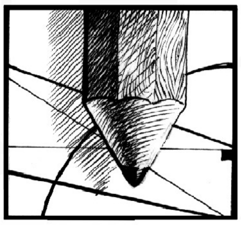


Sykloidi

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Johdanto

Tässä kirjoituksessa tutustutaan tasaista alustaa pitkin vierivän ympyrän kehän pisteen muodostamaan tasokäyrään, jota kutsutaan sykloidiksi. Aihetta on käsitelty aikaisemmin mm. Solmun artikkeleissa [1], [2] ja [3] sekä kilpailutehtävässä [4, tehtävä 9 vuonna 2008], mutta kirjoitusten lähestymistavat ovat ainakin osittain erilaiset. Lisäksi vanhemmilla kirjoituksilla on ikävä taipumus hautautua arkistojen kätköihin.

Joissakin tämän kirjoituksen kohdissa pyörimisliikkeen fysiikkaan[1] liittyvistä käsitteistä on hyötyä tilanteen hahmottamisen kannalta, mutta esimerkiksi viitteen [4] ratkaisu perustuu pelkästään kolmioiden geometriaan. Nykyisessä poikkitieteellisyyttä ihannoivassa maailmassa matematiikan ja fysiikan vuorovaikutusta ei pitäisi kuitenkaan karsastaa.

Ympyräliike

Kaikki pyöriminen alkaa ympyrästä, jonka yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 = R^2$. Tämä ympyrä muodostuu niistä tason pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on R. Kaavan $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ perusteella piste $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ toteuttaa tämän yhtälön, joten piste sijaitsee tarkasteltavalla ympyrällä. Yleensä tätä ominaisuutta käytetään (tapauksessa $R = 1$) kuitenkin sini- ja kosinifunktioiden määrittelemiseen kolmioita yleisemmässä tilanteessa. Joka tapauksessa kulman φ arvoilla $0 \leq \varphi < 2\pi$ saadaan kaikki ympyrän pisteet täsmälleen yhden kerran, ja arvolla $\varphi = 2\pi$ palataan alkukohtaan $(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$. Esitystä

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \end{cases}$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$, kutsutaan ympyrän *parametriesityksesi*[2]. Tällöin kulman φ kasvaessa vastaava piste kiertyy ympyrällä positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Vastakkainen kiertosuunta saadaan vaihtamalla kulmaparametrin etumerkki, joten ominaisuuksien $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ perusteella parametriesitys tulee muotoon $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$, mutta parametriväli $[0, 2\pi]$ säilyy entisellään.

Yleisemmin muotoa

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

$t \in I$, olevaa lauseketta kutsutaan *tasokäyrän parametriesitykseksi*, jos f ja g ovat jatkuvia funktioita *para-*

[1]Erästä fyysikko-kollegaa lainatakseni ”pyöriminen on lukiofysiikassa kiellettyä”, ts. se on valitettavasti poistettu uusimmasta opetussuunnitelmasta (tasaista ympyräliikettä lukuun ottamatta).

[2]Parametriesitys lienee kieliopillisesti parempi kuin usein käytetyt parametrisointi tai parametrisaatio.

metrivälillä $I \subset \mathbf{R}$. Parametriväli voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu, eikä sen tarvitse edes olla rajoitettu. Varsinainen tasokäyrä C on tällöin se joukko, joka koostuu kaikista muotoa $(f(t), g(t))$ olevista pisteistä, kun $t \in I$; matemaattisemmin kirjoitettuna

$$C = \{(f(t), g(t)) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in I\}.$$

Yleensä merkitään $x = x(t)$ ja $y = y(t)$, vaikka saman symbolin käyttämistä kahdessa eri merkityksessä 'koordinaatti' vs. 'funktion nimi' pitäisi välttää.

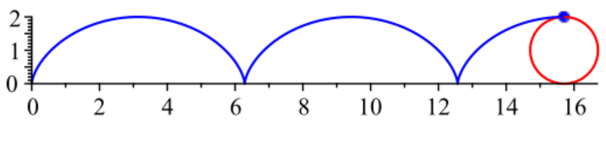
Matemaattisina käsitteinä tasokäyrä ja sen parametriesitys ovat siis eri asioita. Parametriesityksestä on helppo muodostaa vastaava tasokäyrä (esimerkiksi sopivan piirto-ohjelman avulla), mutta vastakkainen suunta ei ole yksikäsitteinen: pelkästä ympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = 1$ ei esimerkiksi voi päätellä sitä, halutaanko käyttää "standardiesitystä" $(\cos t, \sin t)$, vastakkaista kiertosuuntaa $(\cos t, -\sin t)$ vai jopa kiertää ympyrä kahteen kertaan parametrivälillä $[0, 4\pi]$. Ja tämä on vain esimakua kaikista mahdollisista hankaluuksista!

Konkreettisena tulkintana voidaan ajatella, että parametrina t on aika, ja lausekkeet $f(t)$ ja $g(t)$ kuvaavat kynän kärjen x- ja y-koordinaatteja paperilla, johon on piirretty koordinaatisto. Funktioiden jatkuvuus voidaan tulkita niin, että kynää ei saa piirtämisen aikana nostaa paperista.

Jos kaavoihin lisätään z-koordinaatti muodossa $z = h(t)$, niin saadaan *avaruuskäyrän* parametriesitys, mutta niitä ei käsitellä tässä kirjoituksessa.

Sykloidi

Sykloidi on tasokäyrä, joka kuvaa esimerkiksi vierivään renkaaseen tarttuneen kiven rataa.



Viitteessä [5] on tilanteeseen liittyvä animaatio.

Jos renkaan säde on R, renkaan etenemisnopeus v ja parametriksi valitaan aika, niin akselin liikettä kuvaa parametriesitys $x = vt$, $y = R$. Kiven pyöriminen akselin suhteen tapahtuu vierimisehdon perusteella kulmanopeudella $\omega = v/R$ ja pyörimissuunta on negatiivinen. Jos vielä ajan nollakohta valitaan sellaiseen hetkeen, kun kivi koskettaa maata, niin vaakasuorasta alkukulmasta täytyy vähentää $\pi/2$. Tällöin pyörimisliikettä akselin suhteen kuvaa parametriesitys

$$\begin{cases} x = R\cos(-(vt/R - \pi/2)) = -R\sin(vt/R), \\ y = R\sin(-(vt/R - \pi/2)) = -R\cos(vt/R) \end{cases}$$

trigonometristen kaavojen perusteella. Termien kulmanopeus ja vierimisehto käyttäminen voidaan välttää vaatimalla, että rengas pyörähtää yhden kierroksen samassa ajassa $t = 2\pi R/v$, jossa akseli etenee renkaan kehän pituuden $2\pi R$ verran. Lausekkeissa $\cos(at)$ ja $\sin(at)$ esiintyvä kerroin saadaan siis ehdosta $a \cdot 2\pi R/v = 2\pi$, joten $a = v/R$ kuten aikaisemminkin, mutta kiertosuunta ja nollakohdan valinta täytyy joka tapauksessa selvittää erikseen.

Kiven rata saadaan yhdistämällä akselin liike ja pyöriminen toisiinsa, eli käytännössä paikkavektoreiden yhteenlaskulla. Sykloidin parametriesitys on siis muotoa

$$\begin{cases} x = vt - R\sin(vt/R), \\ y = R(1 - \cos(vt/R)). \end{cases} \tag{1}$$

Matemaattisempi vaihtoehto on käyttää parametrina renkaan kiertokulmaa $\varphi = vt/R$, jolloin

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi), \\ y = R(1 - \cos\varphi). \end{cases} \tag{2}$$

Näiden kaavojen vertaaminen sykloidin kuvaan saattaa herättää kysymyksen, miten sykloidissa esiintyvät terävät kulmat syntyvät, kun parameriesityksen kaikki lausekkeet ovat derivoituvia funktioita. Vastaus liittyy renkaassa olevan kiven nopeuteen[3], jota kuvaavat lausekkeet $x'(t)$ ja $y'(t)$ menevät yhtä aikaa nollaan silloin, kun $y(t) = 0$ eli $vt/R = n \cdot 2\pi$. Kiven hetkellinen nopeus on nolla sen osuessa maahan, joten myös sen suunta voi muuttua jyrkästi ilman derivoituvuusongelmia.

Tehtävä: Tarkastellaan yhtälöparia (1). Osoita, että $x'(T) = y'(T) = 0$, jos $y(T) = 0$.

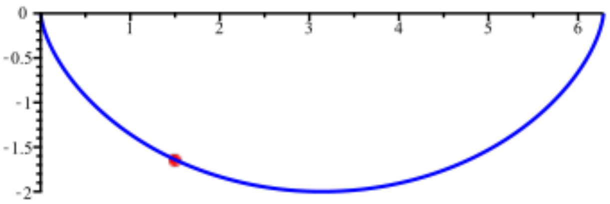
Kaavan (2) ylempi lauseke $x = x(\varphi)$ on aidosti kasvava, joten siitä voidaan periaatteessa (muttei käytännössä!) ratkaista φ koordinaatin x avulla ja sijoittaa tulos alempaan y-koordinaattiin. Näin sykloidi voidaan esittää myös funktion kuvaajana muodossa $y = y(x)$, mutta käytännössä tämä ei onnistu pelkästään alkeisfunktioiden avulla.

Tautokroni ja brakistokroni

Sykloidi esiintyy myös kahden historiallisesti mielenkiintoisen ongelman ratkaisuna. Molemmat liittyvät samantapaiseen tilanteeseen, jossa esimerkiksi pieneen

[3] Parametrisoidun käyrän tangentti ja sen konkreettinen tulkinta nopeus jääköön tässä kirjoituksessa tarkemmin käsittelemättä, mutta osoittautuu, että hetkellinen nopeusvektori on muotoa $\mathbf{v} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$, kun parametrina on aika t.

helmeen on porattu reikä, ja helmi on pujotettu taipuisaan rautalankaan. Tautokroni (kreikaksi 'sama aika') kuvaa sitä rautalangan muotoa, jossa helmen liukuminen langan alimpaan kohtaan on aina sama, lähtökorkeudesta riippumatta. Brakistokroni (kreikaksi 'lyhin aika') liittyy puolestaan kysymykseen, minkä muotoista lankaa pitkin helmi liukuu nopeimmin kahden eri korkeudella olevan pisteen välillä.

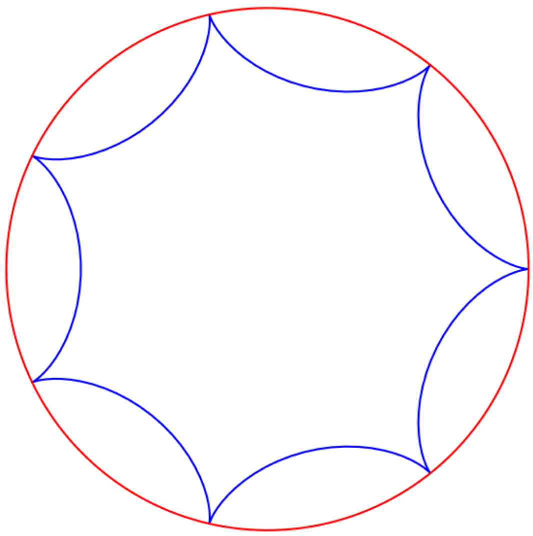


Symmetrisessä tautokronissa ilman kitkaa edestakaisin liukuvan helmen jaksonaika ei riipu amplitudista (eli helmen korkeimmasta kohdasta).

Molempien kysymysten vastaus on alaspäin käännetty sykloidi, sopivasti skaalattuna tilanteen geometrian mukaan. Näiden ongelmien historiasta voi lukea viitteistä [2] ja [3] tai Wikipedian sivuilta [6] ja [7]; annan tässä englanninkieliset viitteet, koska niiden sisältämät animaatiot selventävät kysymyksiä erittäin hyvin. Sen sijaan en ole kovin innoissani Wikipediassa esitetyistä todistuksista, koska pienellä differentiaali- ja integraalilaskennan täydennyksellä ratkaisut voidaan esittää lyhyesti ilman geometrisia approksimaatioita tai differentiaalien pyörittelyä. Mutta tämä olisi kokonaan uuden kirjoituksen aihe.

Muut sykloidit

Hankalammassa tilanteessa pienempi ympyrä vierii pitkin suuremman ympyrän kehää joko sisä- tai ulkopuolella, jolloin syntyy hypo- tai episykloideja. Käsittelen niitä myöhemmin tämän kirjoituksen jatko-osassa.



Eräs hyposykloidi (sisempi käyrä).

Viitteet

[1] https://matematiikkalehtisolmu.fi/1999/5/kivela/

[2] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/html/anal1700/index.html

[3] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/kasitehist/AnalyyttinenGeometria.pdf

[4] https://matematiikkakilpailut.fi/pythagoras/

[5] https://fi.wikipedia.org/wiki/Sykloidi

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve