

Solmun tehtäviä

Tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

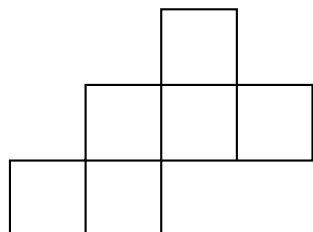
1. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 19, \\ \frac{x(x+y)}{y} = 60, \end{cases}$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on yhtä suuri kuin seuraavien kahden kokonaisluvun neliöiden summa. Mitkä nämä peräkkäiset viisi kokonaislukua ovat?

3. Paperille on piirretty alla olevan kuvan mukainen neliöstä koostuva monikulmio. Kaksi neliötä väritetään punaisiksi ja loput neliöt erivärisiksi: yksi neliö vihreäksi, yksi keltaiseksi, yksi siniseksi ja yksi oranssiksi. Monikulmio leikataan irti paperista ja neliöiden yhtymäkohdissa 90° taitoksia tekemällä muodostetaan kuutio. Kuinka monella eri tavalla neliöiden värittäminen on mahdollista tehdä niin, että muodostetussa kuutiossa mitkään vierekkäiset sivut eivät ole samanvärisiä?



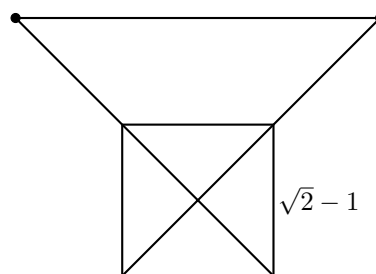
4. Kaksi henkilöä yritti arvioida ulkoilmakonsertin yleisömäärän. Toinen arvioi, että yleisöä oli 2700, ja toinen

puolestaan arvioi, että yleisöä oli 3600. Osoittautui, että toisen arvion prosentuaalinen virhe oli kaksi kertaa niin suuri kuin toisen virhe. Lisäksi toinen aliarvioi ja toinen yliarvioi yleisön määrän. Kuinka paljon konsertissa oli yleisöä?

5. Neliön sivun pituus on $\sqrt{2} - 1$. Molempia neliön lävistäjiä jatketaan toisesta päästä neliön sivun pituuden verran, ks. kuva alla.

(a) Kuinka pitkä on jana, joka yhdistää jatkeiden päätepisteet?

(b) Osoita, että neliössä on kärki, joka yhdessä jatkeiden päätepisteiden kanssa muodostaa tasakylkisen kolmion.

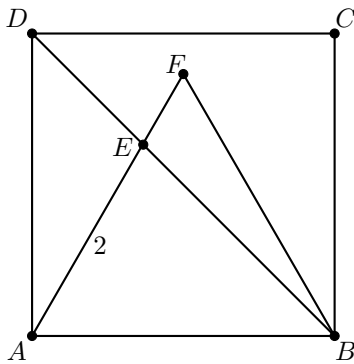


6. Kuuden peräkkäisen kokonaisluvun summa kerrotaan kuuden seuraavan kokonaisluvun summalla. Osoita, että tällä tavalla saadun tulon jakojäännös luvulla 36 jaettaessa on aina sama.

7. Määritä luvun $11! + 13!$ suurin alkutekijä. (Positiivisen kokonaisluvun n kertoma $n!$ on kokonaislukujen $1, \dots, n$ tulo; esimerkiksi $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

8. Kaupan kassassa on 5, 10, 20, 50, 100 ja 200 euron seteleitä yhteensä 18 200 euroa. Ennen kuin viimeisin seteli lisättiin kassaan, niin jokaisen setelityypin lukumäärä oli kääntäen verrannollinen setelin arvoon. Kuinka monta 200 euron seteliä kassassa on?

9. Tasasivuinen kolmio ABF on neliön $ABCD$ sisällä alla olevan kuvan mukaisesti. Janan AE pituus on 2. Mikä on neliön $ABCD$ pinta-ala?

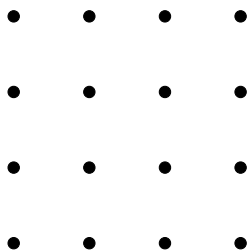


10. Aino, Pekka ja Liisa pelaavat seuraavanlaista peliä. He valitsevat vuorotellen jonkin kokonaisluvun yhdestä kymmeneen ja lisäävät luvun aikaisemmin valittujen lukujen summaan. Aino aloittaa, Pekka on toinen ja Liisa on kolmas, jonka jälkeen vuoro siirtyy takaisin Ainolle jne. Selvyyden vuoksi jokainen pelaaja sanoo vuorollaan lukujen uuden summan. Pelin voittaa pelaaja, joka sanoo ensin luvun sata. Osoita, että tytöt voivat keskenään sopia pelistrategian, jolla pelin voittaa varmasti jompikumpi heistä, eikä Pekka voi voittaa peliä.

11. Heitetään kuusi noppaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan vähintään neljä samaa silmälukua?

12. Positiiviselle reaalityyluvulle x on voimassa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Määritä $x^5 + \frac{1}{x^5}$ laskematta luvun x arvoa.

13. Alla olevassa kuvassa on 16 pistettä. Kuinka monella tavalla on mahdollista valita kolme pistettä niin, että muodostuu kolmio, jonka kärjet ovat valituissa pisteissä?



14. Reaalityyluvut x ja y toteuttavat ehdot $x + 3y = 12$ ja $x \geq 2y \geq 0$. Mitä arvoja $x + 2y$ voi saada?

15. Millä parametrin a arvoilla toisen asteen yhtälöllä

$$ax^2 + a^2x + a = \frac{1}{a}$$

on kaksoisjuuri?

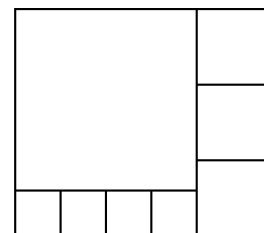
16. Yksin tehdessään Pekalta kuluu työtehtävässä viisi tuntia ja Paavolta kuluu samassa työtehtävässä kuusi tuntia. Kun he tekevät työtehtävän yhdessä, niin heidän tuottavuutensa heikkenee jatkuvan kinastelun takia. Molempien työteho vähenee suhteessa yhtä paljon samalla prosenttimäärällä. Kuinka monta prosenttia heidän työtehonsa vähenee, kun yhdessä heillä kuluu työtehtävässä 3,5 tuntia?

17. Tiinalla on uusi työpaikka ja hän kulkee töihin omalla autolla. Ensimmäisenä työpäivänä hän ajoi 70 km/h keskinopeudella ja saapui töihin minuutin myöhässä. Toisena työpäivänä hän ajoi 75 km/h keskinopeudella ja saapui töihin minuutin etuajassa. Kuinka pitkä työmatka Tiinalla on?

18. Joulukuun on aikaa viisi päivää ja joulukuusessa on jäljellä viisi karkkia: kaksi niistä on marmeladia ja kolme on suklaata. Karkkeja ei voi tunnistaa käärepaperin perusteella. Hanna päättää syödä yhden karkin päivässä joulukuun asti. Kumpi seuraavista on todennäköisempää: Hanna syö toisen (ja viimeisen) marmeladikarkin kolmantena päivänä vai hän syö kolmannen (ja viimeisen) suklaakarkin neljäntenä päivänä?

19. Heitetään kolikkoa viisi kertaa. Tämän jälkeen heitetään kolikkoa vielä niin monta kertaa kuin saatiin kruunua viidessä ensimmäisessä heitossa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan yhteensä 5 kruunaa?

20. Suorakulmio jaetaan kahdeksaksi neliöksi alla olevassa kuvassa esitetyllä tavalla. Keskikokoisen neliön pinta-ala on 100 cm^2 . Mikä on alkuperäisen suorakulmion pinta-ala?



Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitukset suomeksi: Mika Koskenoja