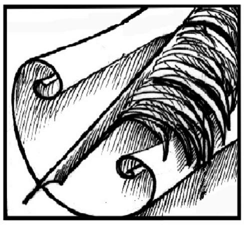

Suuria ja vielä suurempia lukuja

Pääkirjoitus

Eräänä iltana ekaluokkalainen lapseni kertoi, että yksi hänen kavereistaan uskoo, että googolplex on suurin luku ja siitä ei pääse yli. Ymmärrän hyvin lasten kiinnostuksen suuriin lukuihin. Minulla itselläni oli pienenä huoneeni seinällä lista, joka alkoi miljoona, biljoona, triljoona, kvadriljoona ja jatkui melko pitkälle.

Suurten lukujen hahmottaminen ei kuitenkaan ole helppoa. Aika nopeasti luvut muuttuvat niin suuriksi, että niitä harvoin oikeasti tarvitsee. Onkin helppo ymmärtää, miksi ekaluokkalainen uskoo, että suurin luku on olemassa. Ongelmat suurten lukujen kanssa näkyvät myös esimerkiksi ylioppilaskirjoituksissa silloin, jos kokelas saa laskimesta vaikkapa $101^{100^{99}} = \infty$ ja käyttää tätä sujuvasti osana argumenttia.

Matematiikon näkökulmasta tällainen kokelaan virhekäsitys on kovin kummallinen: miksi tuo äärellinen luku korotettuna potenssiin, joka on myös äärellisen luvun äärellinen potenssi voisi ikinä antaa äärettömän? Toisaalta, jos on tottunut siihen, että on täysin normaalia, jos laskin vaikkapa antaa tulokseksi, että $\tan 90^\circ = \infty$ (ja tämä tuloshan on ihan mielekäs!), niin ei välttämättä tule edes mieleen miettiä, onko se ääretön jossain toisessa tapauksessa järkevä.

Lisäksi näin suuria lukuja on valtavan hankala hahmottaa. Maailmankaikkeuden atomien lukumääräksi on arvioitu 10^{80}. Jo pelkkä googol on 10^{100} ja googolplex puolestaan 10^{googol}. On kovin hankala miettiä mitään, mihin koskaan törmäisi ja mikä olisi googolplexin suuruinen (paitsi jos ratkaisee tehtäviä, joissa on potenssitorneja).

Jos maailmankaikkeuden atomien lukumäärä on 10^{80} ja jos haluaisimme laskea kaikki permutaatiot, jotka näistä atomeista saataisiin, olisi niiden lukumäärä Stirlingin kaavalla noin

$$10^{80}! \sim \sqrt{2\pi 10^{80}} \left(\frac{10^{80}}{e}\right)^{10^{80}}.$$

Tämä luku on vielä ehkä hieman epäkäytännöllisessä muodossa, joten arvioidaan sitä. $\sqrt{2\pi 10^{80}} < 10^{80}$ ja $\frac{10^{80}}{e} < 10^{80}$, jolloin saadaan

$$< 10^{80} \cdot 10^{80 \cdot 10^{80}}.$$

Vastaavasti voitaisiin myös arvioida lukumäärälle alaraja. Huomataan, että tällaisia permutaatioita on monta kertaluokkaa vähemmän kuin googolplexin verran, mutta sentään huomattavasti yli googolin verran.

Osa meistä on voinut kuulla luvusta e^{3100} siinä yhteydessä, että kun Harald Helfgott vuonna 2013 todisti ternäärisen Goldbachin konjektuurin, niin ennen hänen todistustaan oli jo Vinogradov vuonna 1937 todistanut konjektuurin riittävän suurille luvuille ja vuonna 2002 Liu ja Wang osoittaneet, että riittävän suuri on suurempi kuin e^{3100}. Valtava luku, paljon suurempi kuin googol, mutta ei lähelläkään googolplexiä.

Olen päässyt ohimennen tekemään tuttavuutta googolplexiä reilusti suuremman luvun kanssa transkendenttilukuteorian puolella. Siellä vastaan tuli e^{950}. Tässä kohtaa voi todeta, että eipä tuo vielä kovin suuri ole, googolin joku pieni potenssi vain. Juju onkin siinä, että tämä oli erään luvun toinen logaritmi. Khassa ja Srinivasan nimittäin määrittivät Mahlerin transkendenttimittatodistuksessa eräälle vakiolle tarkan arvon. Khassan ja Srinivasanin todistus oli voimassa vasta, kun tarkasteltiin sellaista polynomijoukkoa, jossa kerrointen itseisarvo oli rajoitettu parametrilla H, jolle piti olla voimassa esimerkiksi $\log\log H > e^{950}$. Koska $e^{950} > 10^{412}$ ja $e > 10^{1/3}$, voidaan tehdä helppo arvio $\log H > 10^{411}$, jolloin $H > e^{10^{411}} > 10^{10^{410}}$. Tämä luku on valtavasti suurempi kuin googolplex.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen