset päättäjät tietävät tämän varsin hyvin.



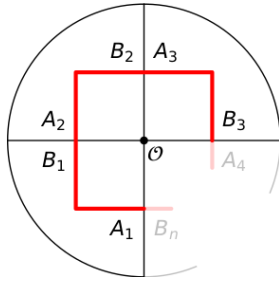
Kuva 6. Neliö kiusasi viisauden ystäviä jo antiikin Kreikassa. Neliön sivut ja lävistäjä eivät tahtoneet mahtua samaan maailmankaikkeuteen, mikä romahdutti monen oppineen miehen maailmankuvan (ks. [1], kappale 4.4.)

Suorakulmaisen nelikulmion kulmien summa on 360° eli täysi ympyrä. Onko silloin mahdollistakaan, että suorakulmaisessa monikulmiossa olisi enemmän kulmia kuin neljä, esimerkiksi viisi? Ongelmaa voidaan lähestyä käänteisesti ajattelemalla kolmiulotteiseen avaruuteen suljettu murtoviiva, jossa on viisi suoraa kulmaa kuten kuvassa 7. Sen jälkeen aletaan miettiä, millaisella pinnalla kyseinen murtoviiva saattaisi poukkoilla. Luonnonvoimat voidaan valjastaa mielikuituksen avuksi: murtoviiva väännetään rautalangasta, kastetaan saippualliuokseen ja kas, saippuakalvo asettuu kauniisti kaareutuvaksi rautalangan reunustamaksi pinnaksi. Ajatuksissa pintaa jatketaan hieman laajemmalle, jolloin rautalanka ei enää ole reunalla. Huomaa, että avaruuden $\mathbb{E}^3$ jana on aina geodeesi, sijaitseva se millä pinnalla tahansa. Miksi?



Kuva 7. Kun suorakulmainen rautalankaväännös kastetaan saippualliuokseen, saippuakalvo muodostaa pinnan, ja rautalanka on sen reuna. Luonnonvoimat pyrkivät minimoimaan kalvon pinta-alan. Siksi näin syntyneitä pintoja sanotaan minimipinnoiksi.

Rautalangasta vääntämällä on mahdollista tuottaa n -suorakulmioita myös kulmamäärillä $n > 5$. En halua artikkelin loppuosasta saippuaopperaa, joten palaan kartiomallin pohdintaan. Onnistuisiko suorakulmion tuottaminen suurilla kulmamäärillä, jos sivusta auki leikatun kartion vaippaa jatkettaisiin ruuvimaisesti itsensä päälle niin, että huippukulmasta tulisi reilusti isompi kuin täysi ympyrä? Sen jälkeen yllä olevä helma pliseerattaisiin kuin hame ja liimattaisiin halkio umpeen. Vekkihameen teräviä vekkejä ei saa syntyä, vaan helman tulee kaareutua sileästi. No, onnistuuhän se! Pinnan ja monikulmion konstruktio selitetään tarkemmin kuvan 8 yhteydessä. Näin ollen jokaista ei-negatiivista kokonaislukua n kohti on olemassa pinta, jolle voidaan piirtää suorakulmainen n -kulmio.



Kuva 8. Kuvan 4 esittämän rakennuspalan kopioita voidaan liimata toisiinsa mielivaltaisen määrä. Yllä palasia on n kappaletta. Aluksi sivu B_1 liimataan sivuun A_2 , sitten B_2 liimataan sivuun A_3 ja niin edelleen. Sivun B_i liimataan aina sivuun A_{i+1} kunnes lopuksi viimeisen palasen sivu B_n liimataan ensimmäisen palasen sivuun A_1 . Origon O on ainoa kaikille palasille yhteinen piste. Koska jo neljästä palasesta kertyy täysi kierros, tilkkuhelma pitää poimuttaa sinikäyrän lailla tasaisesti aaltoilevaksi sileäksi pinnaksi, poimukartioksi. Punainen viiva muodostaa silloin suorakulmaisen n -kulmion kaksiulotteiselle poimukartiopinnalle.

Poincarén kiekko

Kolmas ja matemaattisesti ehkä yksinkertaisin ja kaukein tapa tuottaa monikulmaisia suorakulmioita on piirtää ne erälle pinnalle, joka ei mahdu kolmiulotteiseen euklidiseen avaruuteen, mutta kuusiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{E}^6$ se ainakin mahtuu. Onneksi tuo pinta on mahdollista projisoida tason avoimeksi origokeskeiseksi yksikkökiekoksi

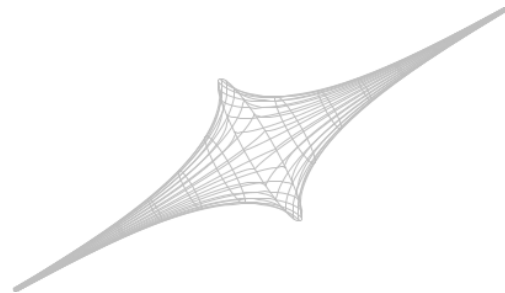
$$B(0, 1) := \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

ja vieläpä *konformisti*, so. kulmien suuruudet säilytäten. Etäisyydet tuossa projektiossa pakosti muuttuvat. Kuuluu Mercatorin karttaprojektio [2] on tässä mielessä samanlainen. Ennen ihme-pinnan tarkempaa esittelyä puhutaan hetki kaarevuudesta.

Kaksiulotteisen pinnan jokaiseen pisteeseen liittyy tietty reaalityyppi, jota sanotaan *kaarevuudeksi* tuossa pisteessä. Kaarevuuden täsmällistä määritelmää ei ole tarkoituksenmukaista esittää tässä. Kaarevuuden etumerkistä saadaan vihje asettamalla pisteeseen pintaa sivuava *tangenttitaso*. Pallopinta jää kokonaan tangenttitason toiselle puolelle ja koskettaa tasoa vain sivuamispisteessä. Tämä on tyypillistä positiivisesti kaareutuvalla pinnalla. Tasoa sivuava tangenttitaso on taso itse. Tason kaarevuus on nolla. Myös ympyräpohjaisen lieriön kaarevuus on nolla. Tangenttitaso sivuaa lieriötä suoraa pitkin, ja symmetria-akselin suunnassa auki leikattu lieriö voidaan levittää tasoon. Pinnan $z = y^2 - x^2$ voidaan ajatella syntyvän siten, että xz -tason suuntaista alaspäin aukeavaa paraabelia liu'utetaan pitkin yz -tasossa sijaitsevaa ylöspäin aukeavaa paraabelia. Pinta

on esimerkki *satulapinnasta*. Kun satulapinnan johonkin pisteeseen asetetaan tangenttitaso, pinta karkaa tasoon kummallekin puolelle heti sivuamispisteen välittömässä läheisyydessä, toisin kuin esimerkiksi lieriön pinta. Satulapinnalla on negatiivinen kaarevuus.

Pallopinta näyttää täsmälleen samalta kaikista pinnan pisteistä katsottuna. Pallon kaarevuuden on siis oltava sama positiivinen vakio jokaisessa pisteessä. Samasta syystä tason kaarevuus on nolla kaikkialla, samoin lieriön kaarevuus. Satulapinnan $z = y^2 - x^2$ negatiivinen kaarevuus vaihtelee pisteestä toiseen. Herää kysymys, onko olemassa pintaa, jolla on yksi ja sama negatiivinen kaarevuus kaikkialla. Kuvaan 9 piirretty, *pseudopalloksi* nimetty pinta [5] on melkein tällainen, mutta siinä on terävä reunus. Hyväksytäänkö pseudopallo vai ei riippuu siitä, mitä pinnalta vaaditaan. Jos pinnan on oltava sileä kaikkialla ja jokaista maksimaalista geodeesia pitkin pitää voida kulkea loputtomiin vakiovauhdilla ilman, että “pudotaan pinnalta pois”, pseudopallo ei riitä. Ratkaisuksi keksittiin jo 1800-luvulla **hyperbolinen taso** $\mathbb{H}^2$. Paikallisesti pseudopallo ja $\mathbb{H}^2$ ovat samankaltaisia, mutta kokonaisuuksina, globaalilta rakenteeltaan, ne ovat ratkaisevasti erilaisia. Hyperbolinen taso on kappaleen alussa mainittu ihme-pinta. Sen epäeuklidista geometriaa esitellään artikkelissa [3] mm. virkatun mallin avulla.



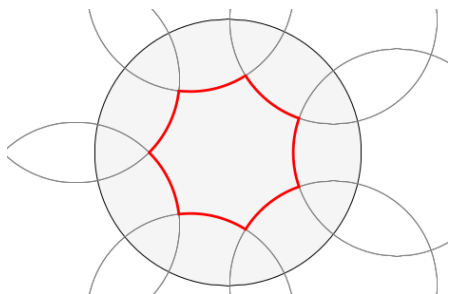
Kuva 9. Pseudopallon rautalankamalli. Pinta jatkuu kummassakin suunnassa ohenevana pillinä loputtomiin. Paksummassa kohdassa on terävä reunus.

Sitkeän kansanvalistustyön seurauksena kansalaiset tietävät jo korkeammasta matematiikastakin jotakin — luultavasti ainakin sen, että topologi, tuo puoliso-kea matemaatikon alalaji, ei erota kahvikuppia munkkirinkilästä. Yliopiston kahvilassa posliinikuppia hampaantyingillään järsivä topologi pitää hyperbolista tasoa avoimena kiekkona. Yllätys, yllätys: pseudopallon ja kiekon välisen eron topologi huomaa heti.

Poincarén² mallissa [4] hyperbolinen taso $\mathbb{H}^2$ projisoidaan yksikkökiekoksi $B(0, 1)$ siten, että geodeeseja vastaavat kiekon reunaympyrän kohtisuoraan kohtaavat ympyränkaaret ja rajatapauksina kiekon lävistäjät; muut geodeesit ovat näiden maksimaalisten geo-

²Matematiikan viimeiseksi yleisneroksikin sanottu Henri Poincaré vaikutti Ranskassa vuosina 1854–1912. Hänen jälkeensä matematiikka on paisunut niin laajaksi tieteenalaksi, että sitä ei yksi ihminen pystyne kokonaisuudessaan hallitsemaan.

deesien pätkiä. Projektio säilyttää kulmat: kahden geodeesin välinen kulma pinnalla $\mathbb{H}^2$ on sama kuin niitä vastaavien kaarien välinen tavallinen euklidinen kulma Poincarén kiekolla. Erityisesti suorat kulmat Poincarén kiekolla ja hyperbolisella tasolla vastaavat toisiaan. Kuvaan 10 on piirretty geodeeseja ja niistä muodostettu säännöllinen seitsenkulmainen suorakulmio.



Kuva 10. Poincarén kiekkoon voidaan piirtää suorakulmainen n -kulmio millä tahansa kulmamäärällä $n > 4$. Kuvassa on säännöllinen suorakulmainen 7-kulmio. Poincarén kiekko käsittää varjostetun alueen ilman reunaympyrää. Reunaviivan kohtisuoraan kohtaavien ympyröiden ja kiekon leikkaukset ovat geodeeseja.

Kahden pisteen välinen etäisyys kiekosta mitattuna on täysin erilainen kuin vastinpisteiden etäisyys pinnalla $\mathbb{H}^2$. Hyperbolisen metriikan pituuselementin ds neliö kiekon tavallisten xy -koordinaattien ja $r\theta$ -napakoordinaattien avulla lausuttuna on

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{4(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{(1 - r^2)^2}.$$

Jälkimmäistä kaavaa ja integraalilaskentaa käyttäen voidaan laskea, että Poincarén kiekon reuna on hyperbolisen metriikan mielessä äärettömän kaukana origosta. Euklidisen r -säteisen origokeskisen ympyrän kehältä on sädettä pitkin hyperbolista matkaa origoon pärtä

$$\rho := \ln \frac{1+r}{1-r}$$

yksikköä, kun $r < 1$. Pituuselementin napakoordinaattiesityksestä saadaan lisäksi laskettua hyperbolinen pituus λ origokeskiselle ympyräviivalle, jonka hyperbolisen säde on ρ :

$$\lambda = \pi(e^\rho - e^{-\rho}) \approx \pi e^\rho.$$

Tässä $e \approx 2,718$ on Neperin luku. Jos ρ olisi ympyrän euklidinen säde, ympyrän kehän pituus olisi $2\pi\rho$. Origokeskisen ρ -säteisen ympyrän kehän pituus hyperbolisessa metriikassa on noin πe^ρ , kun ρ on suuri. Silloin hyperbolinen kehä on pituudeltaan $e^\rho/(2\rho)$ -ertainen euklidiseen verrattuna. Kun $\rho = 10$, pituuksien suhde on noin 1100. Kun $\rho = 100$, suhde on noin $1,34 \cdot 10^{41}$. Tästä johtuu hyperbolisen avaruuden virkattujen panulappumallien voimakas poimuttuminen.

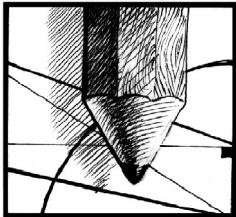
Hyperbolisen kehän rajun venymisen takia ei tunnu aivan mahdollomalta tosiasia, että vakiokaarevuuden

omaava pinta $\mathbb{H}^2$ välttämättä pursuaa ulos avaruudesta $\mathbb{E}^3$. Tämän ja hieman enemmänkin on suuri matemaatikko David Hilbert (1862–1943) todistanut vuonna 1901. Muita aiheeseen liittyviä tuloksia ovat todistaneet mm. Kaunis mieli -elokuvastakin tuttu matemaatikko ja talousnobelisti John Nash (Nashin upotuslauseet 1950- ja 60-luvulla), Danilo Blanuša (isometrinen upotus $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}^6$, vuosi 1955) ja Èmil' Renol'dovich Rozendorn (isometrinen immersio $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{E}^5$, vuosi 1960).

Poincarén mallin yhteenvedo. Pistejoukkona (ja topologisena avaruutena) hyperbolinen pinta $\mathbb{H}^2$ voidaan ajatella kaksiulotteiseksi kiekoksi $B(0,1)$. Kiekon avaruudesta $\mathbb{E}^2$ perimä euklidinen metriikka (so. mitta etäisyydelle) antaa kiekon kaarevuudeksi nolla. Kaarevuuden kuitenkin halutaan olevan -1 koko kiekossa. Euklidinen metriikka on siis korvattava jollain toisella metriikalla. Jo 1800-luvulla keksittiin hyperbolinen metriikka, jolla kaarevuustavoite toteutuu. Jos tällä toisella metriikalla varustettu kiekko halutaan sijoittaa sileästi kaareutuvaksi kaksiulotteiseksi pinnaksi euklidiseen avaruuteen $\mathbb{E}^n$ niin, että (sopivasti venytetyn ja vanutetun) kiekon avaruudelta $\mathbb{E}^n$ perimä euklidinen metriikka pintaa pitkin yhtyy kiekon hyperboliseen metriikkaan, avaruudessa pitää olla tarpeeksi ulottuvuuksia: $\mathbb{E}^2$ ja $\mathbb{E}^3$ eivät riitä, mutta $\mathbb{E}^6$ todistustusti riittää. Poincarén kiekkomalli on kuitenkin sikäli kätevä, että pinnan $\mathbb{H}^2$ geodeesit näyttäytyvät kiekon reunaympyrän kohtisuoraan leikkaavina ympyränkaarina. Lisäksi kahden tällaisen ympyränkaaren välinen euklidinen kulma on yhtä suuri kuin vastaavien geodeesien välinen hyperbolinen kulma pinnalla $\mathbb{H}^2$. Kun tiedetään, mitä Poincarén kiekolla tapahtuu, tiedetään samalla, mitä hyperbolisella pinnalla tapahtuu. Kiekko toimii ikkunana ihmepinnalle.

Viitteet

- [1] Lehtinen, Matti: *Matematiikan historian luentoja*. Päivitetty 11.11.2014.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/histluennot.pdf>
- [2] Rasila, Antti: *Mercatorin kartta*. Solmu 1/2007.
<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/1/mercator.pdf>
- [3] Schroderus, Riikka: *Hyperbolisesta geometriasta*. Solmu 3/2015.
https://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/3/hyperbolisesta_geometriasta.pdf
- [4] Wikipedia: *Poincaré disk model*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_disk_model
- [5] Wikipedia: *Pseudosphere*.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudosphere>



Tie jatko-opintoihin ulkomaille

Sylvester Eriksson-Bique

dosentti, Jyväskylän yliopisto

Oletko pohtinut jatko-opintoja? Mitä jos jatko-opintosi veisivätkin sinut ulkomaille? Tiesitkö, että maailma on melko avoin ja täynnä mahdollisuuksia, joita et ehkä ole osannut kuvitella? Kerron tässä omien kokemuksieni valossa jatko-opintoihin hakeutumisesta ulkomaille, ja miten siihen kannattaa valmistautua. Erityisesti kerroon yhdysvaltalaisista yliopistoista, joista minulla on eniten kokemusta. Osa kokemuksista soveltunee myös muissa maissa opiskelemiseen sekä esimerkiksi ulkomai- siin kandi- ja maisteriopintoihin hakemiseen.

Taustani

Muistan istuneeni professorin työhuoneessa North Carolina State University:ssä kesällä 2010, kun minulle ensimmäisen kerran kerrottiin, että voisin hakea jatko-opintoihin Yhdysvalloissa. Olin silloin vielä kandidaatin opiskeleva Helsingin yliopistossa, mutta olin päässyt kesäksi tutkimusharjoitteluohjelmaan, niin kutsuttuun Research Experience for Undergraduate -ohjelmaan. Professori Ipsen, ohjaajani, kannusti minua hakemaan jo sinä syksynä. Vastasin aluksi epäröiden, etten edes ollut saanut graduani valmiiksi ja että mielelläni olisin opiskellut enemmän.

Kyseisen tapaamisen jälkeen olin nopeasti päättänyt, että voisin sittenkin hakea jo samana syksynä jatko-opintoihin Yhdysvaltoihin ja että voisin viimeistellä opintoni seuraavaan kesään mennessä. Helsingin yliopiston joustavat tentti- ja opiskelukäytännöt auttoi-

vat siinä. Samalla perehdyin koko hakemusrumbaan, mukaan lukien eri kokeet, suosituskirjeet, hakemuksien maksut ja kielivaatimukset. Tutkin kymmenien maailman yliopistojen nettisivuja ja professorien sivustoja etsien tutkimusta, mikä minua kiinnostaisi.

Viikkojen kuluessa lista typistyi n. 20 yliopistoon, joi- hin päätin hakea. Osin valinnat perustuivat yliopisto- jen kansainvälisiin arvioihin ja osin kollegoiden suosi- tuksiin ja osin innostaviin professoreiden sivuihin. Kir- joitin hakemukset, tein kokeet ja jäin odottamaan tu- loksia. Kokeita tehdäkseen jouduin vähän matkustele- maan ja suunnittelemaan aikatauluja, varsinkin kos- ka samalla olin vaihdossa Hannoverissa Saksassa. Ko- ko hanke lähes kaatui siihen, että myöhästyin teknisen- vian vuoksi kokeeseen ilmoittautumisesta. Pääsin kui- tenkin kokeeseen ilmoittautumalla paikan päällä Ham- purissa. Loppu hyvin kaikki hyvin sitä sanotaan, mutta otin opikseni ja pyrin nyt aina lähettämään hakemuk- set ja ilmoittautumaan ajoissa.

En ehkä aluksi tajunnutkaan, kuinka kilpailtuihin paik- koihin olin hakenut. Yllätyksekseni seuraavana keväänä sain tarjouksia monista opintopaikoista. Juuri maiste- riksi valmistuneesta oli varsin erikoista saada lupauksia viiden vuoden rahoituksesta ja ehdotuksia keskustel- la tarjouksesta tunnettujen professoreiden kanssa. Vie- railtuani yliopistoissa ja keskusteltuani useiden ihmis- ten kanssa päädyin menemään New Yorkin yliopistoon Yhdysvalloissa syksyllä 2011, mistä valmistuin vuonna 2017.

Yhdeksän vuoden jälkeen Yhdysvalloissa vuonna 2020 palasin Suomeen. Olen nyt tenure track -tehtävässä Jyväskylän yliopistossa. Uskon, että uralleni ja tutkimukselleni oli ratkaisevan tärkeää saada kokemuksia eri yliopistoissa ulkomailla. Kaikkia vaikutuksia on vaikea mitata, ja suurin vaikutus on ollut kaikilla ihmisillä, joihin pääsin tutustumaan opintojen aikana.

Miksi ulkomaille ja miten eroaa Suomesta?

Ennen kuin hakee oikeastaan minnekään, on tärkeää pohtia ja vastata miksi-kysymyksiin. Miksi hakisit ulkomaille? Alla olen listannut joitain asioita, positiivisia ja negatiivisia, joita ainakin itse pohtisin. Keskeisin vetovoimatekijä ulkomailla on, että siellä on mahdollisuuksia, joita Suomesta ei löydä. Mahdollisuuksilla tarkoitan tutkimussuuntia, joita ei täällä tutkita tai laajempia verkostoja. Samalla ulkomaille meno tukee liikkuvuutta, josta on muodostunut työnhaussa ja rahoituksen haussa varsin merkittävä kriteeri.

Ulkomailla opiskelu eroaa myös hyvin paljon Suomessa opiskelusta. Suomessa, ja Euroopassa yleensä, jatko-opiskelu alkaa maisterin jälkeen ja koostuu pääasiassa tutkimuksesta yhden ohjaajan mentoroimana. Aluksi teet suunnitelman, joka koostuu n. 3–5 osaprojektista yhdessä aiheessa, ja valmistut n. 4 vuodessa. Rahoituksesi usein on sillisalaatti ohjaajan ja säätiöiden, sekä joskus yliopiston, rahoitusta. Voit itsenäistyä nopeasti, ja voit hakea myös oman rahoituksen. Projektit joustavat paljon. Lopuksi on tarkka ja seremoniallinen väitöskirjan tarkastusprosessi, joka päättyy väitöstilaisuuteen.

Yhdysvalloissa jatko-ohjelmat olettavat alhaisemman tason: lähempänä kandin tasoa Suomessa. Vastaavasti väitös kestää usein pidempään: 4–6 vuotta. Rahoitus myönnetään tavallisesti koko ajaksi. Ensimmäiset kaksi vuotta kuluva kursseissa, seminaareissa ja ohjaajan etsimisessä. Tyypillisesti joudut läpäisemään sarjan erittäin vaativia pätevyyskokeita (qualifying exams). Suorituksia seurataan ja on kriteereitä. Ylivoimaisesti suurin osa pärjää, varsinkin suomalaisella maisterin taustalla, mutta osa päättyy toisille teille. Opiskeluun kenties kuuluu enemmän kilpailua, mutta samalla tukenasi on suuri määrä henkilökuntaa ja muita jatko-opiskelijoita. Väitöskirjaan ei liity yhtä paljon suunnittelua, ja osajulkaisuja voi olla vähemmän. Väitöskirjan tarkastaa toimikunta melko joustavasti, ja väitöstilaisuus on pikemminkin seminaaripuhe, jonka jälkeen saat palautetta. Ehkä tutkielmalta vaaditaan hieman vähemmän. Työllistymisen kannalta vaatimukset ovat tosin yhtä korkealla – ellei korkeammat.

Työtehtävissäkin on eroja. Suomessa keskityt tutkimukseen ja saatat toimia assistenttina. Joskus pääset

opettamaan kurssiakin, mikäli olet aktiivinen. Yhdysvalloissa opetus on normaali osa opintoja, ja heti alusta lähtien työhösi kuuluu isojen laskuharjoitusten pitäminen sekä tenttien ja kotitehtävien tarkastus. Usein pääset vastuopettajaksi kurssille. Joskus opetuksen taakka voi olla suurikin, varsinkin alkuvuosina. Tosin, joskus rahoituksella saa sitä pienennettyä. Opetusta usein kohdistetaan myös työllesi relevantteihin kursseihin. Opiskelijoiden tapaaminen toisesta kulttuurista on kiehtovaa ja palkitsevaa. Erityisesti yhdysvaltalaisissa huippuyliopistoissa tapaa erittäin motivoituneita opiskelijoita.

Itselleni suurin ero muodostui opiskelun kestosta. Yhdysvalloissa koin, että sain aikaa etsiä juuri sitä aihetta, joka minua kiinnosti. Sain aikaa lukea suuren määrän matematiikkaa ja ottaa kursseja, joita harvemmin tai koskaan on ollut tarjolla Suomessa. Kehityin rutkasti ongelmanratkaisussa kokeiden kautta, ja opin perusanalyysin, funktionaalianalyysin ja kompleksianalyysin hyvin yksityiskohtaisesti ulkoa. Kokeet opettivat minulle paljon, ja edelleen sovellan niistä saatuja argumentteja tutkimuksessa. On toki mahdotonta vertailla hypoteettisten valintojen seurauksia toisiinsa, mutta uskon, että Suomessa olisin syventynyt tutkimukseen nopeammin ja hitusen kapea-alaisemmin. En olisi samalla lailla oppinut matematiikkaa laajemmin.

Hyödyt ja haitat? Elämäntilanteet?

Ulkomailla opiskelu ei ole aivan kaikille paras ratkaisu. Ensin kannattaa pohtia huolella, mitä ulkomailla opiskelu tarkoittaa. Tietyissä elämäntilanteissa se ei välttämättä ole paras vaihtoehto. Tämä kannattaa jokaisen itse pohtia. Alla muutamia asioita, joita kannattaa pohtia.

Positiivista:

- Kokemus eri kulttuureista ja yliopistoista
- Laajemmat verkostot
- Rahoitus usein stabiilimpi
- Opetuskokemus
- Laajemmat ohjelmat ja enemmän tukea kanssaopiskelijoilta
- Työllistymisvaihtoehdot
- Enemmän aikaa löytää oma tie (joskus)

Pohdittavaa:

- Asevelvollisuus/siviilipalvelus
- Parisuhde/perhe, pitkät matkat
- Kulttuurierot
- Kielitaito

- Eripituiset opinnot
- Ystävät ja yhteydet Suomeen
- Harrastukset
- Paluu Suomeen?
- Rahoitus?

Hakeminen ulkomaille

Mikäli innostuit, ja olet pohtinut asiaa huolella, niin voit alkaa miettimään ulkomaille hakemista. Parhaiten hakeminen sujuu, jos sinulla on yksi vuosi ennen hakua valmistautua. Tyypillisesti haut ovat syksyllä, joten lukija voi valmistautua nyt jo vuoden 2023 syksyn hakuihin. Joskus hakuja on muulloinkin, eikä ole haittaa valmistautua jo nyt vuoden 2024 hakuihin. Keskityn seuraavaksi Yhdysvaltain hakuihin, koska tunnen ne parhaiten.

Mitä hakemuksessa tarvitaan?

- **Suosituskirje:** Tarvitset usein 3 suosituskirjettä professoreilta/työnohjaajilta.
- **Kielikokeita:** Yliopistot vaihtelevat, mutta usein vaaditaan joko TOEFL tai IELTS (englannin kielelle).
- **Muita standardoituja kokeita:** Vaihtelevat, mutta perinteisesti Yhdysvalloissa GRE ja GRE Subject test (Mathematics).
- **Personal statement:** Essee, joka kuvaa motivaatiiosi.
- **Rahaa:** Hakemuksissa on usein parinkymmenen euron maksu, ja standardoidut kokeet maksavat muutamana sataa euroa. Yhteensä hakuun voi kulu n. 1000–1500 euroa, jos haet n. 10–15 paikkaan. Hae esimerkiksi tiedekunnalta tai säätiöltä stipendiä rahoittamaan haku.

Hakemiseen valmistautuminen

Ennen kuin haet, kannustan miettimään vielä kerran kaikkia vaihtoehtoja ja keskustelemaan useiden henkilöiden kanssa. Tutki vaihtoehtoja myös Suomessa ja ajattele laajasti. Suomessakin on yhdeksän yliopistoa (Aalto, Helsinki, Itä-Suomi, Jyväskylä, Oulu, Rovaniemi, Tampere, Turku, Vaasa ja Åbo), joissa on yhteensä ainakin n. 50 potentiaalista ohjaajaa väitöstyölle. Tosin Rovaniemellä ei tällä hetkellä ole aktiivista jatko-opiskeluohjelmaa matematiikassa. Täälläkin on innostavia tutkimusryhmiä. Näitä kannattaa selvittää myös siksi, että voit löytää kesäharjoittelupaikan, suositelijan tai voit kehittää hyvän varasuunnitelman, mikäli haut eivät mene täydellisesti.

Keskusteltuasi mahdollisimman monen ihmisen kanssa on tärkeää ajoissa hankkia meriittejä. Erityisesti yhdysvaltalaisissa ”huippuyliopistoissa” on kova kansainvälinen kilpailu paikoista ja pelkät hyvät arvosanat ja motivaatio eivät riitä. Sinun tarvitsee erottua massasta, ja hakemuksen lukijan pitäisi muistaa juuri sinut. Tässä sinulla on etulyöntiasema: suomalaista matemaattista osaamista arvostetaan. Hyvät arvosanat (lähes kaikki 5) on vaatimus, mutta voit myös osoittaa arvosanojen nousun ja kehittymisen opiskelijana.

Mieti, miten voit osoittaa lupauksesi tutkijana: esimerkiksi tutkimusprojekti, kesäharjoittelu, assistenttina toimiminen, työharjoittelu, palkittu pro gradu -työ tai tunnetun tutkijan suosituskirje. Viime metreillä ei näitä ehdi enää hakea, joten kannattaa jo aikaisin etsiä kaikki mahdollisuudet, joita voi löytää. Mahdollisuuksien ei tarvitse olla yksin matematiikasta – esimerkiksi vakuuttava harjoittelu kansainvälisessä järjestössä, jossa kommunikaatio ja analyysin taidot ovat tärkeitä, voisi loistaa hakemuksessa. Vahvin meriitti on julkaisu (jonka ei tarvitse olla hyväksytty), jonka voi saada esimerkiksi kysymällä aikaisin pro gradu -ohjaajalta tai muilta tutkijoilta yksinkertaisia projekteja, joissa voit auttaa. Myös tietojenkäsittelytieteessä ja fysiikassa voi löytää tutkimukseen liittyviä kiinnostavia harjoittelupaikkoja.

Toinen keskeinen asia valmistella aikaisin on suositte-lijat. Tarvitset tyypillisesti kolme vahvaa suositte-lijaa, jotka tuntevat sinut hyvin. Heidän pitäisi pystyä kirjoittamaan sinusta jotain mahdollisimman henkilökoh- taista ja vakuuttavaa. Tässä auttaa, että he voivat ker- toa tunteneensa sinut pitkään, ja että he ovat nähneet työsi monipuolisesti ja läheltä. Pro-gradu ohjaaja ja kurssien opettaja, jotka näkivät moni-ulotteisesti työ- täsi, voivat olla hyviä valintoja. Työpaikan ohjaaja, tai tutkija, jonka kanssa teit kesäharjoittelun, voivat toi- mia hyvin. Kannattaa välttää yleisiä kirjeitä, esimer- kiksi ohjelman johtajalta, tai vuosien takaa yksittäisen kurssin opettajalta. Voit myös aikaisin ehdottaa, että tekisitte esimerkiksi lukukurssin, jonka kautta suosit- telija oppisi tuntemaan sinut paremmin.

Lopuksi, ennen kuin haet, on hyvä miettiä opinto- suunnitelmaasi ja mistä kursseista olisi eniten hyötyä. Reaali- ja kompleksianalyysi, topologia, algebra I ja II, lineaarialgebra ja todennäköisyyslaskenta lienevät omasta mielestäni tärkeimmät. Funktionaalianalyysis- tä sekä muista erikoiskursseista on hyötyä, koska niillä vahvistat asiaosaamista ja kirjoitat vakuuttavamman hakemuksen.

Hakemisen lähestyessä

Viimeistään noin puoli vuotta ennen hakuja sinun tulisi suunnitella ja valmistautua standardoituihin kokeisiin.

Tässä on hyvä olla mielessä ainakin muutama yliopisto, johon haluat hakea, koska niiden kriteerit määrittävät mitä testejä tarvitset. Lähes kaikki yliopistot vaativat kokeet GRE general ja GRE Mathematics subject, vaikka pandemian jälkeen vaatimuksia onkin uudistettu. Usein kielitaito pitää osoittaa TOEFL-kokeella, mutta jotkin yliopistot suosivat IELTS-koetta. Kokeet ovat maksullisia, ja niitä voi suorittaa nykyään osittain etänä. Koepäiviä on rajatusti. Ilmaista materiaalia voi löytää kokeiden sivuilta ja maksullisia kirjoja kirjakaupoista, jotka valmentavat sinua kokeeseen.

Kokeet ovat haastavia, ja niiden tuloksilla on hieman väliä. Liian matala tulos voi valitettavasti estää valitsemisesi. Korkea tulos laittaa sinut etusijalle. Yksinään tuloksella tosin ei ole väliä, vaan tulosta käytetään lähinnä rajatusti rajaamaan hakemuksia, joita arvioidaan tarkemmin. Aluksi yliopistoilla voi nimittäin olla jopa tuhansia hakemuksia, joista voidaan rahoittaa vain parikymmentä. Eri kokeilla on eri painoarvo. TOEFL-koe ja GRE Mathematics subject -testi ovat tärkeimpiä. GRE general -testiä ei katsota kovin tarkkaan, ja siinä voi saada vähän huonommankin tuloksen, vaikka hyvä tulos varmasti auttaa.

On hyvä huomioida, että kokeita voi uusia. Siksi voi olla järkevää tehdä ne ajoissa, jotta ehdit parantamaan tulostasi tarvittaessa. Varmista, että olet valmistautumisvaiheessa ottanut relevantteja kursseja: reaalianalyysi, algebra I ja II, lineaarialgebra ja todennäköisyyslaskenta. Kokeissa on usein näiden alojen tehtäviä sekaisin, ja osa niistä on yllättävän haastavia. Nopeudella on väliä, joten harjoitella pitää.

Hakemisen aikana

Noin 3 kuukautta ennen hakemuksia sinun pitäisi pyytää suosituskirjeitä. Tässä vaiheessa on hyvä valmistella excel-taulukko, johon kokoat kaikki yliopistot ja ohjelmat, jotka sinua kiinnostavat. Tapaa kaikkien suositelijoiden kanssa ja keskustele hakemuksestasi. Keskustele myös mahdollisimman monen muun ihmisen kanssa, jotta osaat valita parhaat paikat juuri sinulle. Älä keskity pelkästään yliopistojen rankingiin, vaan hae sisällön perusteella. Voit kirjoittaa siten vahvan hakemuksen, jossa perustelet, miksi juuri se ohjelma on sinulle innostava. Laitoksilla on hyvin erilaisia painotuksia ja vahvoja ryhmiä. Kysymällä arvostamiltasi tutkijoilta voit saada hyviä neuvoja.

Kannattaa myös kysyä, jos voisit keskustella jonkun kanssa laitoksella, joka sinua kiinnostaa. Tässä suosituskirjeen kirjoittaja voi auttaa, koska hänellä voi olla kontakteja. Tapaamisessa voit kysyä tutkimuksesta, kertoa itsestäsi ja kysellä hakemisen prosesseista. Yleensä tutkijat mielellään käyttävät tähän aikaa, varsinkin jos läheinen kollega suosittelee sinua. Tapaaminen auttaa hakemusprosessissa, koska tutkija voi nos-

taa hakemuksesi asemia prosessin aikana. Voit harkinnan mukaan lähettää hakemuksen jättämisen jälkeenkin viestejä laitoksien tutkijoille, joissa kerroit että hait – mutta niistä on hyötyä vain, jos kyseinen henkilö on jo kuullut sinusta ja jos sähköposti on lyhyt ja kohtelias.

Hakemuksessa sinun täytyy kirjoittaa personal statement, joka kertoo motivaatiosi jatko-opintoihin ja kyseiseen ohjelmaan. Tämä kannattaa kirjoittaa erittäin huolella ja vastaten tärkeisiin kysymyksiin: Miksi haet? Miksi sinne? Miksi olet pätevä? Mitä haluaisit (alustavasti) tutkia? Mitä tiedät laitoksesta? Mistä motivaatiosi tulee? Tämä on paikka, jossa voit osoittaa tuntevasi laitoksen. Tietoa saat ohjaajiltasi, muilta professoreilta, laitoksen sivuilta ja edellisen kappaleen kontaktien kautta. Nimeä suoraan professoreita, jotka sinua kiinnostaisivat, ja perustele, miksi jokin aihe kiinnostaa sinua. Nosta tässä yhteydessä myös tärkeimmät meriitit, ja kerro tutkimuksestasi/gradustasi. Voit suoraan mainita tärkeitä meriittejä, kuten matematiikkakilpailuja, stipendejä tai kilpailtuja harjoittelupaikkoja.

Sinun kannattaa pyytää mahdollisimman moni lukemaan hakemuksesi. Nämä voivat olla ystäviä, sukulaisia, ohjaajia tai muita professoreita. Älä pelkää, että vaivaisit ketään – aikuisen ihmisen pitää osata kieltäytyä, ja silloin voit kysyä muilta. Sävyllä on paljon väliä, ja yksittäisillä sanavalinnoilla voi luoda joko täydellisen, tai täydellisen väärän, ajatuksen. Uskalla ottaa palautetta, ja muista että lopulta hakemus on sinun. Luultavasti saat ristiriitaista palautetta ja paljon punakynää, mutta eri lähteistä kuulemasi ajatukset voivat joko tapauksessa vahvistaa hakemusta. Myös muut hakemuksen osat, kuten CV, kannattaa valmistella huolella. Varmista että tärkeimmät meriittisi näkyvät selkeästi eivätkä haudaudu massaan.

Varaa aikaa riittävästi hakemuksen lataamiseen nettiin. Tarkista vaatimukset huolella ja varmista, että hakemuksessa on kaikki tarvittavat liitteet. Älä jätä tätä viimeiseen päivään, koska internetongelmat voivat sekoittaa suunnitelmiasi ja hakemuksien lataamisessa monisivuisiin järjestelmiin voi kestää suuri määrä aikaa. Usein hakemuksissa osa täytetään nettilomakkeella, jotka voivat olla työläitä.

Varmista myös kommunikaatio suosittelijoiden kanssa. Muistuta tarvittaessa hakemuksien lähettämisestä ajoissa. Heilläkin on nettilomake, ja vaikka suosituskirje usein on sama eri paikkoihin, kannattaa teroittaa, että sen lataaminen ja lomakkeiden täyttäminen vie jopa muutaman tunnin, jos hakupaikkoja on n. 10. Voit auttaa heitä antamalla kaiken hakumateriaalisi ajoissa ja varmistamalla, että heillä on excel-taulukko, jossa näkyvät kaikki hakemasi paikat deadlinein kanssa. Voit esim. jakaa google drive -kansion tai antaa materiaalin sähköpostin liitteenä.

Hakemisen jälkeen

Kun olet hakenut loppuvuodesta, alat kuulemaan uutisia loppupalvesta. Parhaimmat paikat antavat ensimmäisiä tarjouksiaan jo tammikuun lopulla, mutta tarjouksia annetaan vielä maaliskuun lopulla, ja jopa toukokuussa, mikäli tulee peruutuksia. Huhtikuussa voit kysellä hakemuksiesi perään, mikäli et ole kuullut mitään. Yliopistot antavat tyypillisesti hylkäyskirjeen kaikille hakijoille, ja on epätyypillistä, ettet kuulisi yhtään mitään. Joskus prosessissa tapahtuu virheitä, ja esimerkiksi itseni hyväksyttiin yliopistoon ilman että minulle kerrottiin asiasta (kunnes kysyin).

Mikäli et kuule heti mitään, tai saat hylkäyksiä, älä lanustu. Voit vielä saada myöhemmin tarjouksia muista paikoista. Siksi kannattaa hakea useampaan. Prosessi ei myöskään ole täydellinen, ja yritä teroittaa itsellesi, että hylkäys ei ole henkilökohtaista. Hylkäys voi tuntua aluksi rajulta, mutta voit silti tehdä huippututkimusta ja tehdä valtavan hyvän uran muualla – vaikka Suomessa. Usein päätökset ovat laitoksillekin vaikeita, ja joskus vain sattuu valinta osumaan toiselle henkilölle.

Jos saat tarjouksia, ota maltti käteen. Sinulle annetaan usein huhtikuun puoliväliin antaa lopullinen vastaus. Tässä kohtaa kannattaa tiedustella kiinnostavimpien paikkojen tilannetta. Voit kertoa saamastasi tarjouksesta ylimalkaisesti ja että haluaisit tietää, milloin he päättävät. On kohteliasta myös vetää hakemus pois niistä paikoista, jotka ovat selvästi alempana preferenssilistallasi, vaikka et olisi kuullut sieltä mitään. Näin he

voivat antaa päätöksiä muille nopeammin.

Voit myös kysyä, että onko heillä mahdollisuus joko maksaa vierailua tai järjestää etäpuheluita henkilökunnan kanssa. Pyri selvittämään kaikki mahdollinen (rahoitus, opetuksen määrä, tukimekanismit, qualifying-kokeiden määrä, ohjaajan valitsemisen aikataulu, miten ohjaaja valitsee opiskelijansa/onko hänellä mahdollisuus ottaa lisää opiskelijoita). Kannattaa myös pyytää tapaamista paikallisten jatko-opiskelijoiden kanssa. He voisivat kertoa asumisesta, ohjaajien saatavuudesta, kesän rahoituksesta, kaupungista ja opiskelijoiden sosiaalisesta elämästä. Näet samalla myös vähän laitoksen kulttuuria ja jäsenten innostusta.

Älä anna kenenkään painostaa sinua päätökseen, joka on yksin sinun. Kysy neuvoa mahdollisimman monilta, ja lopuksi päätä itse. Vaikka yksi yliopisto kalastelisi sinua mahtavalla rahoituksella, voit päättää mennä muualle. Kukaan ei loukkaannu päätöksestäsi.

Lopuksi: muista, että huipputyypit, kuten juuri sinä, voivat menestyä aivan missä vain. Usein ei ole vääriä valintoja, ja voit menestyä monissa paikoissa. Jos oikeasti valintasi osoittautuisi vääräksi, voit aina muuttaa suunnitelmia, ja olet silti kokemuksen rikkaampi. Sinä voit myös luoda mahdollisuuksia ja omalla aktiivisuudella varmistaa, että mikä ikinä valintasi on, niin sinä teet sillä parhaasi.

P.S. Kirjoittajaan voi olla yhteyksissä, ja mielelläni vastaan kaikenlaisiin kysymyksiin sekä tapaan kiinnostuneita hakijoita.

Solmu 2/2022

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, jatko-opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

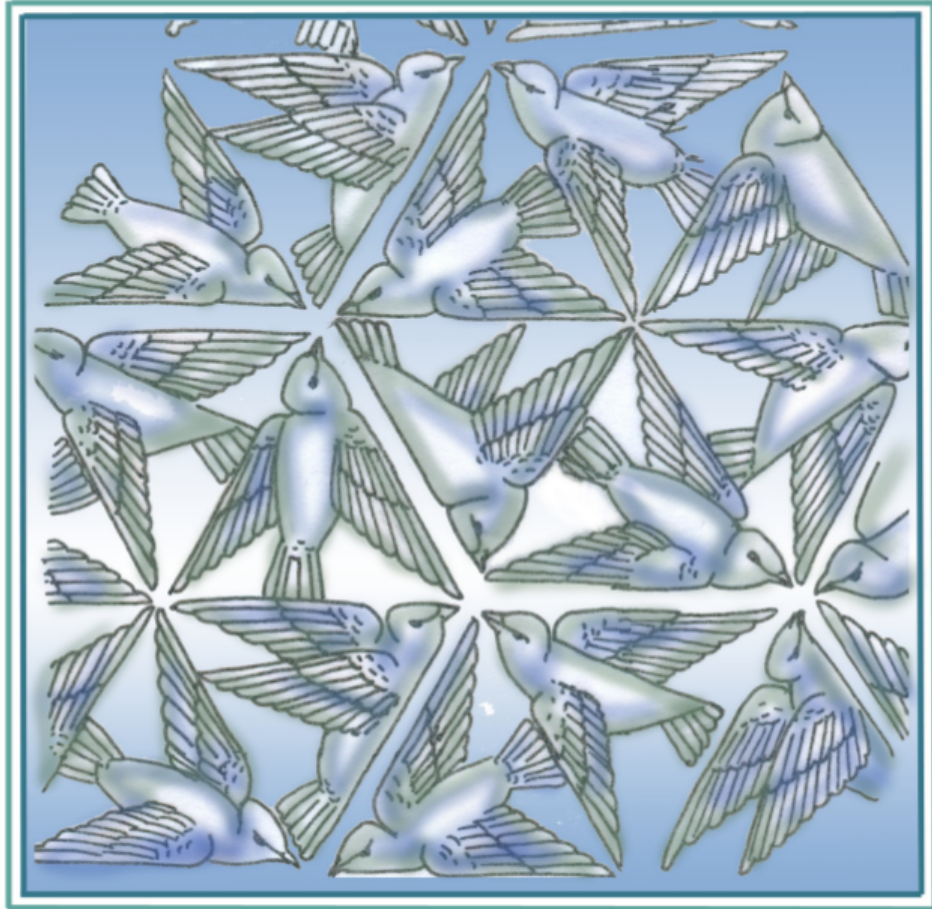
Noora Isoeskelä

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 3/2022 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.12.2022 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi