Opas arkipäivän integrointiin

Eeva Pyrhönen

27.8.2021

Saatteeksi

Tämä materiaali sisältää runsaasti harjoitustehtäviä erilaisten integraalilaskentaan liittyvien tehtävätyyppien harjoittelemiseksi. Tehtävät tehtyään opiskelija osaa löytää vaativampienkin lausekkeiden antiderivaatat käsin laskien sekä antaa arvioita lausekkeen integraalista, kun antiderivaattaa ei voida määrittää. Lisäksi esitellään tarkemmin muutamia integraalilaskentaan liittyviä numeerisia menetelmiä, jotka eivät kuulu Helsingin yliopiston Integraalilaskennan kurssin tämänhetkiseen sisältöön. Materiaalia käyttävän opiskelijan toivotaan tutustuneen tai tutustuvan samanaikaisesti Helsingin yliopistossa käytössä olevaan analyysin oppikirjaan *Analyysiä reaaliluvuilla.*

-Tekijä

Sisällys

1. Integroimistekniikoita

1.1. Integrointi, antiderivaatta ja yksinkertaiset sijoitukset

Antiderivaatat integraalilaskennassa

Tässä osassa keskitymme etsimään integraaleja perinteisten derivaattojen avulla. Taulukoiden 1 ja 2 antiderivaatoista on hyötyä tehtävissä; todistathan ne esimerkin 1 tapaan ennen kuin käytät niitä perusteluina tehtävissä!

Taulukko 1: Antiderivaattoja

lauseke	antiderivaatta
$\sec^2 ax\,dx$	$\frac{1}{a}\tan ax + C$
$\csc^2 ax\,dx$	$-\frac{1}{a}\cot ax + C$
$\sec ax \tan ax\,dx$	$\frac{1}{a}\sec ax + C$
$\csc ax \cot ax\,dx$	$-\frac{1}{a}\csc ax + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$\sin^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
$\frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$
$\cosh ax\,dx$	$\frac{1}{a}\sinh ax + C$
$\sinh ax\,dx$	$\frac{1}{a}\cosh ax + C$

Esimerkki 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

Todistus. Todistetaan ensin, että $D\tan^{-1} = \frac{1}{x^2+1}$.
Muistetaan tangentin määritelmä $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
Derivoidaan:

$$D\tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Merkitään $\tan^{-1} x = y \Leftrightarrow \tan y = x$.

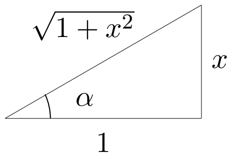
Derivoidaan puolittain, koska y on x:n funktio:

$$
\begin{aligned}
D\tan y &= Dx \\
\frac{1}{\cos^2 y}\cdot y' &= 1 \\
y' &= \cos^2 y
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$D\tan^{-1} x = \cos^2(\tan^{-1} x)$$

Tätä tulosta voidaan yksinkertaistaa geometrialla. Olkoon $\tan^{-1} x = \alpha$, jonka vastainen kateetti on pituudeltaan x ja viereinen 1. Hypotenuusaksi saadaan tällöin $\sqrt{1+x^2}$.



Kuva 1: Kolmion sivut ja kulma α.

Näin ollen:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ja

$$\cos^2\alpha = \cos^2(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Tulos pätee vastaavasti, kun viereinen kateetti on erisuurta kuin 1. Tällöin viereisen kateetin pituus on a, eli $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \alpha$. Hypotenuusa on tällöin $\sqrt{a^2+x^2}$. Tällöin:

$$\cos\alpha = \frac{a}{a\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ja

$$\cos^2\alpha = \cos^2(\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)) = \frac{1}{a^2+x^2}$$

$\square$

Sijoitusmenetelmän perusteet

Sijoitusmenetelmä perustuu integraalilaskennassa derivaatan ketjusääntöön. Kertauksena se tässä käytännönläheisesti:

1. Valitse integroitavasta lausekkeesta jokin osalauseke, jota merkitset apumuuttujalla, esim. u:lla

2. Derivoi tämä osalauseke x:n suhteen. Sijoita nyt apumuuttuja alkuperäiseen lausekkeeseen ja korvaa dx du:lla.
3. Nyt lausekkeen tulisi näyttää helpommalta. Integroi se antiderivaattojen avulla.
4. Kun kaikki on integroitu, sijoita alkuperäinen osalauseke apumuuttujan paikalle.

Joskus sijoituksia joutuu tekemään useamman, mutta silloin toimitaan samojen periaatteiden mukaisesti.

Esimerkki 2. *Yksinkertainen esimerkki sijoitusmenetelmästä. Integroitava lauseke:*

$$\int (3x-5)^{12}\,dx$$

1. *Valitaan* $u = 3x - 5$.
2. *Derivoidaan puolittain:*

   $$du = 3\,dx$$

   Korvataan dx du*:lla, jolloin lauseke näyttää tältä:*

   $$\int \frac{1}{3}u^{12}\,du$$

3. *Lauseke on nyt polynomimuodossa, joten se on helppoa integroida:*

   $$\int \frac{1}{3}u^{12}\,du = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{13}\right)u^{13} = \left(\frac{1}{39}\right)u^{13}$$

4. *Sijoitetaan nyt alkuperäinen osalauseke* u*:n paikalle:*

   $$\left(\frac{1}{39}\right)u^{13} = \left(\frac{1}{39}\right)(3x-5)^{13}$$

Ohjeita lausekkeiden muokkaamiseen

Tehtävissä voi tulla vastaan tilanteita, joissa lausekkeen muokkaaminen helpottaa integrointia huomattavasti. Seuraavia keinoja kannattaa ainakin kokeilla:

1. Kosini- ja sinilausekkeissa kaksinkertaisten kulmien kaavat ovat hyödyllisiä:

   $$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
   $$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

2. Seuraavat trigonometriset identiteetit voivat olla avuksi:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

   Molemmat ovat johdettavissa trigonometrian peruskaavasta

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

3. Käytä algebrallisia menetelmiä laajasti ja luovasti; kerro auki sulkuja, ryhmittele ja erottele termejä omiksi lausekkeikseen. Sijoitusmenetelmässä on oleellista löytää sopiva apumuuttuja, ja sen löytämisessä lausekkeen muokkaaminen on monessa tapauksessa hyödyllistä.

Taulukko 2: Trigonometristen lausekkeiden integraaleja

lauseke	antiderivaatta
$\tan x\,dx$	$\ln\lvert\sec x\rvert + C$
$\cot x\,dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C = -\ln\lvert\csc x\rvert + C$
$\sec x\,dx$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\csc x\,dx$	$-\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + C = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$

Tehtävät

1. Etsi lausekkeiden antiderivaatat:
   1.1. $\sec^2 ax\,dx$
   1.2. $\csc^2 ax\,dx$
   1.3. $\sec ax \tan ax\,dx$
   1.4. $\csc ax \cot ax\,dx$
   1.5. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
   1.6. $\cosh ax\,dx$
   1.7. $\sinh ax\,dx$
   1.8. $\tan x\,dx$
   1.9. $\cot x\,dx$
   1.10. $\sec x\,dx$
   1.11. $\csc x\,dx$

2. Etsi tässä ja seuraavissa tehtävissä määräämätön integraali.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

[1]

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

[2]

4.

$$\int \frac{x\,dx}{(4x^2+1)^5}$$

[1]

5.

$$\int x\,e^{x^2}\,dx$$

[1]

6.

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$$

[1]

7.

$$\int \frac{\ln t}{t}\,dx$$

[1]

8.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

[2]

9.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x}}$$

[1]

10.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$$

[1]

11.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

[1]

12.

$$\int \frac{x^3+1}{x^3}\,dx$$

[2]

13.

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,dx$$

[1]

14.

$$\int \sqrt{1-x}\,x^2\,dx$$

[2]

---

[1] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 317-324. [1]

[2] E. Mendelson: *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw-Hill, 1988, p. 142-151. [5]

15.
$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

1

16.
$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

1

17.
$$\int (3x^2 + 2)^{1/4}\, dx$$

2

18.
$$\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2 + 1)^{49}\, dx$$

2

19.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$$

1

20.
$$\int (x^4 + 1)^{1/3} x^7\, dx$$

2

21.
$$\int x\sqrt{ax + b}\, dx$$

2

22.
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}}\, dx$$

23. Etsi seuraavat trigonometriset integraalit.
$$\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x}\, dx$$

1

24.
$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$$

1

25.
$$\int \frac{1}{\sec x}\, dx$$

2

26.
$$\int \tan^2 x\, dx$$

2

27.
$$\int \tan x \ln \cos x\, dx$$

1

28.
$$\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$$

1

29.
$$\int \sin^4 t \cos^4 t\, dt$$

1

30.
$$\int \sin ax \cos^2 ax\, dx$$

1

31.
$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$$

1

32.
$$\int \sin^6 x\, dx$$

1

33.
$$\int \cos^4\, dx$$

1

34.
$$\int \sec^5 x \, dx$$
1

35.
$$\int \sec^6 x \tan^2 x \, dx$$
1

36.
$$\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx$$
1

37.
$$\int \sin^{-2/3} x \cos^3 x \, dx$$
1

38.
$$\int \cos x \sin^4(\sin x) \, dx$$
1

39.
$$\int \frac{\sin^3 \ln x \cos^3 \ln x}{x} \, dx$$
1

40.
$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$$
2

41.
$$\int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$$
2

42.
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$$
1

43.
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx$$
1

44.
$$\int \csc^5 x \cot^5 x \, dx$$
1

45.
$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} \, dx$$
1

1.2. Osittaisintegrointi

Tulon derivaatta ja osittaisintegrointi

Osittaisintegrointi perustuu tulon derivaattaan:

$$\begin{aligned}
Df(x)g(x) &= f(x)Dg(x) + g(x)Df(x) \\
f(x)Dg(x) &= Df(x)g(x) - g(x)Df(x) \\
\int f(x)Dg(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)Df(x)\,dx \\
\int F(x)g(x)\,dx &= F(x)G(x) - \int G(x)f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Käytännössä tämä tarkoittaa seuraavaa algoritmia:

1. Valitse $F(x)$, jonka derivaatta on mahdollisimman yksinkertainen ja $g(x)$, jonka integraali on puolestaan mahdollisimman yksinkertainen.

2. Integroi ja derivoi funktiot ja sijoita ne yllä mainittuun kaavaan.

3. Nyt lausekkeen $\int G(x)f(x)\,dx$ tulisi olla helpompi integroida. Tarvittaessa palaa alkuun toistaaksesi kohdat 1. ja 2. uuden lausekkeen kohdalla. Mikäli integroiminen on kuitenkin mahdollista, etsi lausekkeelle suoraan antiderivaatta.

Miten funktiot tulisi valita?

Erityisesti englanninkielisissä oppikirjoissa mainitaan usein akronyymi LIATE tai ILATE. Sanat lyhenteen takana on avattu taulukossa 3, mutta kirjaimet kuvaavat alkeisfunktiotyyppien järjestystä, jonka mukaan $F(x)$ ja $g(x)$ kannattaa valita. Jokaisen lausekkeen kohdalla tarkastellaan, mitkä kaksi funktiota lausekkeesta on mahdollista erottaa, jonka jälkeen tarkistetaan niiden keskinäinen järjestys LIATE-akronyymissä. Ensimmäinen valitaan derivoitavaksi funktioksi $F(x)$ ja järjestyksessä jäljempänä oleva integroitavaksi funktioksi $g(x)$ On hyvä huomata, että tämä sääntö on vain perusperiaate, johon on olemassa poikkeuksia (katso esimerkki 3).

Taulukko 3: LIATE-sääntö

Kirjain	selitys
L	logaritminen
I	arkusfunktio (inverse trigonometric)
A	algebrallinen
T	trigonometrinen
E	eksponenttifunktio

Esimerkki 3. *Etsi seuraavan lausekkeen määräämätön integraali osittaisintegroinnin avulla. Huomaa, että perinteinen LIATE-sääntö ei toimi tässä.*

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

Ratkaisu. Parhaiten tilanteeseen sopivat seuraavat funktiot:

$$F(x) = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = xe^x + e^x$$
$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = -\frac{1}{x+1}$$

Sijoitetaan funktiot lausekkeeseen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx &= -\frac{xe^x}{x+1} - \int -\frac{xe^x + e^x}{x+1}\,dx \\
&= -\frac{xe^x}{x+1} + \int \frac{e^x(x+1)}{x+1}\,dx \\
&= -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x\,dx \\
&= -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C \\
&= \frac{e^x(x+1) - xe^x}{x+1} + C \\
&= \frac{e^x}{x+1} + C
\end{aligned}$$

Integroiminen taulukon avulla

Joissakin tapauksissa osittaisintegrointia joudutaan toistamaan useita kertoja yksittäisen lausekkeen kohdalla. Tällaisia tilanteita varten hyödyllinen työkalu on ”taulukkointegrointi”(eng. *tabular integration*). Esitellään menetelmä kahden Horowitzin[3] artikkelissa esiintyvän esimerkin kautta.

Esimerkki 4. *Etsi seuraavan lausekkeen määräämätön integraali:*

$$\int x^2 \sin x\,dx$$

3

Ratkaisu. Tehdään taulukko, johon listataan allekkain derivaattoja ja integraaleja osittaisintegroinnin merkit huomioiden: Yhdistetään samalla värillä merkityt termit:

järj.no	merkki	f(x)	G(x)
0	+	x^2	$\sin x$
1	-	$2x$	$-\cos x$
2	+	2	$-\sin x$
3	-	0	$\cos x$

[3] D. Horowitz: *Tabular Integration by Parts*, The College Mathematics Journal, Vol. 21, No. 4. (Sep., 1990), p. 307-311. [4]

$$\int x^2 \sin x \, dx = +x^2(-\cos x) - 2x(-\sin x) + 2\cos x - \int -(0)\cos x \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

Toisaalta taulukkointegrointi sopii myös algebrallisempiinkin tilanteisiin, kuten huomataan seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 5. *Etsi seuraavan lausekkeen määräämätön integraali.*

$$\int \frac{12x^2 + 36}{\sqrt[5]{3tx + 2}} \, dx$$

3

Ratkaisu. Tehdään edellisen esimerkin tapaan taulukko. Yhdistetään termit:

järj.no	merkki	f(x)	G(x)
0	+	$12x^2 + 36$	$(3x + 2)^{1/5}$
1	-	$24x$	$\frac{5}{12}(3x + 2)^{4/5}$
2	+	24	$\frac{25}{324}(3x + 2)^{9/5}$
3	-	0	$\frac{125}{13600}(3x + 2)^{14/5}$

$$\int \frac{12x^2 + 36}{\sqrt[5]{3tx + 2}} \, dx = (5x^2 + 15)(3x + 2)^{4/5} - \frac{50x}{27}(3x + 2)^{9/5} + \frac{125}{567}(3x + 2)^{14/5} + C$$

Integraalin ratkaiseminen yhtälön avulla

Joskus osittaisintegroinnissa alkaa näyttää siltä, että prosessi toistaa itseään eikä ratkaisua saavuteta tällä menetelmällä. Näin ei kuitenkaan aina ole. Erityisesti trigonometristen funktioiden kohdalla on hyvä tarkistaa, onko osittaisintegraalilausekkeessa vastakkaismerkkistä alkuperäistä lauseketta, jolloin ratkaisu on mukavan helppo. Tarkastellaan taas valaisevaa esimerkkiä.

Esimerkki 6. [4] *Etsi seuraavan lausekkeen määräämätön integraali.*

$$\int \sec^3 x \, dx$$

Ratkaisu. Valitaan $F(x)$ ja $g(x)$ seuraavasti:

$$F(x) = \sec x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sec x \tan x \, dx$$
$$g(x) = \sec^2 x \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = \tan x$$

[4] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 334-335.[1]

Sijoitetaan:

$$\begin{aligned}
I = \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

Voidaan nyt siirtää I yhtälön toiselle puolelle, jolloin saadaan:

$$2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

eli

$$I = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

Tämän osion tehtävissä harjoitellaan osittaisintegrointia, mutta aiheeseen liittyen todistetaan myös muutamia reduktiokaavoja.

Tehtävät

Etsi määräämätön integraali.

1. $$\int x^2 \cos \pi x \, dx$$
[5]

2. $$\int (x^2 - 2x) e^k x \, dx$$
[5]

3. $$\int x^3 \ln x \, dx$$
[5]

4. $$\int \sin^{-1} x \, dx$$
[6]

5. $$\int e^x \sin x \, dx$$
[6]

6. $$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$$
Vihje: säilytä I mukana.[6]

7. $$\int x (\ln x)^3 \, dx$$
[5]

8. $$\int \tan^{-1} x \, dx$$
[5]

9. $$\int x^2 \tan^{-1} \, dx$$
[6]

10. $$\int x \sin^{-1} x \, dx$$
[5]

11. $$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$
[6]

12. $$\int x^5 e^{-x^2} \, dx$$
[5]

13. $$\int \tan^2 x \sec x \, dx$$
[5]

14. $$\int e^{2x} \sin 3x \, dx$$
[5]

15. $$\int x e^{\sqrt{x}} \, dx$$
[5]

16. $$\int \ln(x^2 + 1) \, dx$$
[6]

17. $$\int x \sec^2 x \, dx$$
[5]

[5] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 332-338. [1]

[6] E. Mendelson: *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw-Hill, 1988, p. 232-237. [5]

18.
$$\int x\sin^2 x\,dx$$
5

19.
$$\int \cos(\ln x)\,dx$$
5

20.
$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$$
5

21.
$$\int x^5(\ln x)^2\,dx$$
6

22.
$$\int x(ax+b)^2\,dx$$
6

23.
$$\int \cos^{-1} x\,dx$$
5

24.
$$\int x\sec^{-1} x\,dx$$
5

25.
$$\int (\sin^{-1} x)^2\,dx$$
5

26.
$$\int x(\tan^{-1} x)^2\,dx$$
5

27.
$$\int xe^x\cos x\,dx$$
5

28. Etsi seuraaville lausekkeille reduktiokaavat:

a)
$$I_n = \int x^n e^x\,dx$$
5

b)
$$I_n = \int (\ln x)^n\,dx$$
5

c)
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$
5

d)
$$I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x\,dx$$
5

e)
$$I_n = \int \sin^n x\,dx$$
5

f)
$$I_n = \int \sec^n x\,dx$$
5

29. Wallisin kaavat. Seuraavassa tehtävässä todistetaan englantilaisen 1600-luvulla eläneen matemaatikon John Wallisin johtama kaava piin likiarvolle. Olkoon $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$[5]

a) Käytä tietoa $0 \le \cos x \le 1$ kun $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ osoittaaksesi seuraavan:
$$I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$$
kun $n = 0, 1, 2, ...$

b) Käytä reduktiokaavaa $I_n = ((n-1)/n)I_{n-2}$ (tehtävä 28(c) ja (a)-kohdan tulosta osoittaaksesi seuraavan:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

c) Käytä (b)-kohdan tulosta ja reduktiokaavaa osoittaaksesi, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

1.3. Rationaalifunktion integrointi ja osamurtokehitelmä

Jakokulma rationaalifunktioiden muokkaamisen apuna

Integraalilaskennassa pyritään algebrallisten lausekkeiden kohdalla yleensä mahdollisimman lähelle polynomimuotoa niin, että rationaalilausekkeita olisi mahdollisimman vähän. Yksinkertainen keino tähän on perinteinen jakokulma: kerrataan sen käyttö funktioiden muokkaamisessa esimerkin kautta.

Esimerkki 7. [7] *Etsi määräämätön integraali seuraavalle lausekkeelle:*

$$\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx$$

Ratkaisu. Käytetään jakokulmaa:

$$\begin{array}{r|llll}
 & x+3 & & & \\ \hline
x^2+1 & x^3 & +3x^2 & & \\
 & x^3 & & +x & \\ \hline
 & & 3x^2 & -x & \\
 & & 3x^2 & & +\ 3 \\ \hline
 & & & -x & -\ 3
\end{array}$$

Voidaan näin ollen muokata lauseketta:

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{x + 3}{x^2 + 1} = x + 3 - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{3}{x^2 + 1}$$

Integroidaan:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1}\, dx &= \int (x + 3)\, dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 3x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1} x + C
\end{aligned}$$

Jakokulman käyttö vaatii kuitenkin sen, että osoittajassa olevan polynomin asteen on oltava suurempi kuin nimittäjässä olevan polynomin. Päinvastaista tilannetta varten voidaan hyödyntää *osamurtokehitelmää*.

Osamurtokehitelmä

Osamurtokehitelmä perustuu rationaalilausekkeen nimittäjän jakamiseen tekijöihin, jonka avulla voidaan esittää lauseke summamuodossa. Toisinaan tekijöihin voidaan jakaa monella tavalla, joista esimerkiksi vain yhden avulla voidaan muodostaa lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on yksikäsitteinen ratkaisu. Siksi osamurtokehitelmän etsiminen voi vaatia useamman yrityksen.

Osamurtokehitelmän etsimisen ja sen avulla integroinnin algoritmi on seuraavanlainen:

[7] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 339 [1]

1. Olkoon lauseke muotoa $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ja lausekkeen $Q(x)$ eräät tekijät $q_1, q_2, ..., q_n$. Tällöin
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + ... + \frac{a_n}{q_n},$$
jossa $a_1, a_2, ..., a_n$ ovat vakioita.

2. Muodostetaan lineaarinen yhtälöryhmä. Seuraavan tulee päteä:
$$P(x) = a_1 \cdot (q_2 \cdot ... \cdot q_n) + a_2(q_1 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_n) + ... + a_n(q_1 \cdot ... \cdot q_{n-1})$$
Kerrotaan sulut auki ja ryhmitellään termit asteen mukaan niin, että kertoimina ovat vakioiden $a_1, ..., a_n$ summalausekkeet. Ratkaistaan vakiot polynomin $P(x)$ avulla. Mikäli ratkaisu ei ole yksikäsitteinen tai sitä ei ole, valitaan tekijät toisella tavalla.

3. Lopuksi integroidaan lauseke muodossa
$$\int \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + ... + \frac{a_n}{q_n}\, dx.$$

Esitellään menetelmä vielä esimerkin kautta.

Esimerkki 8. *Etsi seuraavalle lausekkeelle määräämätön integraali:*
$$\int \frac{7x^2 + 10x + 2}{x^3 + 2x^2 - 1}\, dx$$

Ratkaisu. Jaetaan nimittäjä tekijöihin:
$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 1)(x^2 + x - 1)$$
Merkitään vakioita kirjaimilla A ja B ja lavennetaan samannimisiksi:
$$\frac{A}{x+1} + \frac{B(2x+1)}{x^2 + x - 1} = \frac{A(x^2 + x - 1) + B(2x + 1)(x + 1)}{x^3 + 2x^2 - 1}$$
Kerrotaan auki ja ryhmitellään:
$$\begin{aligned} &= \frac{Ax^2 + Ax - A + 2Bx^2 + 2Bx + Bx + B}{x^3 + 2x^2 - 1} \\ &= \frac{(A + 2B)x^2 + (A + 3B)x + (B - A)}{x^3 + 2x^2 - 1} \end{aligned}$$

Saadaan yhtälöpari:
$$\begin{cases} \text{A} + 2\text{B} = 7 \\ \text{A} + 3\text{B} = 10 \end{cases}$$
Ratkaisuksi saadaan $A = 1$ ja $B = 3$, jotka toteuttavat myös yhtälön $B - A = 2$. Integroidaan lopuksi summalauseke:
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1} + \frac{3(2x+1)}{x^2 + x - 1}\, dx &= \int \frac{1}{x+1}\, dx + 3 \int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\, dx \\ &= \ln|x + 1| + 3\ln|x^2 + x - 1| + C \end{aligned}$$

Tehtävät

Etsi seuraavien rationaalifunktioiden määräämättömät integraalit.

1. $$\int \frac{x^2}{x-4}\,dx$$ [8]

2. $$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$$ [8]

3. $$\int \frac{dx}{b^2-a^2x^2}\,dx$$ [8]

4. $$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx$$ [8]

5. $$\int \frac{dx}{1-6x+9x^2}\,dx$$ [8]

6. $$\int \frac{x\,dx}{2+6x+9x^2}$$ [8]

7. $$\int \frac{x^2+1}{6x-9x^2}\,dx$$ [8]

8. $$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}\,dx$$ [9]

9. $$\int \frac{2x^2+1}{x^3-6x^2+5x-6}\,dx$$ [8]

10. $$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx$$ [8]

11. $$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)}$$ [8]

12. $$\int \frac{x^3}{x^3-a^3}\,dx$$ [8]

13. $$\int \frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$$ [9]

14. $$\int \frac{x\,dx}{x^4-13x^2+36}$$ [9]

15. $$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$$ [8]

16. $$\int \frac{dx}{x^3-4x^2+3x}$$ [8]

[8] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 338-346. [1]
[9] E. Mendelson: *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw-Hill, 1988, p. 245-252. [5]

17.
$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,dx$$
8

18.
$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$
8

19.
$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$$
8

20.
$$\int \frac{dx}{x^4-3x^2}$$
8

21.
$$\int \frac{x-5}{x^2(x-1)}\,dx$$
9

22.
$$\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+9x}\,dx$$
9

23.
$$\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-7x-4}\,dx$$
9

24.
$$\int \frac{x-1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$
9

25.
$$\int \frac{dt}{(t-1)(t^2-1)^2}$$
8

26.
$$\int \frac{dx}{e^2x-4e^x+4}$$
8

27.
$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
8

1.4. Trigonometriset sijoitukset

Hankaliin lausekkeisiin sovellettava erittäin monikäyttöinen integroimistekniikka on trigonometrinen sijoitus. Sen teho perustuu trigonometrisiin identiteetteihin ja trigonometristen funktioiden keskinäisiin riippuvuussuhteisiin derivaattojensa ja integraaliensa suhteen.

Perusperiaate

Yleisesti sijoitus toimii seuraavalla tavalla:

1. Olkoon integraali muotoa $\int f(x)\,dx$. Sijoitetaan x:n paikalle jokin trigonometrinen $g(u)$, jolle pätee parhaassa tapauksessa

$$\int f'(g(u))g'(u)\,du$$

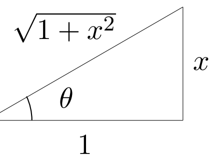
2. Integroidaan uusi lauseke. Saadaan
$$\int f'(g(u))g'(u)\,du = f(g(u)) + C.$$
3. Ratkaistaan tämän jälkeen u x:n suhteen, jolloin u on jokin trigonometrinen arkusfunktio muuttujanaan x.
4. Yksinkertaistetaan vastausta trigonometrian avulla.

Esimerkki 9. *Etsi seuraavan lausekkeen määräämätön integraali trigonometrisen sijoituksen avulla:*
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ratkaisu. Valitaan $x = \tan^2\theta$. Tällöin $dx = \sec^2\theta$. Sijoitetaan:
$$\int \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta$$
Hyödynnetään trigonometrista identiteettiä $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$:
$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta &= \int \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta \\ &= \int \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \\ &= \int \tan\theta\sec\theta\,d\theta \\ &= \sec\theta + C\end{aligned}$$

Ratkaistaan θ x:n suhteen:
$$x = \tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}x$$
Sijoitetaan ratkaisuun θ:
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sec(\tan^{-1}x)$$
Voidaan yksinkertaistaa vastausta trigonometrian avulla. Olkoon x suorakulmaisen kolmion kulman θ vastainen sivu ja viereinen sivu 1. Tällöin hypotenuusa on muotoa $\sqrt{x^2+1}$.

Tällöin sekantti θ:lle on muotoa
$$\sec\theta = \sec(\tan^{-1}x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1}$$
jolloin lopullinen vastaus on
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{x^2+1} + C$$
Huomaa, että integraalin voisi ratkaista helposti myös ilman trigonometrista sijoitusta.



Kuva 2: Kolmion sivut ja kulma θ.

Kolme perustapausta

On hyödyllistä tunnistaa lausekkeet, joissa jokin sijoitus toimii parhaiten. Näitä perustapauksia on kolme.

1. Arkussini. Lausekkeiden, jotka sisältävät tekijän $\sqrt{a^2 - x^2}, (a > 0)$ integroinnissa kannattaa hyödyntää sijoitusta $x = a \sin\theta$. Huomaa, että tulee päteä myös $-a \leq x \leq a$. Tekijä muuntuu tällöin muotoon $a\cos\theta$.

2. Arkustangentti. Lausekkeiden, jotka sisältävät tekijän $\sqrt{a^2 + x^2}, (a > 0)$ tai $\frac{1}{a^2+x^2}, (a > 0)$ integroinnissa kannattaa hyödyntää sijoitusta $x = a \tan\theta$. Nyt x voi saada mitä tahansa reaaliarvoja. Tekijä muuntuu muotoon $\sec^2\theta$ tai $\sec\theta$.

3. Arkussekantti. Lausekkeiden, jotka sisältävät tekijän $\sqrt{x^2 - a^2}, (a > 0)$, integroinnissa kannattaa hyödyntää sijoitusta $x = a\sec\theta$. Huomaa, että nyt x:n määrittelyssä on oltava tarkempi. Jomman kumman seuraavista tulee päteä:
   a) Jos $x \geq a$, niin $0 \leq \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \cos^{-1}\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}$ ja $\tan\theta \geq 0$.
   b) Jos $x \leq -a$, niin $\frac{\pi}{2} <= \sec^{-1}\frac{x}{a} = \cos^{-1}\frac{a}{x} \leq \pi$ ja $\tan\theta \leq 0$.

   Tekijä muuntuu muotoon $a\tan\theta$ tai $-a\tan\theta$.

Muita tavanomaisia sijoituksia

1. Hyperboliset funktiot. Hyperbolisille sinille ja kosinille pätee $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$. Tällöin sijoitusta $x = a\cosh\theta$ voidaan käyttää arkussekantin ja sijoitusta $x = a\sinh\theta$ arkustangentin tapauksissa.

2. Weierstrass-sijoitus. Joidenkin rationaalilausekkeiden, jotka sisältävät trigonometrisia funktioita, kohdalla voidaan käyttää Weierstrassin sijoitusta. Kun $x = \tan\frac{\theta}{2}$, niin tällöin

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2}\\ \sin\theta &= \frac{2x}{1+x^2}\\ d\theta &= \frac{2\,dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

3. Korkeampien potenssien hyödyntäminen. Tapauksissa, joissa lausekkeessa esiintyy tekijänä $\sqrt[n]{ax+b}$-tyyppinen lauseke, voidaan tehdä sijoitus $ax+b=u^n$, jolloin $a\,dx = nu^{n-1}\,du$.

4. Neliöksi täydentäminen. Kun integraali sisältää ax^2+bx+c-tyyppisen toisen asteen polynomin, kannattaa hyödyntää neliöksi täydentämistä. Yleisesti:

$$x^2+bx+c = \left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)+\left(c-\frac{b^2}{4}\right) = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)$$

Jos $a \neq 1$, otetaan a yhteiseksi tekijäksi ja edetään vastaavasti.

Tehtävät

Etsi seuraavissa tehtävissä lausekkeille määräämättömät integraalit.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$ [10]

2. $$\int \frac{x^2}{1-4x^2}\,dx$$ [10]

3. $$\int \frac{x^2}{9-x^2}\,dx$$ [10]

4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^2}}$$ [10]

5. $$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$ [11]

6. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$ [10]

7. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$ [10]

8. $$\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$ [10]

9. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3}}$$ [10]

10. $$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$ [10]

[10] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 347-354. [1]
[11] E. Mendelson: *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw-Hill, 1988, p. 238-244. [5]

11.

$$\int \frac{x^3}{9+x^2}\,dx$$

10

12.

$$\int \frac{5+x^2}{x^4}\,dx$$

10

13.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{16-9x^2}}$$

11

14.

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$$

10

15.

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

10

16.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \quad (x>0)$$

10

17.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} \quad (x>a>0)$$

10

18.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

11

19.

$$\int \frac{dx}{16-9x^2}$$

11

20.

$$\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$$

11

21.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

10

22.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

10

23.

$$\int \frac{x\,dx}{(3-2x-x^2)^{3/2}}$$

10

24.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

10

25.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

10

26.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

10

27.

$$\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}$$

11

28.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx$$

10

29.

$$\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{5/2}}\,dx$$

11

30.
$$\int \frac{dx}{x^{1/3}}$$
10

31.
$$\int \frac{dx}{(4x - x^2)^{3/2}}$$
11

32.
$$\int \frac{1 + x^{1/2}}{1 + x^{1/3}}\, dx$$
10

33.
$$\int \frac{x\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
10

34.
$$\int \frac{x\, dx}{(t + 1)(t^2 + 1)^2}$$
10

35.
$$\int \frac{dx}{x(3 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$
10

36.
$$\int \frac{dx}{x(1 + x)^{3/2}}$$
10

37.
$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)^{3/2}}$$
10

38.
$$\int \frac{dx}{x(1 - x^2)^{3/2}}$$
10

39.
$$\int \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}$$
10

40.
$$\int \frac{dx}{1 - \sin x}$$
11

41.
$$\int \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta}$$
10

2. Epäoleellisen integraalin suppeneminen

Tässä materiaalissa ei toistaiseksi ole käsitelty määrättyjä integraaleja sen vuoksi, että perusmuodossaan niiden laskeminen on suhteellisen mekaanista ja nopeasti opittavissa. Epäoleellisten integraalien kohdalla on kuitenkin tärkeää oppia tunnistamaan ja perustelemaan niiden suppeneminen tai vastaavasti hajaantuminen. Ennen kuin luet eteenpäin, kertaa epäoleellisen integraalin käsite jostakin analyysin oppikirjasta.

2.1. Kun lausekkeelle ei löydetä antiderivaattaa

Toisinaan eteen tulee tilanteita, joissa tulisi ottaa kantaa epäoleellisen integraalin suppenevuuteen, mutta joko lausekkeelle ei ole olemassa integraalilauseketta tai sitä ei voida määrittää ensimmäisen vuoden analyysin kurssien tiedoilla. Tällöin voidaan kuitenkin hyödyntää muita keinoja, erityisesti jos funktio on **ei-negatiivinen**.

Minoranttiperiaate

Tätä menetelmää käytetään, kun halutaan osoittaa epäoleellisen integraalin hajaantuvan. Olkoon epäoleellinen integraali muotoa $\int_a^b f(x)\,dx$, $f : (a,b) \to [0,\infty)$ ja olkoon $g(x) < f(x)$ välillä (a,b) ja $\int_a^b g(x)\,dx = \infty$. Tällöin pätee

$$\int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx$$

josta seuraa

$$\infty < \int_a^b f(x)\,dx$$

eli

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty.$$

Siis kun tiedetään jonkin funktion olevan tietyllä välillä pienempää kuin itse arvioitavan funktion, voidaan sitä käyttää arvioitavan funktion hajaantumisen osoittamiseen. Tämä tietysti edellyttää, että minoranttifunktioksi valittavalle funktiolle on johdettavissa integraalilauseke, ja että sekä $f(x)$ että $g(x)$ ovat molemmat integroituvia.

Majoranttiperiaate

Tämä menetelmä on vastaava kuin minoranttimenetelmä, mutta asetelma on päinvastainen. Olkoon epäoleellinen integraali muotoa $\int_a^b f(x)\,dx$ ja olkoon $f(x) < g(x)$ välillä (a,b) ja $\int_a^b g(x)\,dx = A, A \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

josta seuraa

$$\int_a^b f(x)\,dx < A$$

eli epäoleellinen integraali on äärellinen. Jälleen molempien funktioiden on oltava integroituvia annetulla välillä.

Esimerkki 10. *Tutki, suppeneeko vai hajaantuunko epäoleellinen integraali*

$$\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$$

ja osoita väitteesi.

Todistus. Muokataan lauseketta siten, että suurennetaan nimittäjää yhdellä ja valitaan tämä minoranttifunktioksi $g(x)$. Saadaan:

$$\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx < \int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \tag{1}$$

Tutkitaan nyt funktion $g(x)$ epäoleellista integraalia:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx &= \int_2^\infty \frac{x}{x^{3/2}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \\
&= \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \\
&= \Big/_{2}^{\infty} 2\sqrt{x} + \Big/_{2}^{\infty} \frac{-1}{2\sqrt{2}}\,dx = \infty
\end{aligned}$$

Eli kun epäyhtälö (1) pätee, minoranttiperiaatteen nojalla epäoleellinen integraali hajaantuu. □

Englanninkielisissä materiaaleissa sekä majorantti- että minoranttiperiaatteesta käytetään nimitystä *comparison test*. Siihen ei tule kuitenkaan sekoittaa suomen kielessä *vertailutestiksi* nimitettyä testiä integraalin suppenevuudelle.

Vertailutesti

Vertailutesti perustuu raja-arvojen teoriaan. Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ ei-negatiivisia ja integroituvia jokaisella välillä (a, b). Jos on olemassa reaalinen raja-arvo

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee jos ja vain jos epäoleellinen integraali

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

suppenee.

Väliarvolause funktioiden arvioinnissa

Muistutetaan aluksi mieleen eräs väliarvolauseen seuraus. Jatkuvilla ja integroituvilla funktioilla pätee:

$$\inf_{x\in(a,b)} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int f(x)\,dx \leq \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

Tämän ominaisuuden avulla voidaan antaa arvioita esimerkiksi epäoleellisten integraalien lausekkeista. Seuraava esimerkki näyttää, miten.

Esimerkki 11. [12] *Suppeneeko vai hajaantuuko seuraava integraali:*

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\,dx$$

Todista väitteesi.

Todistus. Tarkastellaan osoittajan lauseketta. Voidaan esittää se muodossa

$$e^{\sqrt{x}} - 1 = \Big/_{0}^{\sqrt{x}} e^t\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^t\,dt$$

Pohditaan seuraavaksi, mikä on supremum kyseisessä tilanteessa. Saadaan

$$\sup_{x\in(0,1)} = e^{\sqrt{x}}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x}} e^t\,dt = e^{\sqrt{x}} - 1 < e^{\sqrt{x}} \quad &| : \sqrt{x} - 0 \\ \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} < \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} &< \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

eli integraali suppenee. □

[12] Helsingin yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen Integraalilaskennan tentti 14.6.2017: tehtävä 2.

Tehtävät

Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali seuraavissa tapauksissa? Todista väitteesi.

1. $$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$$ [13]

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$$ [14]

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$$ [14]

4. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$ [13]

5. $$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$$ [13]

6. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$ [13]

7. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$$ [13]

8. $$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx$$ [13]

9. $$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$$ [13]

10. $$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$ [13]

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\,dx$$ [15]

12. $$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$$ [13]

13. $$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x\,dx$$ [13]

14. $$\int_0^\infty \tan^{-1} x\,dx$$ [13]

15. $$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$$ [13]

16. $$\int_0^\infty \frac{dx}{xe^x}$$ [13]

[13] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 360-368. [1]
[14] E. Mendelson: *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw-Hill, 1988, p. 260-267.[5]
[15] Anne-Maria Ernvall-Hytösen tehtäväkokoelma

17.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$$

15

18.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}+\sin x}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

15

19.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+e^{-1})}$$

13

20.

$$\int_8^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

13

21. Arvioi lauseketta:

$$\ln(x+1)-\ln x$$

15

22. Arvioi lauseketta:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} \quad (x>0)$$

15

3. Pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia

Integraalilaskentaa voidaan soveltaa erityisesti pyörähdyskappaleiden tilavuuksien ja vaipan pinta-alojen sekä kuvaajien pituuksien määrittämiseen. Tässä laskukaavat lyhyenä kertauksena tehtäviä varten.

Polun pituus

Jatkuvasti derivoituvan funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kuvaajan pituus on

$$l(f)=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Pyörähdyskappale: tilavuus

Integroituvan funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ muodostaman pyörähdyskappaleen (x-akseli akselinaan) tilavuus on

$$V(f)=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Pyörähdyskappale: vaipan pinta-ala

Integroituvan funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ muodostaman pyörähdyskappaleen (x-akselinaan) vaipan pinta-ala on

$$A(f)=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\sqrt{f'(x)^2}}\,dx$$

Pyörähdysakselina voi olla myös y-akseli, ja silloin funktio ratkaistaan y:n suhteen ja käytetään edellisiä kaavoja.

Tehtävät

Etsi tehtävissä 1-15 kuvaajan pituus annetulla välillä, tehtävissä 16-24 pyörähdyskappaleen tilavuus ja tehtävissä 25-39 pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.

1. Kuvaajien pituuksia:
$$y^2 = (x-1)^3,\ x \in (-1,1)$$
[16]

2. $$y^3 = x^2,\ x \in (-1,1)$$
[16]

3. $$2(x+1)^3 = 3(y-1)^2,\ x \in (-1,0)$$
[16]

4. $$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x},\ x \in (1,4)$$
[16]

5. $$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4y^2},\ x \in (1,3)$$
[17]

6. $$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}\ x \in (1,2)$$
[17]

7. $$8x^2y - 2x^6 = 1\ x \in (1,2)$$
[17]

8. $$12xy - 4y^4 = 3\ x \in \left(\frac{7}{12}, \frac{67}{24}\right)$$
[17]

9. $$(y-3)^2 = 4(x+2)^3\ x \in (-1,2)$$
[17]

10. $$y^3 = 8x^2\ x \in (1,8)$$
[17]

11. $$4y = 2\ln x - x^2,\ x \in (1,e)$$
[16]

12. $$y = x^2 + \frac{\ln x}{8},\ x \in (1,2)$$
[16]

13. $$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,\ x \in (0,a)$$
[16]

14. $$y = x^2\ x \in (0,2)$$
[16]

15. $$y = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\ x \in (2,4)$$
[16]

16. Pyörähdyskappaleiden tilavuuksia. Laske tilavuus annettujen akseleiden ja kuvaajien perusteella.
$$y = 25 - x^2,\ y = 0;\ \text{y-akseli}$$
[18]

[16] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 404-411. [1]
[17] C.H. Edwards and D.E. Penney: *Calculus*, Pearson, 2002, p. 404-405.[3]
[18] C.H. Edwards and D.E. Penney: *Calculus*, Pearson, 2002, p. 393-395

17.

$$x = y,\ x + 2y = 3,\ y = 1;\ \text{x-akseli}$$

18

18.

$$y = 4x - x^3,\ y = 0;\ \text{y-akseli}$$

18

19.

$$y = 4x - x^3,\ y = 0;\ \text{x-akseli}$$

18

20.

$$x = y^3 - y^4,\ x = 0;\ \text{suora } y = -2$$

18

21.

$$x = x - x^3,\ y = 0,\ x \in (0,1);\ \text{suora } x = 2$$

18

22. Johda ellipsoidin tilavuuden kaava, kun pätee

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\ a, b > 0$$

19

23. Johda toruksen tilavuuden kaava, kun sisärenkaan halkaisija on $R - r$, toruksen renkaan halkaisija on r ja koko toruksen halkaisija on R.[19]

24. Johda viinilasin tilavuus, kun sen sisäpinta muodostuu funktion $f(x) = e^x$ muotoisesta pyörähdyskappaleesta y-akselin ympäri. Voit olettaa, että $x \in (0, 1)$.

25. Vaipan pinta-aloja. Laske seuraavien pyörähdyskappaleiden vaipan pinta-alat.

$$y = x^2,\ x \in (0,2);\ \text{y-akseli}$$

16

26.

$$y = x^3,\ x \in (0,1);\ \text{x-akseli}$$

16

27.

$$y = x^{3/2},\ x \in (0,1);\ \text{x-akseli}$$

16

28.

$$y = \sin x,\ x \in (0,\pi);\ \text{x-akseli}$$

16

29.

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x},\ x \in (1,4);\ \text{x-akseli}$$

16

30.

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x},\ x \in (1,4);\ \text{y-akseli}$$

16

31.

$$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2},\ x \in (1,2); \text{x-akseli}$$

18

32.

$$y^3 = 3x,\ x \in (0,9);\ \text{y-akseli}$$

18

[19] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 391-399.

33.

$$y = \frac{2}{3}x^{2/3},\ x \in (1,2);\ \text{y-akseli}$$

[18]

34.

$$y = (2x - x^2)^{1/2},\ x \in (0,2);\ \text{x-akseli}$$

[18]

35. Johda ellipsin vaipan pinta-ala tehtävän 22 tiedoilla.

36. Johda toruksen vaipan pinta-ala.

37. Hyrrä on kuvaajan

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

määräämä pyörähdyskappale. Määritä hyrrän vaipan pinta-ala.[18]

38. Eräs pisara on kuvaajan

$$32y^2 = x^2(4 - x^2)$$

määräämä pyörähdyskappale x-akselin ympäri. Määritä pisaran tilavuus ja vaipan pinta-ala.[18]

39. Laske tehtävän 24 viinilasin sisäpinnan pinta-ala.

4. Pieni johdatus numeeriseen integrointiin

Tähän mennessä materiaali on käsitellyt pelkästään analyyttistä integrointia. Matemaatikon on kuitenkin hyvä tuntea myös menetelmiä, joilla integraaleja voi approksimoida numeerisesti silloin, kun integraalilauseketta ei voida määrittää. Numeerisessa integroinnissa palataan vahvasti Riemannin summien ja jaon käsitteiden äärelle.

4.1. Kolme perustyökalua

Oletetaan, että funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja muodostetaan tasavälinen jako tälle välille $h = (b-a)/n$, jolloin jakopisteitä on yhteensä $n+1$ kappaletta:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad ..., \quad x_n = a + nh = b$$

Oletetaan, että funktion $f(x)$ arvo on tiedossa näissä pisteissä:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad ..., \quad y_n = f(x_n).$$

Puolisuunnikassääntö

Nimensä mukaisesti puolisuunnikassäännön mukaisesti approksimoitaessa lasketaan jaon mukaisia puolisuunnikkaita funktion osavälin päätepisteissä saamien arvojen mukaisesti. Puolisuunnikkaan pinta-ala lasketaan tuttuun tapaan leveys kerrottuna korkeuksien keskiarvolla, eli tässä tapauksessa

$$A_{p.suunnikas} = h\frac{y_0 + y_1}{2}$$

Approksimaatio lasketaan siis seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx h\Big(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Big) \\ &\approx h\Big(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\Big)\end{aligned}$$

Keskipistesääntö

Tässä menetelmässä puolestaan lasketaan funktion arvo osavälin keskipisteessä, jolloin kyseessä on oikeastaan Riemannin summa. Olkoon $m_j = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$ mielivaltaisella $k \leq n$. Keskipisteapproksimaatio on tällöin muotoa:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n)) = \sum_{j=1}^{n} f(m_j)$$

Mikäli haluataan tihentää jakoa esimerkiksi kahdella puolisuunnikasmenetelmää varten, voidaan keskipistesääntö ja puolisuunnikassääntö yhdistää (pohdi, miksi?!). Olkoon T_n puolisuunnikassäännön mukainen approksimaatio jaolla n ja M_n vastaava approksimaatio keskipistesäännöllä. Tällöin pätee:

$$T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + M_n)$$

Simpsonin sääntö

Simpsonin approksimaatio perustuu paraabelin sovittamiseen annetulle osavälille, ja se on edellisiä, lineaarisia approksimaatioita tarkempi. Valitaan osaväliksi $2h$:n pituinen väli. Jaetaan tämä osaväli kahtia, jolloin saadaan kolme pistettä $-h, 0$ ja h ja vastaavasti funktion arvot näissä pisteissä y_v, y_k ja y_o (vasen, keski ja oikea). Voidaan muodostaa yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} y_v & = & A & - & Bh & + & Ch^2 \\ y_k & = & A & & & & \\ y_o & = & A & + & Bh & + & Ch^2 \end{cases}$$

eli $A = y_k$ ja $2Ch^2 = y_v - 2y_k + y_o$. Saadaan:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} (a + Bx + Cx^2)\,dx &= \Big/_{\!-h}^{\,h} Ax + \frac{B}{2}x^2 + \frac{C}{3}x^3 \\ &= 2Ah + \frac{2}{3}Ch^3 \\ &= h\Big(2y_k + \frac{1}{3}(y_v - 2y_k + y_o)\Big) \\ &= \frac{h}{3}(y_v + 4y_k + y_o) \end{aligned}$$

Funktion integraalia voi siis approksimoida kaavalla:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &\approx \frac{h}{3}\Big(\sum y_{end} + 4\sum y_{odds} + 2\sum y_{evens}\Big) \end{aligned}$$

Virhe-estimaatit puolisuunnikas- ja keskipisteapproksimaatiossa

Seuraavat pätevät puolisuunnikas- ja keskipisteapproksimaatioiden virheiden estimaateille:

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\Big| &\le \frac{K(b-a)}{12}h = \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \\ \Big|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\Big| &\le \frac{K(b-a)}{24}h = \frac{K(b-a)^3}{24n^2} \end{aligned}$$

jossa $|f''(x)| \le K$ ja $h = \frac{b-a}{n}$. Todistetaan näistä ensimmäinen.

Todistus. [20] Tarkastellaan ensin yhtä osaväliä, $[x_{k-1}, x_k]$. Muodostetaan funktio $g(x)$, jolle pätee

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - h\frac{y_{k-1} - y_k}{2} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx$$

[20] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 373-374.

Olkoon $f(x)$ kahdesti derivoituva, jolloin myös $g(x)$ on kahdesti derivoituva. Tiedetään myös, että $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 0$. Osoitetaan nyt taulukkointegroinnin avulla, että pätee

$$\begin{aligned}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)f''(x)\,dx - h\frac{y_{k-1} - y_k}{2} &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)g''(x)\,dx \\ &= -2\int_{x_{k-1}}^{x_k} g''(x)\end{aligned}$$

järj.no	merkki	f(x)	G(x)
0	+	$-x^2 + x_k x - x_{k-1}x$	$f''(x)$
1	-	$-2x + x_k - x_{k-1}$	$f'(x)$
2	+	-2	$f(x)$
3	-	0	$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$

Koska tapauksessamme funktion arvo välin päätepisteissään on nolla, myös lausekkeen arvo on muutoin nolla, paitsi viimeisen termin $-2\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ osalta. Tämän välituloksen jälkeen voimme palata alkuperäiseen todistukseen. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee:

$$\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - h\frac{y_{k-1} - y_k}{2}\Big| \leq \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g''(x)\,dx$$

Merkitään lauseketta $|f''(x)|$ K:lla ja sievennetään:

$$\begin{aligned}&\leq \frac{K}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (-x^2 + (x_{k-1} + x_k)x - x_{k-1}x_k\,dx \\ &= \frac{K}{12}(x_k - x_{k-1})^3 = \frac{K}{12}h^3\end{aligned}$$

Kun sääntöä sovelletaan koko välin (a, b) tarkasteluun, saadaan summalauseke

$$\begin{aligned}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - T_n\Big| &= \Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(\int_{x_j-1}^{j} f(x)\,dx - h\frac{y_{j-1} - j_k}{2}\Big)\Big| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n}\Big|\Big(\int_{x_j-1}^{j} f(x)\,dx - h\frac{y_{j-1} - j_k}{2}\Big)\Big| \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{K}{12}h^3 = \frac{K}{12}nh^3 = \frac{K(b-a)}{12}h^2\end{aligned}$$

□

Virhe-estimaatti ja jaon tihennys Simpsonin säännössä

Mikäli halutaan tihentää jakoa integroitaessa numeerisesti Simpsonin säännöllä, pätee (pohdi, miksi?):

$$S_{2n} = \frac{T_n + 2M_n}{3} = \frac{2T_n + M_n}{3} = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

Simpsonin säännölle on olemassa myös virhe-estimaatti, mutta koska sen todistus on melko pitkä, jätetään se kiinnostuneen lukijan luettavaksi liitteistä. Annetaan virhe-estimaatti tässä yhteydessä:

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

jossa $|f^{(4)}(x)| \leq K$ ja $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Tehtävät

Approksimoi tehtävien integraaleja a) puolisuunnikassäännöllä b) keskipistesäännöllä ja c) Simpsonin säännöllä jakaen välin sekä neljään että kahdeksaan osaan. Laske myös tarkka arvo ja laske approksimaatioiden virheet.

1. $$\int_0^2 (1+x^2)\,dx$$ [21]

2. $$\int_0^1 e^{-x}\,dx$$ [21]

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$ [21]

4. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$ [21]

5. $$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$ [21]

[21] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 375 [1]

4.2. Muita menetelmiä

Integrointi Taylorin kaavan avulla

Taylorin kaava on kättökelpoinen työkalu, kun halutaan tulos tietyllä määrätyllä tarkkuudella. Muistetaan, että pätee:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_{n+1}(x; x_0)$$

jossa

$$T_n(x_0; x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad k \in \mathbb{N}$$

ja

$$R_{n+1}(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

kun ξ on jokin lukujen x ja x_0 välissä oleva luku. Näin ollen voidaan approksimoida lauseketta seuraavasti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b T_n(x; x_0)\,dx + \int_a^b R_{n+1}\,dx$$

Tarkastellaan esimerkkiä.

Esimerkki 12. *Laske seuraavan lausekkeen integraali Taylorin kaavan avulla siten, että virhe on enintään* 10^{-2}*:*

$$\int_{-1}^{0} e^{2x}\,dx$$

Ratkaisu. Tässä tilanteessa Taylorin polynomi on muotoa

$$T_n(x; -1) = e^{-2} + \frac{2e^{-2}}{1}(x+1) + \frac{4e^{-2}}{2}(x+1)^2 + ... + \frac{2^n e^{-2}}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

Koska integraalin yläraja on tiedossa, voidaan tarkastella virhettä Lagrangen jäännöstermimuodon ja ylärajan avulla. Lasketaan jäännöstermejä $n = 5$ lähtien:

$$\begin{aligned}
R_6(x; x_0) &= \frac{64e^0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx 0,088889 \\
R_7(x; x_0) &= \frac{128e^0}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx 0,025397 \\
R_8(x; x_0) &= \frac{256e^0}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx 0,006349 \leq 10^0
\end{aligned}$$

Siis vaadittuun tarkkuuteen riittää, että lasketaan Taylorin polynomin T_7 integraali:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx \approx & \frac{8\,(x+1)^7}{315}+\frac{4\,(x+1)^6}{45}+\frac{4\,(x+1)^5}{15}+\frac{2\,(x+1)^4}{3}+\frac{4\,(x+1)^3}{3}+ \\
& 2\,(x+1)^2+2\,(x+1)+e^{-2} \\
= & \Big/_{-1}^{0} \frac{(x+1)^8}{315}+\frac{4\,(x+1)^7}{315}+\frac{2\,(x+1)^6}{45}+\frac{2\,(x+1)^5}{15}+ \\
& \frac{(x+1)^4}{3}+\frac{2\,(x+1)^3}{3}+(x+1)^2+xe^{-2}+C \\
= & \frac{691}{315}-e^{-2}\approx 2,05832
\end{aligned}$$

Romberg-integrointi

Ennen varsinaista Rombergin menetelmää tulee esitellä niin kutsuttu Richardsonin ekstrapolaatio, josta Rombergin menetelmä on sovellus.

Tarkastellaan mielivaltaista kohtaa x ja sen ympäristöä $(x-h, x+h)$. Taylorin sarjojen perusteella pätee:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \\
f(x-h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)}{k!}h^k
\end{aligned}$$

Tällöin

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\Big[\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x)+...\Big]$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$f'(x)=D(h)+e_2h^2+e_4h^4+...$$

Nyt $D(h)$ on karkea approksimaatio. Voidaan tarkentaa approksimaatiota eliminoimalla virheitä. Pätee:

$$4f'(x)=4D(h)+4e_2h^2+4e_4h^4+...$$

ja derivaatan lineaarisuuden nojalla

$$f'(x)=D(2h)+4e_2h^2+16e_4h^4+...$$

jotka yhdistämällä saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4D(h) - D(2h)}{3} - 4e_4h^4 + ... \\ &= \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4) \end{aligned}$$

jossa termi $O(h^4)$ vastaa jäljelle jäävää virhettä. Tätä prosessia voidaan toistaa uudelleen ja uudelleen niin kauan, kunnes saavutetaan haluttu tarkkuus.

Määritellään nyt seuraavasti:

$$T_k^0 = T_{2^k}. \quad \text{jolloin} \quad T_0^0 = T_1, \quad T_1^0 = T_2, \quad T_2^0 = T_4...$$

jossa T_k on puolisuunnikasapproksimaatio. Integraalin virhe voidaan ilmaista:

$$E_n = I - T_n = \frac{C_1}{n^2} + \frac{C_2}{n^4} + \frac{C_3}{n^6} + ... + \frac{C_m}{n^{mk}} + O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\Big)$$

Ensimmäisessä merkinnässä T_k^n alaindeksi kuvaa siis jaon tiheyttä ja yläindeksi eliminoituja virheitä. Tällöin:

$$T_k^0 = I - \frac{C_1}{4^k} - \frac{C_2}{4^{2k}} - ... - \frac{C_m}{4^{mk}} - O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\Big)$$

Voidaan sijoittaa k:n paikalle $k+1$:

$$T_{k+1}^0 = I - \frac{C_1}{4^{k+1}} - \frac{C_2}{4^{2(k+1)}} - ... - \frac{C_m}{4^{m(k+1)}} - O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\Big)$$

Eliminoidaan ensimmäinen virhe:

$$\begin{aligned} T_{k+1}^1 &= \frac{4T_{k+1}^0 - T_k^0}{3} \\ &= I - \frac{C_2^1}{4^{2k}} - \frac{C_3^1}{4^{3k}} ... - \frac{C_m^1}{4^{mk}} - O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\Big) \end{aligned}$$

Jatketaan nyt prosessia eteenpäin. Korvataan $k+1$ $k+2$:lla:

$$T_{k+2}^1 = I - \frac{C_2^1}{4^{2(k+1)}} - \frac{C_3^1}{4^{3(k+1)}} ... - \frac{C_m^1}{4^{m(k+1)}} - O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)(k+1)}}\Big)$$

Tällöin saadaan:

$$\begin{aligned} T_{k+2}^2 &= \frac{16T_{k+2}^1 - T_{k+1}^1}{15} \\ &= I - \frac{C_3^2}{4^{3k}} - ... - \frac{C_m^2}{4^{mk}} - O\Big(\frac{1}{4^{(m+1)k}}\Big) \end{aligned}$$

Prosessissa päästään siis eteenpäin aina seuraavalla kaavalla, jossa $j < m$ ja $k \geq 0$:

$$T_{k+j}^{j} = \frac{4^j T_{k+j}^{j-1} - T_{k+1-j}^{j-1}}{4^j - 1}$$

Rombergin approksimaatiosta R_j on kyse, kun $k = 0$.

Koska algoritmi voi vaikuttaa ensinäkemältä hankalalta, käydään menetelmä läpi vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 13. *Laske Rombergin approksimaatiot R_0, R_1, R_2, R_3 ja R_4 integraalille*

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

Ratkaisu. Etsitään aluksi T_0^0, T_1^0 T_2^0, T_3^0, T_4^0:

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= T_1 = R_0 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75 \\
T_1^0 &= T_2 = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(1) + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] = 0,70833333 \\
T_2^0 &= T_4 = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}(1) + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] = 0,69702381 \\
T_3^0 &= T_8 = \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{2}(1) + \frac{8}{9} + \frac{4}{5} + \frac{8}{11} + \frac{2}{3} + \frac{8}{13} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{8}\Big[4T_4 + \frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\Big] = 0,69412185 \\
T_4^0 &= T_{16} = \frac{1}{16}\Big[8T_8 + \frac{16}{17} + \frac{16}{19} + \frac{16}{21} + \frac{16}{23} + \frac{16}{25} + \frac{16}{27} + \frac{16}{29} + \frac{16}{31}\Big] \\
&= 0,69339120
\end{aligned}$$

Määritetään näiden avulla pyydetyt Rombergin approksimaatiot:

$$
\begin{aligned}
R_1 = T_1^1 &= \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3} = 0,6944444 \\
T_2^1 &= \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3} = 0,69325397 \\
R_2 = T_2^2 &= \frac{16T_2^1 - T_1^1}{15} = 0,69317460 \\
T_3^1 &= \frac{4T_3^0 - T_2^0}{3} = 0,69315453 \\
T_3^2 &= \frac{16T_3^1 - T_2^1}{15} = 0,69314790 \\
R_3 = T_3^3 &= \frac{64T_3^2 - T_2^2}{63} = 0,69314748 \\
T_4^1 &= \frac{4T_4^0 - T_3^0}{3} = 0,69314765 \\
T_4^2 &= \frac{16T_4^1 - T_3^1}{15} = 0,69314719 \\
T_4^3 &= \frac{64T_4^2 - T_3^2}{63} = 0,69314718 \\
R_4 = T_4^4 &= \frac{256T_4^3 - T_3^3}{255} = 0,69314718
\end{aligned}
$$

Viimeisin approksimaatio vastaa tarkkaa arvoa kahdeksan desimaalin tarkkuudella.

Lisättäköön vielä, että välin tasainen jako ei ole ainoa vaihtoehto. Väli voidaan jakaa myös painokerroinfunktioilla, ja tällaisia numeerisia menetelmiä kutsutaan *Gaussin kvadratuureiksi.* Koska niiden syvällisempi ymmärtäminen vaatii lineaarialgebran hallintaa, jätetään nämä numeeriset menetelmät numeerisen analyysin kurssille.

Tehtävät

Arvioi tehtävissä 1-11 integraaleja Taylorin kaavan avulla neljän desimaalin tarkkuudella. Jos kyseessä ei ole epäoleellinen integraali, voit halutessasi käyttää myös Rombergin menetelmää.

1. $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$ [22]

2. $$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$ [22]

3. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$$ [22]

[22] C.H. Edwards and D.E. Penney: *Calculus*, Pearson, 2002, p. 756.[3]

4.
$$\int_0^1 \sin x^2 \, dx$$
[22]

5.
$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx$$
[22]

6.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \, dx$$
[22]

7.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-e^{-x}}{x} \, dx$$
[22]

8.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3} \, dx$$
[22]

9.
$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} \, dx$$
[22]

10.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^2} \, dx$$
[22]

11.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$
[22]

12. Laske seuraavan integraalin likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella Rombergin menetelmällä:
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$$
[23]

13. Laske seuraavan integraalin likiarvo kuuden desimaalin tarkkuudella sekä Rombergin menetelmällä että Taylorin kaavan avulla:
$$\int_0^1 e^{-x^2} \, dx$$
[24]

14. Näytä Rombergin menetelmän avulla, että
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$
[23]

[23] R.G. Shanker: *Numerical Analysis*, New Age International P Ltd., 2006, p. 205. [7]
[24] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 386-387. [1]

5. Lisätehtäviä

Seuraavien tehtävien tarkoitus on kerrata erityisesti integroimistekniikoita, sillä ne ovat avain monenlaisiin integraalilaskennan ongelmiin. Viimeisissä tehtävissä arvioidaan integraalien suppenevuutta.

1. $$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$ [25]

2. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,dx$$ [25]

3. $$\int \frac{x^2}{(3+5x^2)^{3/2}}\,dx$$ [25]

4. $$\int e^{-x}\sin(2x)\,dx$$ [25]

5. $$\int \frac{2x^2+4x-3}{x^2+5x}\,dx$$ [25]

6. $$\int \frac{dx}{2+e^x}$$ [25]

7. $$\int x^3 3^x\,dx$$ [25]

8. $$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{2-\sin x}\,dx$$ [25]

9. $$\int \frac{x^2+1}{x^2-2x+2}\,dx$$ [25]

10. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$ [25]

11. $$\int x^3(\ln x)^2\,dx$$ [25]

12. $$\int \frac{x^3}{1-4x^2}\,dx$$ [25]

13. $$\int x^2\sin^{-1}2x\,dx$$ [25]

14. $$\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-3x+x^2}\,dx}$$ [25]

15. $$\int \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x}\,dx$$ [25]

16. $$\int \sqrt{x-x^2}\,dx$$ [25]

[25] R.A. Adams and C. Essex: *Calculus: a complete course*, Pearson, 2013, p. 388-389.[1]

17.
$$\int \frac{x^4 - 1}{x^3 + 2x^2}\, dx$$
[25]

18.
$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\, dx$$
[26]

19.
$$\int \frac{(x+1)\, dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$$
[25]

20.
$$\int \frac{x^{1/2}}{1 + x^{1/3}}\, dx$$
[25]

21.
$$\int \ln(x+1)\, dx$$
[26]

22.
$$\int x(\ln x)^3\, dx$$
[26]

23.
$$\int \ln(1 + \sqrt{x})\, dx$$
[25]

24.
$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$
[25]

25.
$$\int x^2 \tan^{-1} x\, dx$$
[25]

26.
$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$$
[25]

27.
$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

28.
$$\int \sin\sqrt{x}\, dx$$
[26]

29.
$$\int \frac{dx}{\tan x + \sin x}$$
[25]

30.
$$\int \tan x x \ln(\cos x)\, dx$$

31.
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$$
[25]

32.
$$\int \sqrt{1 + \sin t}\, dt$$
[26]

33.
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$$
[25]

34.
$$\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sec x \sqrt{\sin x}}\, dx$$
[27]

[26] C.H. Edwards and D.E. Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice Hall, Inc., 1990, p. 452-454. [2]

[27] C.H. Edwards and D.E. Penney: *Calculus*, Pearson, 2002, p. 362-364.[3]

35.
$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx$$
25

36.
$$\int \frac{x^4}{x^3-8}\,dx$$
25

37.
$$\int xe^x \cos x\,dx$$
25

38.
$$\int x\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)\,dx$$
26

39.
$$\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$$
26

40. Arvioi integraalin suppenevuutta:
$$\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$$
25

41. Arvioi integraalin suppenevuutta:
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+x^3}\,dx$$
25

42. Arvioi integraalin suppenevuutta:
$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$$
25

43. Arvioi integraalin suppenevuutta:
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$
25

Liite A Simpsonin säännön virheen todistus

Todistetaan, että pätee

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

jossa $|f^{(4)}(x)| \leq K$ ja $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Todistus. [6] Tarkastellaan ensin yhtä yksittäistä väliä. Määritellään:

$$E(h) = \int_{a-h}^{a+h} g(t)\,dt - h(Ag(a-h) + B(g(a)) - C(g(a+h)$$

Tällöin $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{3}$ ja $C = \frac{1}{3}$. Derivoidaan virhe kahteen kertaan:

$$\begin{aligned}
E'(h) &= g(a+h) + g(a-h) - (Ag(a-h) + Bg(a) + Cg(a+h)) \\
&- (-Ag'(a-h) + Cg'(a+h)) \\
&= (1-C)g(a+h) + (1-A)g(a-h) - Bg(a) \\
&+ h(Ag'(a-h) - Cg'(a+h)) \\
E''(h) &= g'(a+h) - g'(a-h) - 2(-Ag'(a-h) + Cg'(a+h)) \\
&- h(Ag''(a-h) + Cg''(a+h))
\end{aligned}$$

Kun h=0, niin

$$\begin{aligned}
E'(0) &= (2 - (A+B+C))g(a) \\
E''(0) &= (2(A-C))g'(a)
\end{aligned}$$

Koska $A + B + C = 2$ ja $A - C = 0$, kaikissa tapauksissa $E(0) = E'(0) = E''(0)$. Pätee siis

$$E''(h) = \frac{1}{3}(g''(a+h) - g''(a-h)) - \frac{1}{3}(g''(a+h) + g''(a-h))$$

Derivoidaan kolmanteen kertaan:

$$\begin{aligned}
E'''(h) &= \frac{1}{3}(g''(a+h) + g''(a-h)) - \frac{1}{3}(g''(a+h) + g''(a-h)) \\
&- \frac{h}{3}(g'''(a+h) - g'''(a-h)) \\
&= -\frac{h}{3}(g'''(a+h) - g'''(a-h))
\end{aligned}$$

Väliarvolauseen nojalla

$$E'''(h) = -\frac{h}{3}(g'''(a+h) - g'''(a-h)) = -\frac{h}{3}g^{(4)}(\beta)(2h)$$

jollakin $\beta \in (a-h, a+h)$. Näin ollen, kun $|g^{(4)}(x)| \leq K$, pätee:

$$\frac{-2K^2}{3} \leq E'''(h) \leq \frac{2K^2}{3}$$

Kolmen integroinnin jälkeen saadaan:

$$|E(x)| \leq \frac{2Kh^5}{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{Kh^5}{90}$$

joka muuntuu muotoon

$$|E(x)| \leq \frac{K}{90}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^5$$

kun $h = \frac{b-a}{2}$.

Muistetaan, että Simpsonin säännössä väli jaettiin kahteen osaväliin. Näin ollen, kun lasketaan jokaista x_n kohti virheen suuruus, saadaan

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

$\square$

Viitteet

[1] R. A. Adams and C. Essex. *Calculus: the complete course.* Pearson Canada, 2013.

[2] C. H. Edwards and D. E. Penney. *Calculus and Analytic Geometry.* Prentice Hall, Inc., 1990.

[3] C. H. Edwards and D. E. Penney. *Calculus.* Upper Saddle River NJ : Prentice Hall, 2002.

[4] D. Horowitz. Tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*, 21(4):307–311, 1990.

[5] E. Mendelssohn. *3000 Solved Problems in Calculus.* The McGraw-Hill Companies, Inc., 1988.

[6] F. Sadomierski. Unified proofs of the error estimates for the midpoint, trapezoidal, and simpson's rules. *Mathematics Magazine*, 86(4):261–264, 2013.

[7] R. Shanker. *Numerical Analysis.* New Age International P Ltd., 2006.