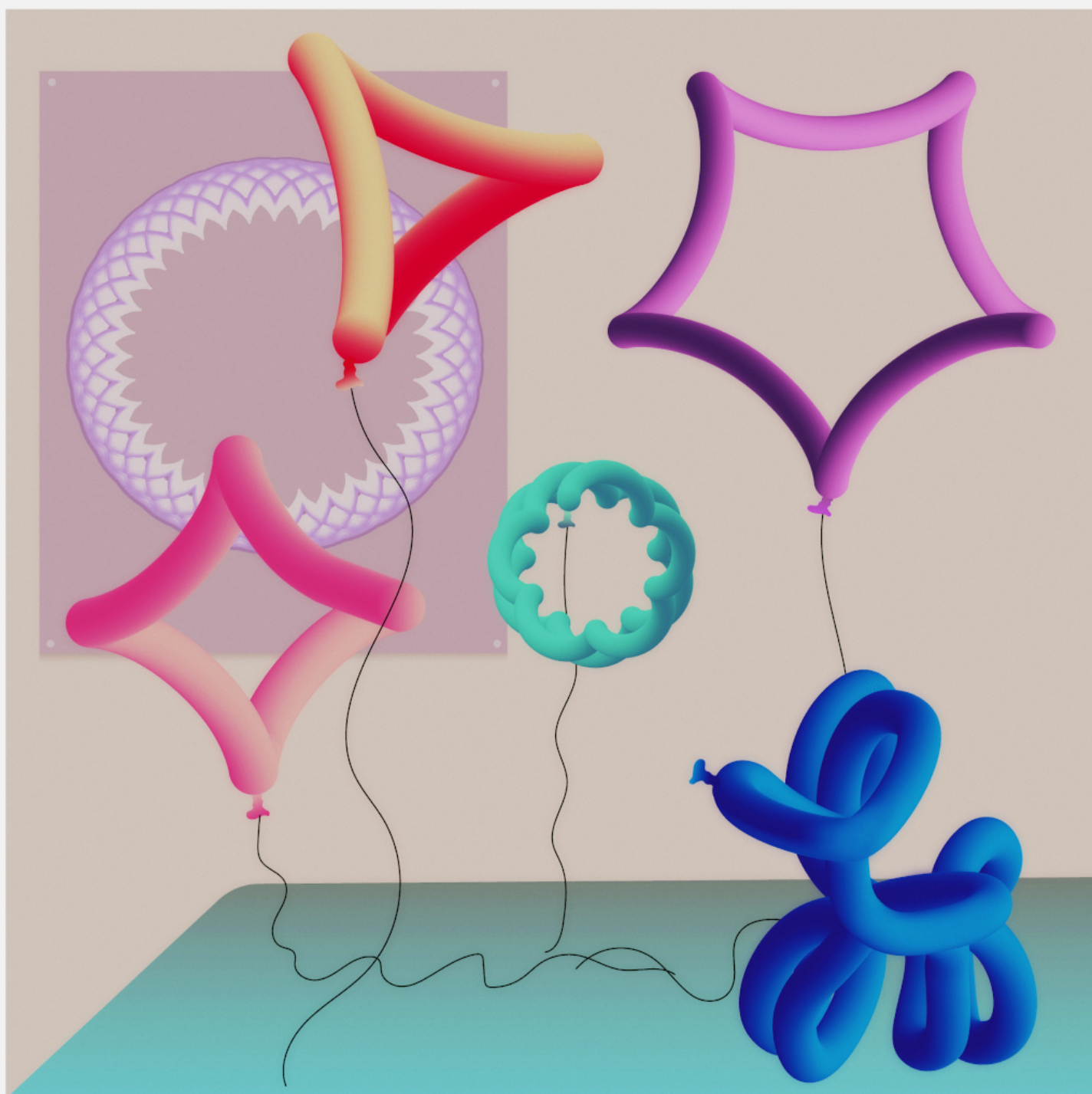


# S&LMU

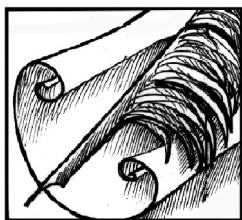
MATEMATIIKKALEHTI 2/2021

[matematiikkalehtisolmu.fi](http://matematiikkalehtisolmu.fi)



## Sisällys

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Pääkirjoitus: Aito avunpyyntö, teoreemien kerjäys vai jotain muuta? (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) .....  | 3  |
| Yhtälöiden ratkaisemista Lambertin funktion avulla (Heikki Apiola) .....                                | 4  |
| Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2021 (Veera Nurmela, Tianyue Sun ja Anni Tapionlinna) ..... | 11 |
| Kun skaalaat, skaalaa kunnolla! (Jukka Liukkonen) .....                                                 | 14 |
| Ilmakehän massa (Markku Halmetoja) .....                                                                | 26 |
| Sykloidi (Pekka Alestalo) .....                                                                         | 28 |



## Aito avunpyyntö, teoreemien kerjäys vai jotain muuta?

### *Pääkirjoitus*

Sain vähän aikaa sitten hiukan hämmentävän englantinkielisen sähköpostin joltain minulle täysin tuntemattomalta ihmiseltä, josta en itse asiassa edes tiedä, onko hän todellinen ihminen vai ei. Viestin sisältö oli se, että hänellä olisi hyvä matematiikan ongelma, jonka kanssa hän on saanut jotain edistystä aikaan, mutta tarvitsisi apua.

En voinut olla miettimättä, mikä sähköpostin tarkoitus on: onko kyseessä aito avunpyyntö vai kenties matemaattisesti vääntynyt versio nigerialaiskirjeestä.

Aito avunpyyntö on mahdollinen teoria, mutta tuntuu sikäli epätodennäköiseltä, että jos apua johonkin ongelmaan tarvitsee, voisi olla järkevää kertoa, mistä on kyse, ja jos ei koko ongelmaa halua kertoa, niin edes aihepiiri. Pelkkä kuvaus ”hyvä ongelma” ei oikein sano mitään. Onhan lukuteoreetikon näkökulmasta huomattava ero siinä, onko kyseessä joku Diofantoksen yhtälö (jotka nekin ovat hyvin haastavia tai välillä käytännössä mahdottomia lähestyä) vai esimerkiksi yleisten topologisten avaruuksien ongelma. Matematiikan parissa aloittavalle ei toki välttämättä tule mieleen, että kuka tahansa ei pysty auttamaan minkä tahansa ongelman kanssa (tai sitten ongelma todella voi olla sellainen, jonka kanssa kuka tahansa matematiikkaa harrastanut voisi auttaa).

Toinen vaihtoehto olisi matemaattinen nigerialaiskirje. Ei se ehkä kovin todennäköinen skenaario ole, mutta

sitäkin mielenkiintoisempi. Tämähän menisi näin: joku lähettäisi sähköpostia, jolla on tarkoitus vain saada lukija kiinnostumaan ja vastaamaan ja lupautumaan auttamaan, ja tämän jälkeen alkuperäinen lähettäjä lupailisi toisen kirjoittajan paikkaa jossain hyvässä artikkelissa. Käytännössä kuitenkin artikkelissa olisi hiukan ongelmia, ja tarvittaisiin vähän apua, eli lemmoja. Pahaa-aavistamaton vastaanottaja sitten todistelisi lemmoja ja teoreemoja, joita aina tarvittaisiin lisää ja lisää, kunnes yhtäkkiä tulokset muodostaisivatkin kokonaisen artikkelin, joka ilmestyisi täysin toisen ihmisen nimissä.

Näen kyllä hyvin hyvien ongelmien viehätyksen – jos jossain legitiimissä yhteydessä on maininta hyvästä tai kivasta matemaattisesta ongelmasta, niin kyllähän se kiinnostaa. Sähköpostiin sen sijaan tulee niin paljon kaikkea epämääräistä, jolloin jos maininta hyvästä ongelmasta ilman tarkempaa kuvausta on siellä aitojen huijauskirjeiden ja auton lisäosamainosten joukossa roskapostikansiossa, niin ei siihen kovin vakavasti suhtaudu.

Nyt siis, hyvä lukija: jos olet lähestynyt minua englanniksi, valenimellä kivan ongelman kanssa kertomatta siitä sen tarkemmin, niin pistä tarkempi kuvaus seuraavalla kerralla.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



## Yhtälöiden ratkaisemista Lambertin funktion avulla

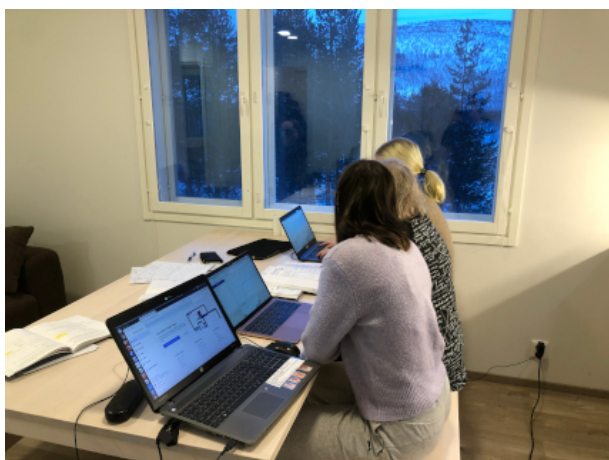
*Heikki Apiola*

Aalto yliopisto, matematiikan ja systeemianalyysin laitos, lehtori emeritus  
heikki.apiola@aalto.fi

### Lähtökohta

Abitytöt *Elle Oksanen* ja *Vilja Varis* suorittivat vaihtopöytäjaksoaan Utsjoen saamelaislukiossa maaliskuussa 2021. Sattuipa niin, että olivat ratkaisemassa GEOGEBRA-ohjelmalla yhtälöä, jossa esiintyi termejä  $x$  ja  $k^x$ .

Kuvissa ovat tytöt pähkäilemässä tätä ja muitakin matematiikan ihmeitä vierailevan opettaja-Sissin avustuksella.



Yhtälöitä Ailigas-tunturin varjossa



ja vielä Wanhan Taskilan pihapiirissä.

Kukaan ei muista, mikä tuo yhtälö tarkalleen ottaen oli, mutta katsotaanpa vaikka tätä:  $3^x = 2x + 2$ .

GEOGEBRA:n CAS-laskin puhuu:

|                                                                                                                                                                                       |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| eq2 : $3^x = 2x + 2$                                                                                                                                                                  | ⋮ |
| Ratkaise(eq2, x)                                                                                                                                                                      | ⋮ |
| $\rightarrow \left\{ x = e^{-\text{LambertW}(-e^{-\ln(2) - \ln(3)} \ln(3)) - \ln(2) - \ln(3)} - 1, x = e^{-\text{LambertW}(-e^{-\ln(2) - \ln(3)} \ln(3))} + \ln(2) + \ln(3) \right\}$ | → |
| RatkaiseNumeerisesti(eq2, x)                                                                                                                                                          | ⋮ |
| $\approx \{x = -0.7901100111667, x = 1.444561392918\}$                                                                                                                                | → |



Mutta mikä ihmeen *LambertW* sinne ilmestyi, kysyivät tytöt.

Tässä kirjoituksessa valaistaan tuota salaperäistä *LambertW*-funktioita ja sen käyttömahdollisuuksia erityisesti yhtälöiden ratkaisemisessa.

## Vähän historiaa

*Johann Heinrich Lambertin* elämä ajoittuu vuosille 1728–1777. Hänen kuuluisa aikalaisensa *Leonhard Euler* (1707–1783) työskenteli yhteistyössä *Lambertin* kanssa tämän tutkimuksen kohteena olevien yhtälöiden parissa etupäässä sarjamuotoisia ratkaisuja kehitellen.

Molemmat matemaatikot olivat ajan tyyliin erittäin laaja-alaisia ulottaen tutkimuksensa myös eri luonnon-tieteiden alueelle.

*Lambertin* tutkimusalueet liikkuvat mm. lukuteorias-  
sa, tilastotieteessä, tähtitieteessä, optiikassa, filosofias-  
sa. Hänet tunnetaan myös ensimmäisestä  $\pi$ :n irratio-  
naalisuuden todistuksesta, jota ovat sittemmin täsmen-  
täneet ja yksinkertaistaneet monet matemaatikot aina  
viime aikoihin saakka. *Lambertin* matemaattisten jul-  
kaisujen joukosta löytyy myös tulevaisuuden visio ko-  
neesta, joka kykenisi suorittamaan matemaattista sym-  
bolien käsittelyä, siis verrattomasti kehittyneempää lai-  
tetta kuin *Pascalin* vuonna 1642 rakentama aritmetiik-  
kakone.

Runsaat 200 vuotta *Lambertin* pähkäilyjä myöhemmin ilmestyivät ensimmäiset (’muistiongelmaiset’) symbo-  
lialgebraohjelmistot, ja kas, nykyisin on ’CAS’ jokaisen  
koululaisenkin ulottuvilla.

*Lambert* tutki muotoa  $x = q + x^m$  olevaa yhtälöä kehit-  
tämällä ratkaisun sarjaksi. Euler kehitti sarjaratkaisun  
yhtälölle  $xe^x = a$ , joka on muunnettavissa alkuperäi-  
sen *Lambertin* tutkiman yhtälön ratkaisuksi. Tämäpä  
on juuri se yhtälö, jonka ratkaisu määrittelee ’*Lamber-  
tin funktion*’ siinä muodossa kuin sitä nykyisin käsitel-  
lään.

## Kirjoituksessa käytettävät ohjelmistot

Tässä kirjoituksessa ei käsitellä *Lambertin funktion* ar-  
vojen laskemiseen tarvittavia numeerisia ratkaisume-  
netelmiä, vaan käytetään ohjelmistoja, joissa kyseinen  
funktio on valmiiksi ohjelmoituna.

Valtaosa laskuista suoritetaan MATLAB/OCTAVE:lla.  
Joitakin MAPLE-esimerkkejä on mukana symbolilas-  
kennan alueella, ja pari näkymää myös GEOGEBRA-  
ratkaisuihin, kuten yllä.

Kirjoituksessa [HA1] on ohjelinkkien lisäksi perustee-  
linen alkuunpääsyohjeisto aina OCTAVE-onlineen käyt-  
töönottoa myöten.

Tämän kirjoituksen viitteissä on lisäksi hyvä OCTAVE:n  
yleisopas [Oct].

Ohjelmakoodeja ja ajotuloksia, erityisesti niiden tuot-  
tamia kuvia on tekstissä mukana joiltakin osin hiukan  
riisuttuina. Täydelliset koodit kaikkine yksityiskohti-  
neen on saatavissa viitteessä [HA2].

## Käänteisfunktioita

Yhtälön ratkaiseminen yleisessä muodossa  $f(x) = y$   
voidaan nähdä käänteisfunktion  $f^{-1}$  arvon laskemise-  
na pisteessä  $y$ . Tämä edellyttää käänteisfunktion tai  
sen haaran olemassaoloa pisteen  $y$  ympäristössä. Jos  
ratkaistavana on esimerkiksi yhtälö  $x^2 = 4$ , jolloin  
 $f(x) = x^2$ , niin ratkaisut  $\pm 2$  sijaitsevat kaksiahaarai-  
sen käänteisfunktion  $\sqrt{y}$  positiivisella ja negatiivisella  
haaralla. Vaihdetään  $y$ :n ja  $x$ :n roolit, jolloin kuvaaja  
muuttuu oikealle avautuvaksi paraabeliksi, ja positiivi-  
nen ja negatiivinen käänteisfunktion haara  $\pm\sqrt{x}$  näky-  
vät normaaliasentoisessa koordinaatistossa.

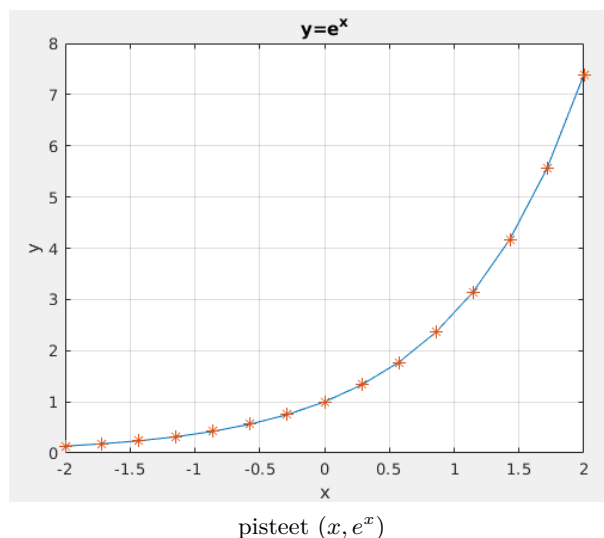
## Logaritmi

Jos emme olisi kuulleet logaritmista, niin tämäkin  
GEOGEBRA-lasku olisi hämmentävä:

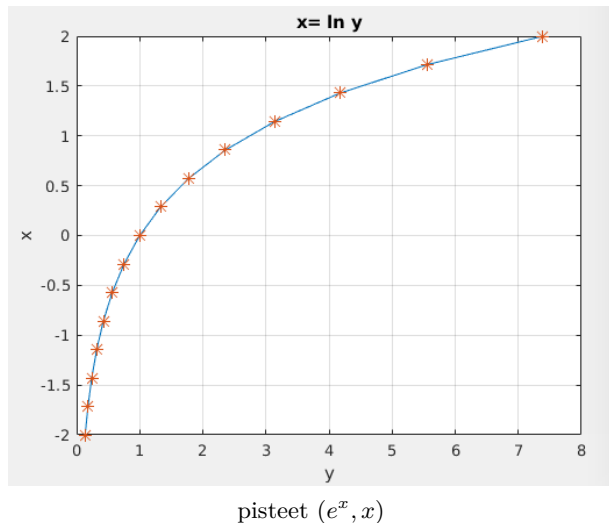
Ratkaise( $k^x = a, x$ )

$$\rightarrow \left\{ x = \frac{\ln(a)}{\ln(k)} \right\}$$

Johdatuksena pääaiheeseen onkin hyvä palauttaa mie-  
leen logaritmin tarina, sitä tytötkin tarvitsivat, ennen  
kuin oppivat rakastamaan logaritmeja :-)



Funktio  $x \mapsto e^x$  on kasvava ja jatkuva, käänteisfunktio on siis olemassa. Minkähän nimen sille antaisimme? No, olisiko mitään, jos kutsuttaisiin sitä nimellä **'luonnollinen logaritmi'**? Kuulostaa monimutkaiselta, mutta olkoon menneeksi, otetaan sentään käyttöön helppo merkintä: **ln**. Siis jos  $y = e^x$ , niin  $x$  on  $y$ :n luonnollinen logaritmi  $x = \ln(y)$ .



Tässä siis pystyakselilla ovat lähtöarvot  $x$  ja vaakakselilla tulosarvot  $y = e^x$ .

Kuvat syntyivät seuraavilla komennoilla MATLAB:ssa/OCTAVE:ssa:

```
x=linspace(-2,2,15);
y=exp(x);
plot(x,y); % Pisteet (x(k),y(k)).
hold on
plot(x,y,'*', 'MarkerSize',7);
title('y=e^x')
xlabel('x');ylabel('y')
```

Vaihdetaan  $x$  ja  $y$  plot-komennossa:

```
figure % Uusi grafiikkaruutu.
plot(y,x); % Pisteet (y(k),x(k)).
grid on;hold on
plot(y,x,'*', 'MarkerSize',8);
title('x= ln y')
xlabel('y');ylabel('x')
```

Käänteisfunktion arvot saadaan siis valmiiksi lasketuissa funktion  $f(x) = e^x$  arvopisteissä  $y_k = f(x_k)$ .

Käänteisfunktio kuvassa näkyvät merkityt (\*)-pisteet ovat tarkkoja käänteisfunktion arvoja ( $f$ -arvojen laskennan tarkkuudella), koska ne ovat lukuja  $f(x_k)$  vastaavia, pystyakselille sijoitettuja lähtöarvoja  $x_k$ .

MATLAB/OCTAVE suorittaa visuaalisesti paloittain lineaarisen interpolaation  $(y_k, x_k)$ -pisteiden välillä. Jos halutaan laskea käänteisfunktion arvo mielivaltaisessa

pisteessä  $y$ , voidaan suorittaa numeerisesti paloittain lineaarinen (tai 'palapolynomi') interpolaatio, jonka MATLAB/OCTAVE tekee visuaalisesti.

Menetelmää kutsutaan *käänteiseksi interpolaatioksi* ja sitä käytetään sopivin muunnelmin osana useita menetelmiä yhdistävissä yhtälöiden ratkaisemisen 'hybridialgoritmeissa'. Tällä kertaa en etene pitemmälle numeeristen menetelmien parissa.

Kun funktio määritellään annetun funktion  $f$  käänteisfunktiona, on paikallaan miettiä, mitä johtopäätöksiä voidaan tehdä funktion  $f$  ominaisuuksien perusteella käänteisfunktion  $f^{-1}$  ominaisuuksista. Ainakin derivaatta voidaan johtaa.

**Logaritmin derivaatta:** Käänteisfunktion derivatalle pätee  $Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ , missä  $x = f^{-1}(y)$ . Jos  $f(x) = e^x$  niin  $f^{-1} = \ln$ . Koska  $De^x = e^x$ , niin logaritmin derivaatta on  $D(\ln y) = \frac{1}{e^x}$ , missä  $e^x = y$ , joten  $D(\ln y) = \frac{1}{y}$ .

Samalla mallilla voidaan johtaa kohta määriteltävän Lambert W-funktion derivaatta. Muotoillaan harjoitustehtäväksi, kun sen aika koittaa.

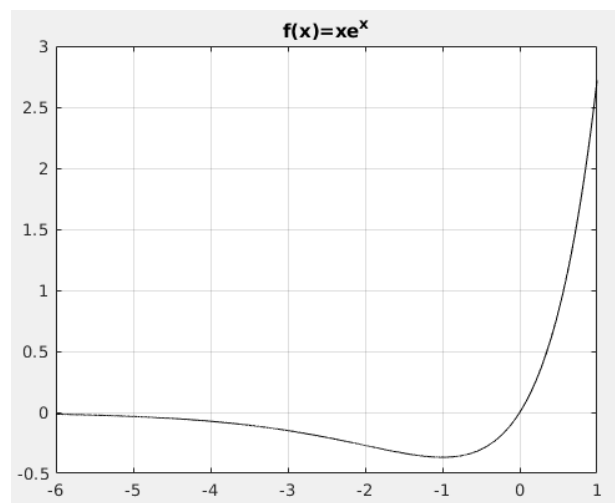
## Lambertin W-funktio

Toimitaan aivan samoin kuin edellä eksponenttifunktion ja logaritmin tapauksessa. Lähtökohtana on  $e^x$ :n sijasta funktio

$$f(x) = xe^x.$$

Lähdetään siis etsimään käänteisfunktioita tälle. Piirretään aivan kuten edellä, nyt on  $e^x$ :n sijasta  $xe^x$ :

```
f=@(x) x.*exp(x) %Funktio määrittely,huomaa(.)
x=linspace(-6,1,1000);
y= f(x);
plot(x,y,'k'); grid on
title('f(x)=xe^x')
```

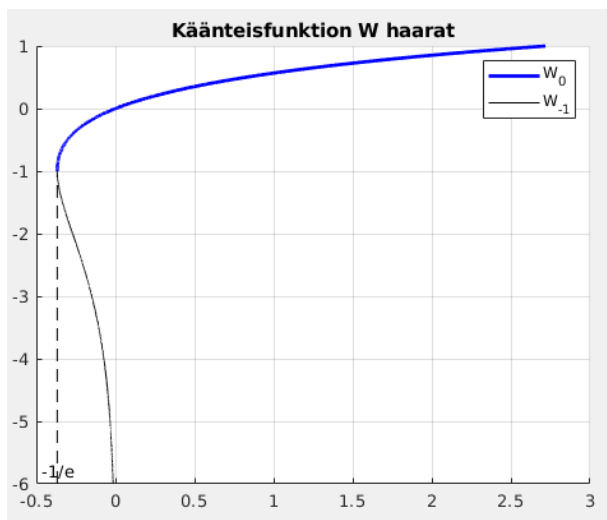


Koska  $f'(x) = e^x(x+1)$ , vahvistuu todeksi kuvan kertoma:  $f$ :n minimi on kohdassa  $x = -1$ , ja  $f$  on vähenevä vasemmalla ja kasvava oikealla puolella. Huomaa, että  $f(x) \rightarrow 0$ , kun  $x \rightarrow -\infty$ , ja  $f(x) \rightarrow \infty$ , kun  $x \rightarrow \infty$ . Minimiarvo  $f(-1) = -1/e \approx -0.367$ . Siis jos  $-1/e < y < 0$ , saadaan kaksi  $x$ :n arvoa, joille  $xe^x = y$ , ja jos  $y \geq 0$ , saadaan yksi  $x$ . Siis edellisillä  $y$ :n arvoilla on kaksiahaarainen käänteisfunktio ja jälkimmäisillä yksikäsitteinen.

Merkitään **käänteisfunktioita** tai sen haaroja  $W$ :llä tai *LambertW*:llä. Niinpä  $W$  suhtautuu funktioon  $x \mapsto xe^x$  aivan kuten *luonnollinen logaritmi*  $\ln$  suhtautuu eksponenttifunktioon  $x \mapsto e^x$ .

Piirretään käänteisfunktio aivan kuten edellä *exp/log*-puuhassa. Vaihdetaan  $x$  ja  $y$ , eli piirretään pisteet  $(y_k, x_k)$ . Jatketaan edellisen istunnon muuttujalla  $x$ .

```
x1=x(x>=-1);y1=f(x1); %1. haara -> W_0
x2=x(x<=-1);y2=f(x2); %2. haara -> W_{-1}
p1=plot(y1,x1,'b','LineWidth',2);
hold on;grid on
p2=plot(y2,x2,'r');
title('Käänteisfunktion W haarat')
legend([p1,p2],{'W_0','W_{-1}'})
e=exp(1); % e ei ole varattu symboli.
plot([-1/e -1/e],[-6,-1], '--k')
text(-1/e-0.1,-5.8, '-1/e')
```



Vaihdetaan käänteisfunktiossa  $y$ :n ja  $x$ :n roolit, ja kootaan yhteen edellä jo osittain todettua:

- Käänteisfunktion kasvava haara  $W_0$  on määritelty joukossa  $x \geq -1/e \approx -0.3679$  ja saa arvoja  $y \geq -1$ .
- Pienenevä haara  $W_{-1}$  on määritelty välillä  $-1/e \leq x < 0$  ja se saa kaikki arvot  $y \leq -1$ . Muista:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ .
- Välillä  $-1/e < x < 0$  käänteisfunktioilla on kaksi haaraa, vähenevä:  $y \leq -1$  ja kasvava:  $-1 \leq y < 0$ .

Kompleksialueella  $W$  on äärettömän moniahaarainen (kuten vaikkapa trigonometristen funktioiden käänteisfunktio jo reaaliaueella). Kompleksiset  $W$ -funktion haarat pohjautuvat kompleksialueen logaritmifunktion haaroihin, mutta niihin ei tämän kirjoituksen alue ulotu.

Merkinnällä  $W$  tarkoitetaan yleensä käänteisfunktion jotain haaraa,  $W_0$ ,  $W_{-1}$  tarkoittavat käänteisfunktion reaalista kasvavaa haaraa ja vähenevää haaraa vastavasti. Useimmissa ohjelmistoissa  $W$ -funktioilla on nimeään *lambertw*, vaihtelevan kokoisin kirjaimin, ja ensimmäinen argumentti on reaaliaueella haaraan viittaava 0 tai  $-1$ . Jos 1. argumentti puuttuu, ts. annetaan vain yksi argumentti, niin käsitellään päähaaraa  $W_0$ .

Nykyisin monet ohjelmistot ja kielet sisältävät *Lambertin funktion* koodin. Tässä on OCTAVE-onlinen help-tekstin ote, jossa samalla kerrataan ohjelman merkinöin edellä esitellyt funktion perusominaisuudet.

```
octave:1> help lambertw
-Function: lambertw(Z)
-Function: lambertw(N, Z)
This function satisfies W(z).*exp(W(z)) = z,
and can thus be used to express solutions of
equations involving exp's or log's.
N must be integer, and specifies the branch of W.
W(z) is a shorthand for W(0,z).
Branches 0 and -1 are the only ones that can
take on non-complex values.
For example, the principal branch W(0,z) passes
through the point (0, 0):
lambertw(0) -> ans = 0
lambertw(-1,0) -> ans = -Inf
And the 0 and -1 branches coincide for the
real value:
x = -1/exp(1);
lambertw(0, x) -> ans = -1
lambertw(-1, x) -> ans = -1
```

## Esimerkkejä

Yhtälöt, jotka sisältävät termejä  $x^p$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ , pyritään saattamaan muotoon  $ve^v = b$ , jolloin  $W$ -funktion määritelmästä seuraa:  $v = W(b)$ . (Vertaa tähän: Jos edellä kertoja  $v$  puuttuisi, niin ratkaisu olisi  $v = \ln b$ .)

**Esim. 1.** Ratkaise alussa olleen GEOGEBRA-istunnon yhtälö  $3^x = 2x + 2$ .

**Ratkaisu:** Yhtälössä esiintyy  $x$  ja  $3^x$ , joten *Lambertista* voisi olla apua. Pyritään aluksi muotoon  $u3^u$ , missä  $u$  on sopiva apumuuttuja:

$$3^x = 2x + 2 \iff (x+1)3^{-x} = \frac{1}{2}.$$

Kerrotaan  $-\frac{1}{3}$ :lla, jolloin  $(-x-1)3^{-x-1} = -\frac{1}{6}$ .

Merkitään  $u = -x - 1$ , otetaan 3:n sijasta  $e$  kantaluvuksi ja kerrotaan yhtälö  $\ln 3$ :lla, jotta päästään muotoon  $(*)e^{(*)} = b$ :

$$u(\ln 3)e^{u \ln 3} = -\frac{\ln 3}{6}.$$

Siis  $u \ln 3 = W(-\frac{\ln 3}{6})$ .

Lasketaan  $-\frac{\ln 3}{6} = -0.1831$ , joka kuuluu välille  $(-\frac{1}{e}, 0)$ , joten molemmat haarat  $W_0, W_{-1}$  antavat reaalisen arvon.

Näin saadaan

$$x_0 = -1 - \frac{1}{\ln 3} W_0\left(-\frac{\ln 3}{6}\right),$$

$$x_1 = -1 - \frac{1}{\ln 3} W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{6}\right).$$

Tämän tyyppisellä tekniikalla saadaan pienellä harjoittelurutiinilla yllättävän suuri joukko yhtälöitä, jotka sisältävät termejä  $x^p$ ,  $\ln x$ ,  $e^x$  ratkaistuksi Lambertin funktion avulla.

Lasketaan vielä likiarvot (OCTAVE:ssa  $\log$  on luonnollinen logaritmi):

```
>> x0=-1-lambertw(0,-log(3)/6)/log(3)
x0 = -0.7901 % Laskun tulos
>> x1=-1-lambertw(-1,-log(3)/6)/log(3)
x1 = 1.4446 % Laskun tulos
```

**Jatkotehtävä:** CAS-ratkaisu ja kuvasta tarkistaminen. Katsotaan, miten MATLAB:n symbolilaskenta selviää tehtävästä:

```
>> syms x
>> solve(3^x == 2*x + 2,x)
ans =
- lambertw(0, -log(3)/6)/log(3) - 1
```

Muuten oivallisesti, mutta toinen ratkaisu

```
- lambertw(-1, -log(3)/6)/log(3) - 1
```

jäi puuttumaan.

**Osaisiko MAPLE?** Annetaan L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X:n tulkata MAPLE:n antamat tulokset:

```
> ratk:=solve(3^x = 2*x + 2,x);
> latex(ratk[1]);
```

$$-\frac{W\left(-\frac{\ln(3)}{6}\right) + \ln(3)}{\ln(3)}$$

```
> latex(ratk[2]);
```

$$-\frac{W\left(-1, -\frac{\ln(3)}{6}\right) + \ln(3)}{\ln(3)}$$

Siispä MAPLE osasi ratkaista täydellisesti.

Kirjoituksen alkujohdannossa olevaa GEOGEBRA-kuvaa tihrustamalla näkyy, että GEOGEBRA:n CAS pärjasi tässä myös.

**Esim. 2.** Ratkaise yhtälö  $x = ae^x$ . Millä  $a$ :n arvoilla on 2, 1, 0 reaalista ratkaisua?

**Ratkaisu:** Kerrotaan yhtälö  $-e^{-x}$ :llä, jolloin

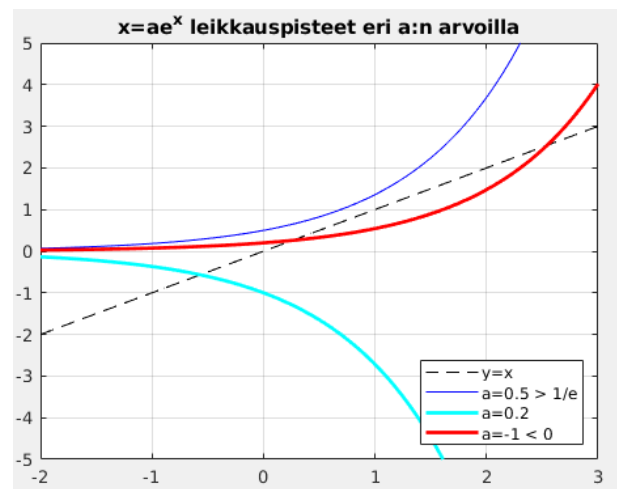
$$-a = -xe^{-x}.$$

Lambertin  $W$ -funktion määritelmän mukaan saadaan  $x = -W(-a)$ .

Katsotaan  $W$ -funktion kuvaa:

- 2 ratkaisua, kun  $-\frac{1}{e} \leq -a \leq 0$ , eli  $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$ .
- 1 ratkaisu, kun  $-a > 0$ , eli  $a < 0$ .
- 0 reaalista ratkaisua, kun  $-a < -\frac{1}{e}$ , eli  $a > \frac{1}{e}$ .

Piirretään vielä kuva yhtälön molemmista puolista valitsemalla kultakin yllä mainitulta arvoalueelta näytteeksi  $a$ :lle arvot 0.5, 0.2,  $-1$ .



Kuva tehtiin näillä komennoilla:

```
>> x=linspace(-2,3);
>> plot(x,x,'--k')
>> hold on
% 1) a > 1/e = 0.3679 => ei ratk. Esim: a=0.5
% 2) 0 < a < 1/e => 2 ratk. Esim. a=0.2
% 3) a < 0 => 1 ratk. Esim. a=-1
>> a=0.5;
>> plot(x,a*exp(x),'b') % Ei ratk.
>> a=-1;
>> plot(x,a*exp(x),'c','LineWidth',2)%1 rat
>> a=0.2;
>> plot(x,a*exp(x),'r','LineWidth',2)%2 rat
>> grid on;ylim([-5 5])
>> legend('y=x','a=0.5 > 1/e',...
          'a=0.2','a=-1 < 0')
>> title('x=ae^x leikkauspisteet...')
```



Kuva tukee yllä olevia johtopäätöksiä.

Lasketaan seuraavaksi OCTAVE:n `lambertw`-funktiolla nuo kuvassa näkyvät ratkaisut.

```
>> a=0.5
>>-lambertw(0,-a) % ans = 0.7940 - 0.7701i
>>-lambertw(-1,-a) % ans = 0.7940 - 0.7701i
```

Ei reaalisia ratkaisuja.

```
>> a=0.2
>> x0=-lambertw(0,-a) % ans = 0.2592
>> x1=-lambertw(-1,-a) % ans = 2.5426
```

2 reaalista ratkaisua.

```
>> a=-1
>> x0=-lambertw(0,-a) % ans = -0.5671
>> -lambertw(-1,-a) % ans = 1.5339 + 4.3752i
```

1 reaalinen ratkaisu.

Siispä kaikki on kuin kuvassa.

### Analyttinen vai numeerinen

Tässä on sopiva kohta palata samaan pohdiskeluun, jota harjoitettiin diffyhtälökirjoituksessa [HA1], kun 'täydennysfunktioina' olivat *Airy*n ja *Besselin* funktiot.

Tällä kertaa voitiin *Lambertin*  $W$ -funktion avulla määrittää parametri  $a$ , jota tehtävässä kysyttiin. Pelkkien numeeristen yhtälöratkaisijoiden avulla oltaisiin jouduttu katselemaan numeerisen hakuammuskelun puita näkemättä analyttisen ratkaisun tarjoamia metsiköitä. Toisaalta tehokkaat numeeriset menetelmät mahdollistavat *Lambertin funktion* hyötykäytön. Molempi siis parempi. Ja jälleen huomataan, että *analyttisen ratkaisun* käsite laajenee luontevasti laajentamalla sopivasti 'hyväksyttävien' funktioiden joukkoa.

#### Esim. 3. Ratkaise yhtälö

$$x^y = y^x.$$

Tässä on kysymys implisiittisessä muodossa annetun yhtälön ratkaisemisesta muodossa  $y(x)$  tai  $x(y)$ . Aika veikeä tehtävä, ehkä vaikeakin?

Ensinnäkin on selvää, että triviaaliratkaisu on  $y = x$ , mutta mitä muuta? Kokonaislukuratkaisuja tuskin löytyy muita kuin 2 ja 4. Viimeinen toivo taitaa olla yritys turvautua ystäväämme *Lambertiin*. Miten tuossa lähdetäisiin liikkeelle? Seuraava osoittautuu kelvolliseksi.

Korotetaan yhtälö puolittain potenssiin  $\frac{1}{x}$ :

$$x^{\frac{y}{x}} = y \implies e^{-\frac{\ln x}{x}y} = y^{-1}.$$

Kerrotaan puolittain  $y$ :llä ja sitten järjestetään kertoimeksi sama kuin eksponentissa kertomalla  $-\frac{\ln x}{x}$ :llä. Saadaan:

$$\left(-\frac{\ln x}{x}y\right)e^{-\frac{\ln x}{x}y} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Näin saatiin vasen puoli muotoon  $(*)e^{(*)}$ , ja voidaan turvautua *Lambertin* apuun:

$$-\frac{\ln x}{x}y = W\left(-\frac{\ln x}{x}\right).$$

Siispä

$$y = -\frac{W\left(-\frac{\ln x}{x}\right)x}{\ln x}.$$

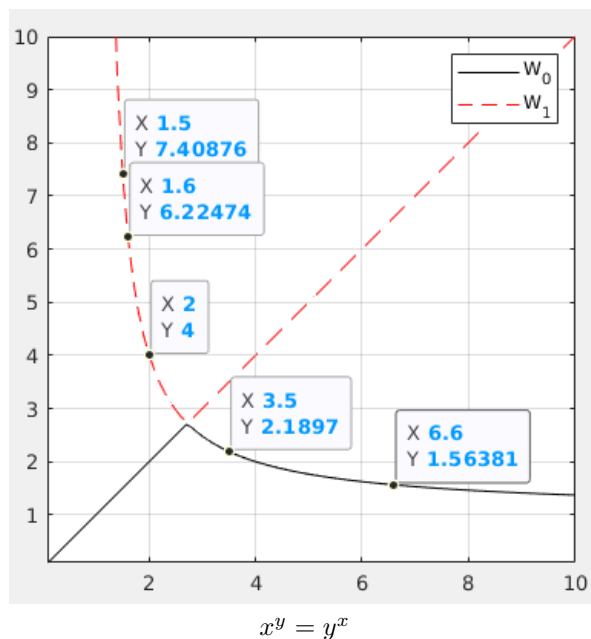
**Miltä näyttää kuvaaja?** Puolet kuvasta saadaan tähän tapaan:

```
x=linspace(.1,10);
y=-x./log(x).*lambertw(-log(x)./x);
plot(x,y)
```

Toinen puoli saadaan käyttämällä laskevaa haaraa  $W_{-1}$ , jolloin täytyy rajoittua niihin  $x$ :n arvoihin, joilla

$$-\frac{1}{e} < -\frac{\ln x}{x} < 0.$$

Vaihtoehtoisesti voitaisiin käyttää hyväksi symmetriää, eli vaihtaa  $x$  ja  $y$ , jolloin saataisiin kuvan puuttuva puolikas taas päähaaran  $W_0$  avulla. Kuva tehtiin edellisellä tyyllillä (ja siihen jäi pikku virhe:  $W_1$  pitää lukea:  $W_{-1}$ ).



Kuvasta (hiirikäden tarkkuudella) poimittujen arvojen avulla voit testata yhtälön toteutumista likimäärin.

Vertailun vuoksi voidaan piirtää myös implisiittimuodossa 0- korkeuskäyrä *contour*-funktiolla, joka edustaa 'raakaa voimaa' verrattuna hienostuneeseen *Lambert*-käsittelyyn. Yksityiskohdat tästä, kuten kaikista muis-takin kirjoituksen koodeista ovat viitteessä [HA2].

## Mihin muuhun *LambertW* kelpaa?

Viite [CGHJK] on perusteellinen esitys aiheesta sisältäen suuren joukon matematiikan ja luonnontieteiden sovellusaloja. Mainitsen tässä vain yhden, joka liittyy sekä edelliseen esimerkkiin että Solmun numerossa 1/2021 olleeseen 'Delfinikirjoitukseen' [HA1]. Siinä esittelin yhtenä ratkaisutekniikkana 'muuttujien erottelun'. Mainitsin, että tämä menettely johtaa usein implisiittiseen (ratkaisemattomassa muodossa olevaan) yhtälöön  $y:n$  ja  $x:n$  välillä. Viitteessä [CGHJK] esitellään palamisilmiöön liittyvä 'Model combustion problem', jota kuvaa alkuarvotehtävä

$$y' = y^2(1 - y), \quad y(0) = \epsilon > 0.$$

Siinä näytetään muuttujien erottelulla aikaansaatu impliittinen yhtälö, josta artikkelin kirjoittajat johtavat  $W$ -funktion avulla esitettävän eksplisiittisen ratkaisun.

Värikäs visuaalinen tiivistelmä *Lambert*-teemasta on nähtävissä ja seinätauluksi ladattavissa **Lambert-posterissa**:

<http://www.orcca.on.ca/LambertW/>

**Käy ihmeessä katsomassa, se on ihan MUST!**

## Muutama sana $W$ -funktion laskennasta

Julkaisu [CGHJK] on perusteellinen tietolähde koko aihepiiriin '*Lambertin funktio*'. Siinä kerrotaan, kuinka MAPLE-symbolilaskentaohjelmiston kehitysryhmä täydennettynä Donald Knuth'illa ryhtyi tutkimaan sen historiaa ja erilaisia käyttömahdollisuuksia sekä erityisesti kehittämään numeerista algoritmia, joka olisi kyllin tehokas ja tarkka, jotta se täyttäisi CAS-ohjelman 'mielivaltaisen tarkkuuden' vaatimuksen ja toimisi tehokkaasti myös singulaaripisteen lähistöllä vieläpä funktion kompleksihaarojen suhteen. Julkaisussa pohditaan myös nimien *LambertW* ja  $W$  historiaa ja sen useitakin 'uudelleen löytymisiä' myös mm.  $\Omega$ -nimisenä. Matemaatikot *Polya* ja *Szegö* (1925) arvelaan myös nimen  $W$  ensimmäiseksi käyttäjiksi.

Tekijät kehittivät 'mielivaltaisen tarkkuuden' laskenta-algoritmin, joka siis kirjoitettiin MAPLE-ohjelmistolle. Algoritmi on toteutettu '*Halley'n menetelmällä*', joka on vähemmälle huomiolle jäänyt 'terästys' tunnetulle *Newtonin menetelmälle*. Julkaisu [CM] on helppo-lukuinen tiivistelmä, joka sisältää myös hyvin selkeän, *Halley'n menetelmällä* kirjoitetun MATLAB-koodin  $W$ -funktioille.

Nykyisin tämä funktio sisältyy moniin ohjelmointikieliin ja ohjelmistoihin nimellä *LambertW* tai esim. *lambertw*, kuten 'meidän' OCTAVE:ssa. CAS-ohjelmistoista mainittakoon edellä mainittujen lisäksi MAXIMA, MATHEMATICA ja Wolframin vastaava julkinen tuote WOLFRAM ALPHA. (Kts. myös [WF].)

**Derivaatta** voidaan johtaa käänteisfunktion derivointikaavan avulla, kuten yllä logaritmin tapauksessa tai implisiittisen derivoinnin avulla kaavasta

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Saadaan:  $W'(x)e^{W(x)}(1 + W(x)) = 1$ ,

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1 + W(x))} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

Jälkimmäinen muoto saadaan sijoittamalla  $e^{W(x)}$ :n paikalle  $\frac{x}{W(x)}$ . Jos haluaisimme laskea arvon  $W'(0)$ , pitäisi käyttää edellistä muotoa, josta saadaan  $W'(0) = 1$ . Kokeilemani CAS-ohjelmat palauttavat jälkimmäisen muodon, jota ei voi käyttää arvolla  $x = 0$ . CAS-ohjelmien puutteena on usein erikoispisteiden käsittely, mistä jokaisella 'vakavalla' käyttäjällä lienee kokemuksia. (Kts. myös [CJ].)

**Tehtävä:** Huomaa, että yllä  $W$  tarkoittaa kumpaa tahansa haaraa  $W_0, W_{-1}$ . Piirrä derivaattafunktion kummankin haaran kuvaajat ja vertaa niitä edellä olevaan *Lambertin* funktion kuvaajaan. Valitse piirtoalue sopivasti väliä  $-\frac{1}{e} < x < 0$  tapauksessa  $W_{-1}$  ja aluetta  $x > -\frac{1}{e}$  tapauksessa  $W_0$  reunoilta (reunalta) supistaen. Mallia voit ottaa tiedostoista [HA2].

**Siis lopultakin: "Mikä ihmeen *LambertW*?"**

Saivatkohan *Elle* ja *Vilja* valaistusta kysymykseen?

## Viitteet

[CGHJK] Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey, and D. E. Knuth: *Advances in Computational Mathematics*, Vol 5 (1996) 329–359, ladattavissa:

<https://cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf>

[CM] Cleve Moler: <https://blogs.mathworks.com/cleve/2013/09/02/the-lambert-w-function/>

[Poster] <http://www.orcca.on.ca/LambertW/>

[Wiki] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert\\_W\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function)

[WF] <https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>

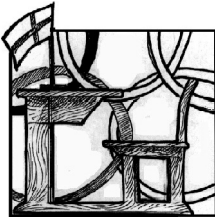
[HA1] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/1/diffyhtaloita.pdf>

[HA2] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/2/skriptit/>

Sisältää tiedostot *LambertSkriptit.m* ja *LambertSkriptitLIVE.pdf*. Edellisessä on koodit (MATLAB, OCTAVE), jälkimmäinen MATLAB:n tyylikäällä 'LiveEditorilla' ajettu pdf.

[Oct] <https://octave.org/doc/v6.2.0/>

[CJ] R.M. Corless and D.J. Jeffrey, "Well, It Isn't Quite That Simple", SIGSAM Bulletin, 26, 3 (1992) 2–6.



## Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2021

*Veera Nurmela, Tianyue Sun ja Anni Tapionlinna*

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset eli EGMO järjestettiin jo toista kertaa etäkilpailuina 9.–15.4.2021. Kilpailujen järjestäjämäana toimi Georgia. Suomi sijoittui parhaiten osallistuneista Pohjoismaista, ollen 45. yhteensä 55 joukkueen joukossa. Suomen joukkueeseen kuuluivat Aino Aulanko, Veera Nurmela, Tianyue Sun ja Anni Tapionlinna.

Tehtävät olivat molempina kilpailupäivinä haastavat, mikä näkyi matalina mitalirajoina. Tänä vuonna pronssimitalin saamiseen olisi riittänyt kahdeksan pistettä, kun jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on seitsemän pistettä.

### Veera Nurmelan kokemuksia kilpailusta

Sain kunnian osallistua nyt neljättä kertaa Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisiin. Kilpailu oli, kuten edellisinä vuosinakin, hieno kokemus. Kilpailusta jäi mieleen niin matematiikkaan liittyviä ajatuksia kuin muistoja mukavista tapahtumista.

Vaikka kilpailut järjestettiin etänä, sain tutustua joukkueeseemme ja muiden maiden kilpailijoihin internetin välityksellä sekä mielenkiintoisiin tehtäviin. Kilpailun perinteiset alkuperäiset ja loppuseremoniat olivat juhlallisia etätapahtumia. Muihin kilpailijoihin pääsin tutustumaan rennosti pelien ja muiden yhteisten aktiviteettien kautta.

Harjoittelin kilpailuihin ylioppilaskirjoitusten kiireiden loputtua edellisvuosien tehtävien ja valmennuksen ma-

teriaalin avulla. Odotin kilpailua hieman jännittyneenä, sillä luvassa oli taas haastavia matemaattisia ongelmia.

Oletetusti tänäkin vuonna tehtävät olivat vaikeita, mutta monilta osin lähestyttävää. Neljän ja puolen tunnin kilpailuaika kului molempina päivinä hujauksessa. Ensimmäisenä päivänä ensimmäinen lukuteorian tehtävä oli kiinnostava. Sain nopeasti tähän tehtävään ideoita siitä, millaisella jaollisuuteen perustuvalla tavalla voitaisiin päätellä lukujen olevan ihkuja. Kuitenkin liian nopea ideointini tuotti ajatteluvirheen, jonka huomasin ensimmäisen kilpailupäivän jälkeen.

Toinen päivä sujui paremmin, tehtävissä oli omaa suosikkialuettaani geometriaa ja kombinatorista geometriaa. Geometrian tehtävän kanssa pääsin hyvin vauhtiin ja löysin tehtävän ratkaisun kannalta olennaisia tuloksia. Kuitenkaan en ehtinyt näitä kaikkia osoittamaan ja viemään tehtävää loppuun. Tehtävät osoittautuivat vaikeiksi muillekin ja sijoitukseni olikin suhteellisesti parhaani.

Olin hyvin iloinen, että pääsin osallistumaan kilpailuun vielä viimeistä kertaa. Matematiikkavalmennuksen ja kilpailuiden myötä on ollut mukava seurata omaa kehitystäni, kohdata kerta toisensa jälkeen haastavia ongelmia sekä tavata muita matematiikasta innostuneita henkilöitä. Vuosien aikana olen huomannut, että tehtäviin löytää entistä enemmän ja nopeammin uusia ideoita sekä tehtäviä tehdessä on kriittisempi oman ratkaisun paikkansapitävyyteen.

## Tehtäviä

**Tehtävä 1.** Luku 2021 on *ihku*. Jos yksikään joukon  $\{m, 2m+1, 3m\}$  alkio on ihku, kun  $m$  on positiivinen kokonaisluku, niin ne kaikki ovat ihkuja. Seuraako tästä, että luku  $2021^{2021}$  on ihku?

**Tehtävä 2.** Määritä kaikki funktiot  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , joilla yhtälö

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

pätee kaikilla rationaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ .

**Tehtävä 3.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa on tylppä kulma  $A$ . Olkoot  $E$  ja  $F$  ne pisteet, joissa kulman  $A$  ulkokulman puolittaja leikkaa kolmion  $ABC$  kärkien  $B$  ja  $C$  kautta kulkevat korkeusjanat tai niiden jatkeet (tässä järjestyksessä). Olkoot  $M$  ja  $N$  sellaiset janojen  $EC$  ja  $FB$  pisteet (tässä järjestyksessä), että  $\angle EMA = \angle BCA$  ja  $\angle ANF = \angle ABC$ . Osoita, että pisteet  $E, F, N, M$  ovat ympyrällä.

**Tehtävä 4.** Olkoon kolmion  $ABC$  sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste  $I$  ja olkoon  $D$  mielivaltainen piste sivulla  $BC$ . Piste  $D$  kautta kulkeva suoran  $BI$  kanssa kohtisuora suora leikkaa suoran  $CI$  pisteessä  $E$ . Piste  $D$  kautta kulkeva suoran  $CI$  kautta kohtisuora suora leikkaa suoran  $BI$  pisteessä  $F$ . Todista, että pisteen  $A$  peilaus suoran  $EF$  suhteen on suoralla  $BC$ .

**Tehtävä 5.** Tasossa on erityinen piste  $O$ , jota kutsutaan origoksi. Olkoon  $P$  tason 2021 pisteen joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- (i) mitkään joukon  $P$  kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja
- (ii) mitkään kaksi joukon  $P$  pistettä eivät ole suoralla, joka kulkee origon kautta.

Kutsutaan kolmiota *pulleaksi*, jos sen kärjet ovat joukossa  $P$  ja piste  $O$  on aidosti kolmion sisäpuolella. Määritä pulleiden kolmioiden suurin mahdollinen lukumäärä.

**Tehtävä 6.** Onko olemassa epänegatiivista kokonaislukua  $a$ , jolle yhtälöllä

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

on yli miljoona eri ratkaisua  $(m, n)$ , missä  $m$  ja  $n$  ovat positiivisia kokonaislukuja?

## Ratkaisut tehtäviin 1, 3 ja 4

### Tehtävä 1

Vastaus: Kyllä,  $2021^{2021}$  on ihku. Todistetaan tämä kahden lemmän avulla.

**Lemma 1.** 1 ja 2 ovat ihkuja

**Todistus lemmalle 1.** Käyttämällä kaavoja  $m, 2m+1$  ja  $3m$  takaperin saadaan:

$$2021 \rightarrow 673 \rightarrow 224 \rightarrow 74 \rightarrow 24 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1.$$

Täten luvut 1 ja 2 ovat ihkuja.

**Lemma 2.**  $n$  on ihku  $\Leftrightarrow 3n, 3n+1, 3n+2$  ovat ihkuja.

**Todistus.**

$$n \rightarrow 3n$$

$$n \rightarrow 2n+1 \rightarrow 6n+3 \rightarrow 3n+1$$

$$n \rightarrow 2n+1 \rightarrow 4n+3 \rightarrow 12n+9 \rightarrow 36n+27$$

$$\rightarrow 18n+13 \rightarrow 9n+6 \rightarrow 3n+2.$$

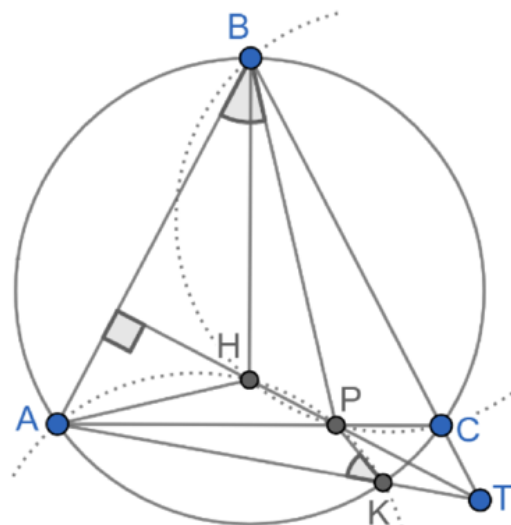
Täten siis  $n$  on ihku vain jos  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  on.

Täten lemmoista 1 ja 2, operaatioiden  $n \rightarrow 3n, n \rightarrow 3n+1, n \rightarrow 3n+2$  avulla lähtien luvuista  $n=1$  ja  $n=2$ , saadaan, että jokainen positiivinen kokonaisluku on ihku, joten  $2021^{2021}$  on ihku.

### Tehtävä 3

Tämän tehtävän ratkaisu perustuu lemmaan, jonka todistus esitetään ennen itse tehtävän ratkaisua.

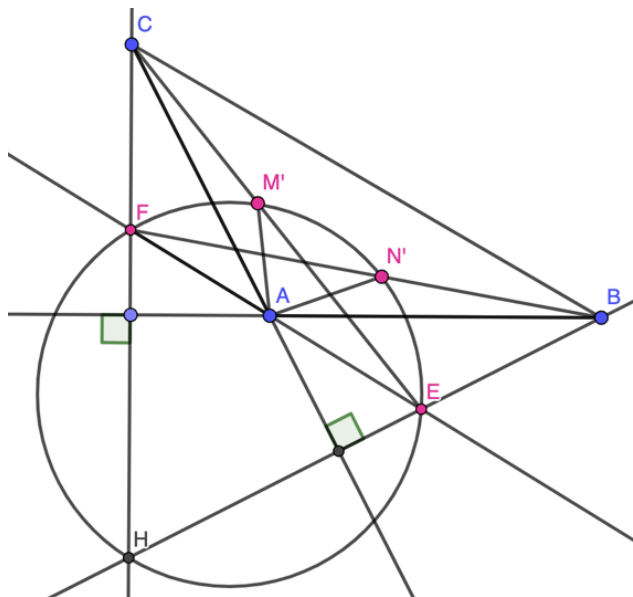
**Lemma.** Olkoon  $ABC$  tasakylkinen kolmio, jolla  $AB=BC$  ja olkoon  $P$  jokin piste janalla  $AC$ . Piste  $P$  kautta kulkeva normaali janalle  $AB$  kohtaa janan  $BC$  jatkeen pisteessä  $T$ . Jos  $AT$  kohtaa kolmion  $ABC$  ympäripiirretyn ympyrän uudelleen pisteessä  $K$ , niin  $\angle AKP = \angle ABP$ .



**Todistus.** Olkoon  $H$  kolmion  $ABC$  ortokeskus. Tällöin  $\angle BHP = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BCP$ , eli

$BHPC$  on jännelikulmio. Tästä saamme  $TK \cdot TA = TC \cdot TB = TP \cdot TH$ , josta seuraa se, että  $AHPK$  on myös jännelikulmio. Nyt  $\angle AKP = 180^\circ - \angle AHP = \angle ABP$  ja väite on todistettu.

Nyt voimme palata tehtävän ratkaisuun.



$H$  on  $B$ :n ja  $C$ :n kautta kulkevien korkeusjanojen leikkauspiste. Piirretään kolmion  $HEF$  ympäri ympyrä ja merkitään  $M'$ :lla ja  $N'$ :lla sen leikkauspisteitä janojen  $EC$  ja  $BF$  kanssa. Haluamme nyt osoittaa, että  $M = M'$  ja  $N = N'$ , sillä tästä seuraa, että  $E, F, M$  ja  $N$  ovat samalla ympyrällä.

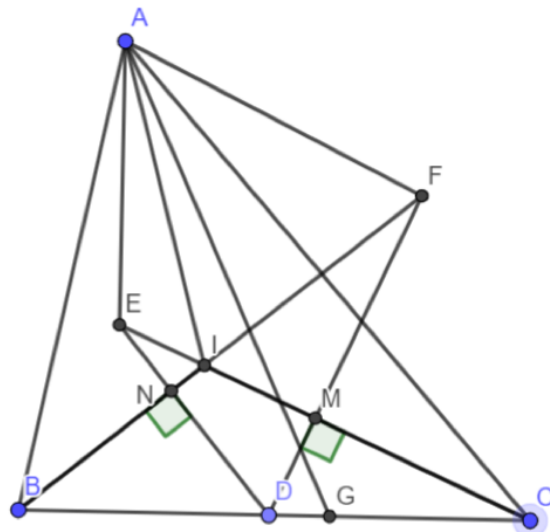
Selkeästi  $A$  on kolmion  $BHC$  ortokeskus. Tästä seuraa, että  $\angle BHA = \angle BCA$ ,  $\angle CHA = \angle CBA$  ja  $\angle HBA = \angle HCA$ .

Nyt  $\angle HEF = \angle HBA + \angle EAB = \angle HCA + \angle FAC = \angle HFE$  eli kolmio  $HEF$  on tasakylkinen kolmio, jossa  $HE = HF$ .

Aikaisemmin todistetun lemmän mukaan  $\angle AM'E = \angle AHE = \angle ACB$  sekä  $\angle AN'F = \angle AHF = \angle ABC$ . Tästä seuraa, että  $N' = N$  sekä  $M' = M$  ja olemme valmiit.

#### Tehtävä 4

Pyritään ensin todistamaan, että  $AFIE$  on jännelikulmio.



$I$  on kolmion  $ABC$  kulmanpuolittajien leikkauspiste. Täten  $\angle IBA = \angle DBF$ . Kolmiosta  $BAI$  saadaan, että  $\angle AIB = 180^\circ - \angle BAI - \angle IBA$ . Huomataan, että  $\angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB = 90^\circ - (\angle BAI + \angle IBA)$ . Saadaan

$$\begin{aligned} \angle FDB &= 180^\circ - \angle CDF \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle DMC - \angle ICB) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - (\angle BAI + \angle IBA))) \end{aligned}$$

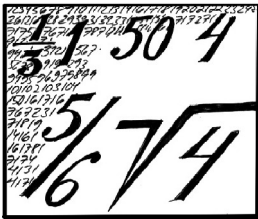
ja  $\angle FDB = 180^\circ - \angle BAI - \angle IBA = \angle AIB$ . Täten  $\angle FBD = \angle AIB$  ja  $\angle IBA = \angle DBF$ , ja seuraa  $\angle BAI = \angle BFD$ . Siis kolmiot  $\triangle FDB$  ja  $\triangle AIB$  ovat yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta saadaan  $\frac{AB}{AF} = \frac{BI}{BD}$ . Tiedetään, että  $\angle DBI = \angle IBD$ . Täten kolmiot  $\triangle IBD$  ja  $\triangle ABF$  ovat yhdenmuotoiset, sks. Täten siis  $\angle IDB = \angle AFB$ . Vastaavasti voidaan osoittaa, että kolmiot  $\triangle EDC$  ja  $\triangle AIC$  sekä kolmiot  $\triangle IDC$  ja  $\triangle AEC$  ovat yhdenmuotoisia, saadaan  $\angle CDI = \angle CEA$ . Saadaan  $180^\circ = \angle CDI + \angle IDB = \angle IEA + \angle AFI$ . Täten  $AFIE$  on jännelikulmio.

Olkoon  $G$  kolmioiden  $AEC$  ja  $AFB$  ympärisympyröiden leikkauspiste. Osoitetaan nyt, että  $G$  on sivulla  $BC$ .

Koska  $AEGC$  on jännelikulmio,  $\angle CEA = \angle CGA$  ja vastaavasti jännelikulmiosta  $AFGB$  saadaan  $\angle AFB = \angle AGB$ . Täten  $\angle CEA + \angle AFB = 180^\circ = \angle CGA + \angle AGB$ . Täten  $G$  on sivulla  $BC$ .

Koska  $AEGC$  on jännelikulmio ja  $EC$  on kulmanpuolittaja, on  $AE = EG$ . Myöskin, koska  $AFGB$  on jännelikulmio ja  $FB$  kulmanpuolittaja, on  $AF = FG$ . Täten kolmiot  $\triangle AEF$  ja  $\triangle EFG$  ovat yhtenevät, sss. Täten  $G$  on piste  $A$  peilattuna sivun  $EF$  suhteen.





## Kun skaalaat, skaalaa kunnolla!

*Jukka Liukkonen*

Mat. yo. evp.

### Johdanto

Todellakin, kysymys on skaalaamisesta, ei skaalaamisesta!

Jos tehtävänä on piirtää tietokoneella kuvaaja tunte-mattomalle funktiolle, heti aluksi on päätettävä, mille välille muuttujan arvot rajoitetaan. Ensimmäinen arvaus voi mennä pahasti pieleen, ja funktion oleelliset piirteet eivät tule esille. Tässä kirjoitelmassa perehdytään skaalauksen saloihin ja erityisesti siihen, mitä mielenkiintoista tapahtuu, kun skaalataan liikaa.

Suunnistaja liikkuu maastossa sitä kuvaavan kartan opastamana. Suunnistuksessa kartan mittakaavalla on oleellinen merkitys. Suunnistuskarttojen mittakaavat ovat normaalisti välillä 1:4 000 – 1:15 000. Suurimmassa mittakaavassa 1:4 000 yksi senttimetri kartalla vastaa 4 000 senttimetriä eli 40 metriä maastossa. Sellaisessa kartassa maaston pienetkin yksityiskohdat ovat tarkasti esillä. Pienimmän mittakaavan 1:15 000 kartassa yksi karttasenttimetri vastaa 150 maastometriä. Kartta kattaa suuren alueen, mutta maaston pienimmät piirteet ovat karsiutuneet pois.

Funktioiden kuvaajat ja muut tasokäyrät ovat esimerkkejä tavallisen euklidisen tason osajoukoista. Taso voidaan ajatella maastona ja tason osajoukot maaston piirteinä. Kun funktion kuvaaja piirretään tietokoneen kuvaruudulle, on kysymys suorakulmion muotoisen maastoalueen tarkastelemisesta toisessa mittakaavassa kartan avulla. Kuvaruudulle piirretty kuva on tuo

kartta. Kartan mittakaavaa muuttamalla voidaan piirtää kuvia erikokoisista maastoalueista ilman, että kartan kokoa tarvitsee muuttaa. Jos kartalla yksikön mit-tainen matka vastaa maastossa  $\lambda$  yksikköä, mittakaava on  $1:\lambda$ . Mitä suurempi  $\lambda$ , sitä pienempi mittakaava, ja sitä suuremman alueen kartta kattaa. Karttasuorakulmion ja maastosuorakulmion tulee olla yhdenmuotoiset, muuten mittakaava on erilainen eri suunnissa.

Aikaisemmin mainittiin liiallinen skaalaus. **Jos skaalaat liikaa, tee se kunnolla, kaikki kohtuuden rajat ylittäen, kaikki!** Tarkoituksena on tutkia tilannetta, jossa kartan mittakaava joko pienenee rajatta ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) tai suurenee rajatta ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Maailman-kaikkeuttakin havainnoidaan toisaalta valtavilla teleskooppeilla ja toisaalta elektronimikroskoopeilla. Fyysikot ovat vuosikymmenien ajan sinnikkäästi yrittäneet yhdistää mikro- ja makrokosmoksen ilmiöt yhden yhtenäisen teorian alle, mutta toistaiseksi yritykset eivät ole tuottaneet yleisesti hyväksyttyä kaiken teoriaa. Mitä on matematiikassa? Voidaanko mikro- ja makrokoluokassa havaita samankaltaisuuksia?

### Maastotason ja karttatason välinen muunnos

Maastokoordinaateista puhuttaessa tarkoitetaan euklidisen tason tavallisen suorakulmaisen  $xy$ -koordinaatiston koordinaatteja. Tarkasteltava alue maastossa, josta kartta piirretään, sovitaan origokeskiseksi neliöksi

(saks. *das Quadrat*)<sup>1</sup>

$$Q_\lambda := \{(x, y) \mid -\lambda \leq x \leq \lambda, -\lambda \leq y \leq \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Karttakoordinaatisto nimetään  $uv$ -koordinaatistiksi. Kartta (engl. *map*) on vakiokokoinen origokeskinen neliö

$$M := \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}.$$

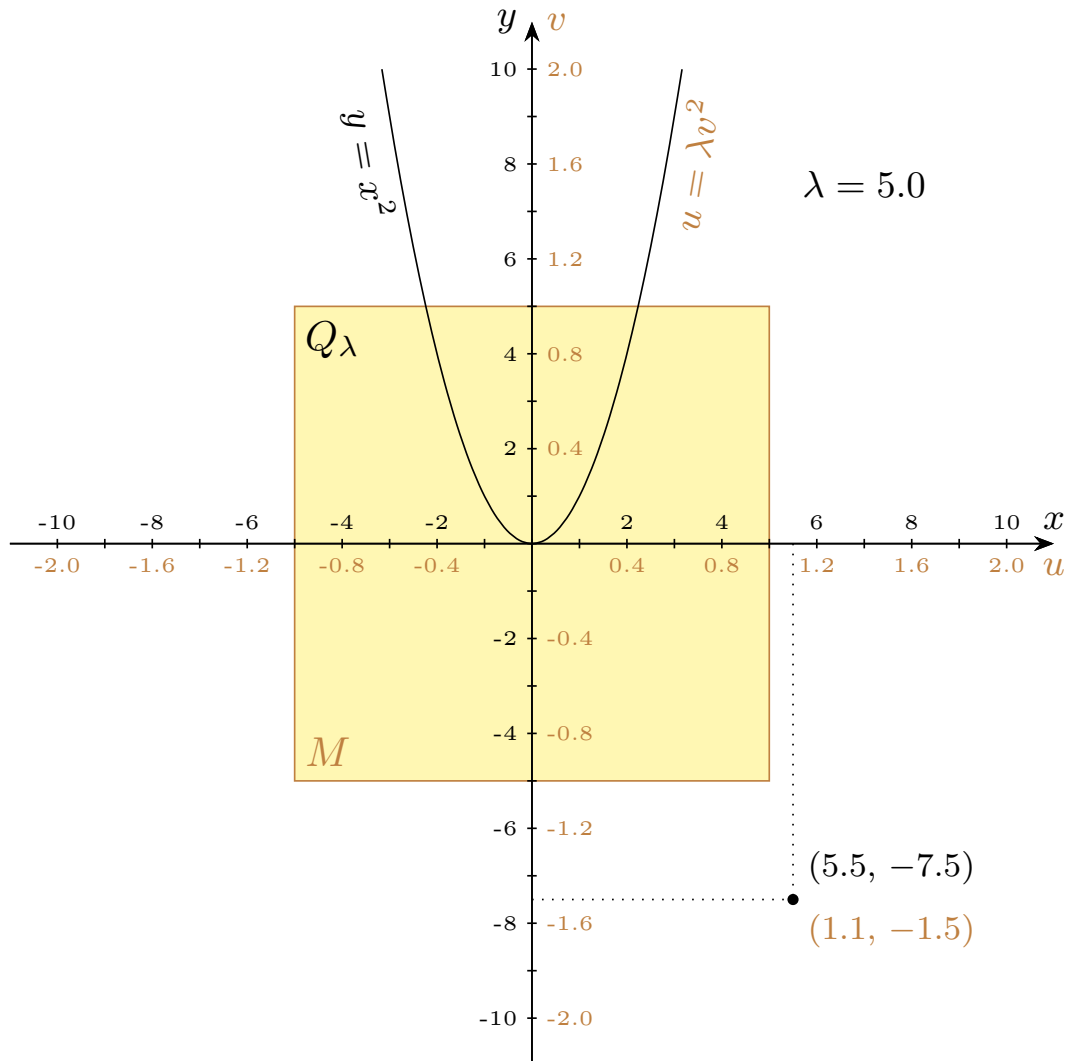
Se vastaa tietokoneen näytöllä ikkunaa, johon kuvaajia on tarkoitus piirtää.

Maastoneliön  $Q_\lambda$  ja kartan  $M$  pisteet vastaavat toisiinsa kääntäen yksikäsitteisesti. Vastaavuuden välittää skaalauskuvaus eli **homotetia**

$$h_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (\lambda u, \lambda v).$$

Vasemmalla puolella  $\mathbb{R}^2$  on  $uv$ -karttataso, oikealla puo-

lella  $\mathbb{R}^2$  on  $xy$ -maastotaso. Oikeastaan on kysymys yhdestä ja samasta tasosta, johon on asetettu kaksi eri koordinaatistoa: kiinteä  $xy$ -maastokoordinaatisto ja parametrin  $\lambda$  arvosta riippuva  $uv$ -karttakoordinaatisto. Origon ja koordinaattiakselien osuvat kohdakkain kummassakin koordinaatistossa, ainoastaan asteikot eroavat toisistaan, kun  $\lambda \neq 1$ . Tästä johtuen pisteen  $uv$ -koordinaatit pitää kertoa luvulla  $\lambda$ , jotta saataisiin saman pisteen  $xy$ -koordinaatit. Esimerkki: jos parametrilla  $\lambda$  on arvo 5.0, karttakoordinaateissa lausuttu piste  $(u, v) = (1.1, -1.5)$  on maastokoordinaateissa lausuttuna  $(x, y) = (5.5, -7.5)$ . Piste säilyy samana, ainoastaan pisteen paikan ilmoittamisen tapa muuttuu. Tilannetta on havainnollistettu oheisessa kuvassa. Koordinaatistosta toiseen siirtyminen tarkoittaa tässä tapauksessa mittayksikön vaihtoa. Vertailun vuoksi voidaan ajatella siirtymistä metrijärjestelmästä tuumajärjestelmään.



<sup>1</sup>Symbolien merkitykset tullaavat lukiessa unohtumaan, ja ne joudutaan palauttamaan mieleen kahlaamalla tekstiä taaksepäin. Muistamisen helpottamiseksi ja hankalan kahlaamisen välttämiseksi tärkeimmät symbolit assosioidaan niiden kielelliseen alkuperään.

Jos  $xy$ -maastokoordinaatistossa olisi valmiina käyrä kuten kuvassa, se siirrettäisiin tietokoneen kuvaruudulle seuraavaan tapaan vaiheittain:

- 1) kiinnitetään mittakaava ja maastoalueen koko valitsemalla arvo parametrille  $\lambda$ ;
- 2) kiinnitetään maastoon  $uv$ -karttakoordinaatisto, joka on muuten sama kuin  $xy$ -maastokoordinaatisto, mutta  $uv$ -yksikkö on  $\lambda$  kertaa niin suuri kuin  $xy$ -yksikkö;
- 3) siirretään  $2 \times 2$  yksikön kokoinen  $uv$ -neliö  $M$  kuvaruudulle  $2 \times 2$  kuvaruutuyksikön kokoiseksi kartaksi.

Todellisuudessa mitään valmista käyrää ei ole olemassa. Sen sijaan on olemassa käyrän piirto-ohje yhtälön muodossa, kuvan mukaisessa tilanteessa  $y = x^2$ . Se muunnetaan  $uv$ -koordinaatistoon homotetian  $h_\lambda$  avulla. Tuloksena on yhtälö  $\lambda v = (\lambda u)^2$  eli yhtäpitävästi  $v = \lambda u^2$ . Yhtälö upotetaan tietokoneohjelmaan ja lasketaan käyrän pisteiden  $v$  koordinaatit riittävän tiheälle  $u$ -koordinaattien taulukolle. Kuvaruudulla  $uv$ -koordinaatiston yksikön pituus voidaan valita vapaasti. Esimerkiksi 9 cm saattaa olla sopiva mittayksikön koko kannettavan tietokoneen ruudulla. Tällöin  $M$  nähdään ruudulla  $18 \times 18$  neliösenttimetrin kokoisena neliönä. Kuvaa ja piirretään lasketun koordinaattitaulukon mukaisesti piirtokomennolla. Graafiseen käyttöliittymään voidaan lisätä parametrin  $\lambda$  arvoa muuttava liukusäädin. Näin kuvaa voidaan zoomailla helposti ja mielin määrin.

Kuten edellä jo esimerkillä näytettiin, käyrät useimmiten esitetään yhtälöinä, ja ne puolestaan voidaan  $xy$ -koordinaatistossa kirjoittaa muotoon

$$f(x, y) = 0,$$

missä  $f$  on sopiva kahden muuttujan funktio. Vastaava käyrän yhtälö  $uv$ -koordinaatistossa on

$$f(\lambda u, \lambda v) = 0.$$

Käyrän piirrettävä osa on  $xy$ -tason pistejoukko

$$\{(x, y) \in Q_\lambda \mid f(x, y) = 0\},$$

ja sitä vastaa kartalla joukko

$$\{(u, v) \in M \mid f(\lambda u, \lambda v) = 0\}.$$

Homotetialla  $h_\lambda$  on käänteiskuvas

$$h_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v) = \left( \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda} \right).$$

Jos taso ajatellaan vain tasona  $\mathbb{R}^2$  ilman tulkintaa toisaalta karttatasoksi ja toisaalta maastotasoksi, voidaan kirjoittaa

$$h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}.$$

Mikä tahansa tason osajoukko  $A_1$  mittakaavaan  $1:\lambda$  skaalattuna on

$$\begin{aligned} A_\lambda &:= \{(x/\lambda, y/\lambda) \mid (x, y) \in A_1\} \\ &= \{h_{1/\lambda}(x, y) \mid (x, y) \in A_1\} = h_{1/\lambda}(A_1). \end{aligned}$$

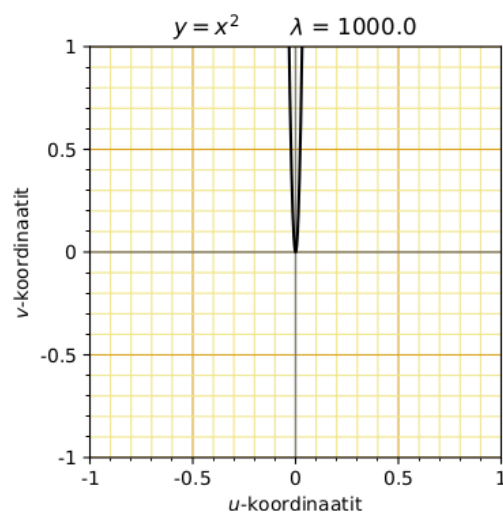
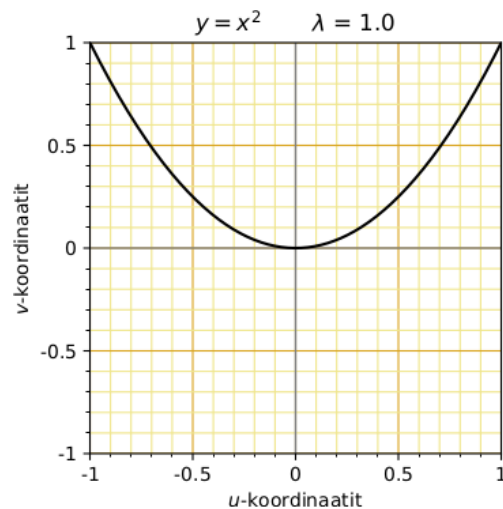
### ▼ Esimerkki

Perusparaabeli on niiden pisteiden  $(x, y)$  joukko, jotka toteuttavat yhtälön  $y = x^2$ . Jos funktio  $f$  määritellään asettamalla  $f(x, y) = y - x^2$ , paraabelin yhtälö saa muodon  $f(x, y) = 0$ . Paraabeli on siis kahden muuttujan funktion  $f$  nollakohtien joukko

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}.$$

Karttakoordinaatistossa paraabelin yhtälö on

$$f(\lambda u, \lambda v) = 0 \Leftrightarrow \lambda v - (\lambda u)^2 = 0 \Leftrightarrow v = \lambda u^2.$$



Ensimmäisessä kuvassa paraabeli on piirretty “luonnollisessa koossa” mittakaavassa 1:1. Seuraavassa kuvassa mittakaava on 1:1 000. Kun mittakaavaa pienennetään,

paraabeli alkaa yhä enemmän muistuttaa origossa seisovaa tikkua, so. positiivista  $v$ -akselia ml. origo. Kuvaan on merkitty karttakoordinaattiasteikko. Maastossa eli  $xy$ -koordinaatistossa kartta kattaa  $2000 \times 2000$  kokoisen alueen. ▲

### ▼ Esimerkki

Hyperbelin yhtälö  $x^2 - y^2 = 1$  lausuttuna  $uv$ -koordinaatistossa on

$$(\lambda u)^2 - (\lambda v)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - v^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

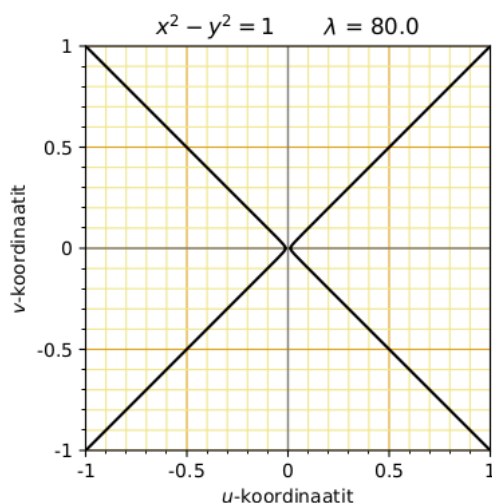
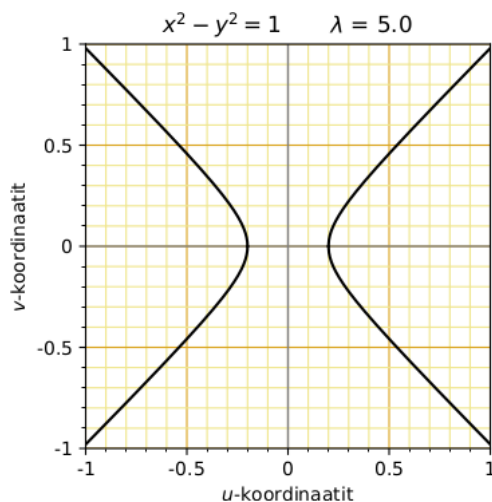
Tässä

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - y^2 - 1, \\ f(\lambda u, \lambda v) &= (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2 - 1. \end{aligned}$$

Kun  $\lambda$  kasvaa rajatta, yhtälö alkaa muistuttaa yhä enemmän yhtälöä

$$u^2 - v^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u| = |v|,$$

joka esittää kahta toisiaan leikkaavaa origon kautta kulkevaa suoraa kulmakertoimina  $\pm 1$ . Täten, jos  $xy$ -tasosta valitaan liian suuri alue piirrettäväksi, hyperbeli näyttää kuvaruudulla kahdelta ristikkäiseltä suoralta.



Kuviin on piirretty maastotason käyrä  $x^2 - y^2 = 1$  kartalle kahdessa eri mittakaavassa, 1:5 ja 1:80. Asteikko on karttatason  $uv$ -koordinaatiston mukainen. ▲

## Tason topologiaa

Yleisten johtopäätösten tekeminen yksittäisiä kuvia katselemalla ei liene korrektia matematiikkalehteen tarkoitettussa artikkelissa. Matematiikan olemukseen kuuluu, että käsitteet määritellään täsmällisesti ja väitteet perustellaan sitovasti. Jos lukija kohta putoaa kartalta, ei ole syytä huoleen.<sup>2</sup> Kukin poimii ne hedelmät, jotka ovat käten ulottuvilla. Määritelmien ja päätteilyiden yksityiskohdat ovat vastaaviin ennalta totuttuneita lukijoita varten. Jotta tasokäyrien skaalauksessa esiintyviä ilmiöitä voitaisiin tutkia, määritellään muutamia käsitteitä topologiaksi nimetyltä matematiikan osa-alueelta.

### Sulkeuma ja suljetut joukot

Tason pisteiden  $a = (a_1, a_2)$  ja  $b = (b_1, b_2)$  **etäisyys** (engl. *distance*) on tunnetusti

$$d(a, b) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Kaavan perusteluksi riittää kaikkien tuntema *Pythagoraan lause*. Etäisyyskäsitteen avulla määritellään  $r$ -säteinen **kiekkoympäristö** pisteelle  $a$  joukkona

$$B(a, r) := \{b \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, b) < r\}.$$

**Merkintä** tulee englannin kielen palloa tarkoittavasta sanasta *ball*. Joukko  $B(a, r)$  on siis tason niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä  $a$  on pienempi kuin  $r$ , ts. tason  $a$ -keskisen  $r$ -säteisen ympyrän sisäpuoli ilman reunaviivaa. Jos pisteen  $a$  jokainen kiekko-**ympäristö**  $B(a, r)$ ,  $r > 0$ , leikkaa joukkoa  $A$ , piste  $a$  on joukon  $A$  **kosketuspiste**. Joukon  $A$  kaikkien kosketuspisteiden joukkoa merkitään  $\bar{A}$ , ja sitä sanotaan joukon  $A$  **sulkeumaksi**. Aina on voimassa

$$A \subset \bar{A}.$$

Jos lisäksi  $\bar{A} \subset A$ , jolloin  $A = \bar{A}$ , joukkoa  $A$  sanotaan **suljetuksi**. Esimerkiksi kiekko-**ympäristön** sulkeuma saadaan liittämällä joukkoon reunaympyrä:

$$\overline{B(a, r)} = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, b) \leq r\}.$$

Yleisestikin sulkeuman muodostamisessa on kysymys kaikkien mahdollisten reunapisteiden mukaan ottamisesta, mutta reunan olemus ei useiden joukkojen kohdalla vastaa havainnollista mielikuvaa. Ajatellaanpa

<sup>2</sup>Kirjoittajalla voi olla syytä huoleen, jos matematiikan teorianmuodostukseen perehtynyt lukija putoaa kartalta.

vaikka sellaista  $uv$ -tason osajoukkoa, johon kuuluvat ne ja vain ne pisteet, joiden kumpikin koordinaatti on rationaaliluku ja itseisarvoltaan korkeintaan yksi. Tämän joukon reuna ja samalla sulkeuma on koko tasoneleio  $M$  sisuksineen kaikkineen. Joukon  $A$  reunapisteiksi nimittäin luetaan kaikki sellaiset pisteet, joiden jokainen kiekkoympäristö leikkaa sekä joukkoa  $A$  että sen komplementtia  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ .

### Miten joukot lähestyvät toisiaan?

Mitä täsmällisesti ottaen tarkoittaa, että hyperbeli alkaa muistuttaa kahta ristikkäistä suoraa sitä enemmän, mitä kauemmas katsoja poistuu? Tarvitaan matemaattinen luonnehdinta sille, että tason osajoukot ovat toistensa kaltaisia, mitta kaltaisuuden määrälle ja lopulta kaltaisuuteen perustuva raja-arvon käsite joukoille.

#### ▼ Määritelmä

Olkoon  $r > 0$ . Tason osajoukot  $A$  ja  $B$  ovat  $r$ -läheiset, jos kumpikin seuraavista ehdoista toteutuu:

- 1)  $B(a, r) \cap B \neq \emptyset$  kaikilla  $a \in A$ ;
- 2)  $B(b, r) \cap A \neq \emptyset$  kaikilla  $b \in B$ . ▲

#### ▼ Esimerkki

Olkoon  $r = 1$  km. Jos jokaista suomalaista kohti on ainakin yksi ruotsalainen alle kilometrin säteellä, ja jokaista ruotsalaista kohti on ainakin yksi suomalainen alle kilometrin säteellä, suomalaiset ja ruotsalaiset ovat  $r$ -läheisiä. Näin saattaa ollakin joskus paikallisesti, esimerkiksi keväällä Tukholmassa. ▲

Seuraavassa tarkastellaan yleisiä tason osajoukkojen perheitä  $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ . Perhe on jonon käsitteen yleistys tilanteeseen, jossa indeksinä voi olla jokin muukin kuin kokonaisluku. Jokaista positiivista reaali lukua  $\lambda$  kohti on siis annettu joukko  $A_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ . Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, puhutaan lyhyesti perheestä  $A_\lambda$ . Esityksen tässä vaiheessa joukoilla  $A_\lambda$  ei tarvitse olla mitään tekemistä homotetian  $h_\lambda$  tai minkään muunkaan homotetian kanssa.

#### ▼ Määritelmä

Olkoon  $A$  joukko, jossa on vähintään yksi alkio. Joukkoperhe  $(A_\lambda)_{\lambda>0}$  **suppenee kohti joukkoa  $A$ , kun  $\lambda$  kasvaa rajatta**, jos seuraava ehto on voimassa:

- jokaista  $r > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\lambda_r > 0$ , että  $A_\lambda$  ja  $A$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ .

Vastaavasti joukkoperhe  $(A_\lambda)_{\lambda>0}$  **suppenee kohti joukkoa  $A$ , kun  $\lambda$  lähestyy nollaa rajatta**, jos seuraava ehto on voimassa:

- jokaista  $r > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\lambda_r > 0$ , että  $A_\lambda$  ja  $A$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda_r > \lambda > 0$ . ▲

Suppenemiselle käytetään merkintöjä

$$A_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} A, \quad A_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} A.$$

Jos  $A_\lambda$  suppenee kohti joukkoa  $A$ , silloin  $A_\lambda$  suppenee myös kohti sulkeumaa  $\bar{A}$ . Joukkoa  $\bar{A}$  sanotaan perheen  $A_\lambda$  **raja-arvoksi**, kun  $\lambda$  kasvaa rajatta tai vastaavasti lähestyy nollaa rajatta. Raja-arvoja merkitään tuttuun tapaan

$$\bar{A} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda, \quad \bar{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda.$$

Raja-arvo on siis sellainen suljettu joukko, jota kohti joukkoperhe suppenee. Tällä tavoin määriteltynä raja-arvo on yksikäsitteinen. Perhe voi supeta kohti useampaa joukkoa, mutta niillä on yhteinen sulkeuma, ja se on ainoa suljettu joukko, jota kohti kyseinen perhe suppenee. Lukijaa kehoitetaan palaamaan miettimään tätä asiaa sen jälkeen, kun hän on perehtynyt lemموjen 1 ja 2 sekä lauseen 1 todistuksiin myöhemmässä kappaleessa. Jos perhe ei suppene kohti yhtäkään joukkoa, perheen sanotaan **hajaantuvan**.<sup>3</sup>

#### ▼ Esimerkki

Määritelmien toimivuutta on syytä tarkastella esimerkiksi valossa. Miten todistetaan, että parametrissa  $\lambda$  riipuva hyperbeli

$$H_\lambda := \{(u, v) \in M \mid u^2 - v^2 = \lambda^{-2}\}$$

suppenee kohti ristikkäisten suorien yhdistettä

$$K := \{(u, v) \in M \mid |u| = |v|\}?$$

Olkoon  $r > 0$ . Pitää etsiä  $\lambda_r > 0$ , jolle  $H_\lambda$  ja  $K$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ .

Sekä  $H_\lambda$  että  $K$  ovat peilisymmetrisiä kummankin koordinaattiakselin suhteen, joten riittää tutkia joukkojen niitä haaroja, jotka sijaitsevat tasoneljänneksessä

$$\{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0\}.$$

Siellä joukkojen yleiset pisteet ovat muotoa

$$a := (\sqrt{v^2 + \lambda^{-2}}, v) \in H_\lambda, \quad b := (v, v) \in K, \quad v \geq 0.$$

Pisteiden etäisyys vaakasuunnassa on

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \sqrt{(\sqrt{v^2 + \lambda^{-2}} - v)^2 + (v - v)^2} \\ &= \sqrt{v^2 + \lambda^{-2}} - v \\ &= \frac{v^2 + \lambda^{-2} - v^2}{\sqrt{v^2 + \lambda^{-2}} + v} \leq \frac{\lambda^{-2}}{\lambda^{-1}} = \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Näin on näytetty, että kun kummasta tahansa joukoista  $H_\lambda$  ja  $K$  poimitaan mikä tahansa piste, toisessa joukossa on sille vastinpiste etäisyyden  $1/\lambda$  päässä tai lähempänä. Jos valitaan  $\lambda_r = 1/r$ , kaikilla  $\lambda > \lambda_r$  pätee

<sup>3</sup>Perheen  $A_\lambda$  raja-arvoksi voitaisiin määritellä myös tyhjä joukko siinä erikoistilanteessa, jossa jokaista  $r > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\lambda_r > 0$ , että  $A_\lambda \cap B(0, r) = \emptyset$  aina, kun  $\lambda > \lambda_r$  (tapaus  $\lambda \rightarrow \infty$ ) tai vastaavasti  $\lambda_r > \lambda > 0$  (tapaus  $\lambda \rightarrow 0$ ).



$1/\lambda < r$ , jolloin  $H_\lambda$  ja  $K$  ovat  $r$ -läheiset. Väite on täten todistettu.

Suoran ulkopuolella sijaitsevan pisteen ja suoran välillä on aina positiivinen etäisyys. Kun se otetaan säteeksi, pisteen ympärille saadaan kiekkoympäristö, joka ei leikkaa suoraa. Näin ollen suora sisältää kaikki kosketuspisteensä, joten suora on suljettu joukko. Tästä päätellään helposti, että kahden suoran yhdiste  $K$  on suljettu. Tällöin  $K$  on perheen  $H_\lambda$  yksikäsitteinen raja-arvo:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda = K. \blacktriangle$$

Suppeneminen saattaa riippua siitä, tarkastellaanko joukkoperhettä rajoitettuna tasoneliöön vai koko tasossa. Esimerkiksi

$$\{(u, v) \in M \mid v = \lambda u^2\} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \{(0, v) \in M \mid v \geq 0\},$$

mutta ei ole niin, että

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = \lambda u^2\} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \{(0, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\},$$

sillä paraabelin leveys esimerkiksi tasolla  $v = t$  on  $2\sqrt{t/\lambda}$ , joka kasvaa rajatta, kun  $t$  kasvaa rajatta. Paraabeli ja positiivinen  $v$ -akseli eivät siis milloinkaan ole  $r$ -läheiset, vaikka  $r$  olisi kuinka suuri reaali-luku tahansa. Suppeneminen tasossa  $\mathbb{R}^2$  voitaisiin määritellä niin, että sillä tarkoitetaan edellä määriteltyä suppenemistä kaikissa rajoitetuissa neliöissä erikseen. Silloin paraabelien  $v = \lambda u^2$  perhe suppenisi tässä uudessa mielessä koko tasossa  $\mathbb{R}^2$ . Kirjoitelman aiheen mukaisesti kiinnostuksen kohteena on kuitenkin suppeneminen neliössä  $M$ .

## Esimerkkejä

### ▼ Esimerkki

Kun sinikäyrrää  $y = \sin x$  katsotaan hyvin kaukaa, se näyttää  $x$ -akselilta:

$$\lambda v = \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda u,$$

joten

$$|v| = \frac{1}{\lambda} |\sin \lambda u| \leq \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Tästä päätellään, että

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{(u, v) \mid \lambda v = \sin \lambda u\} = \{(u, v) \mid v = 0\}.$$

Samalla tavalla päätellään, että mille tahansa rajoitetulle funktiolle  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pätee

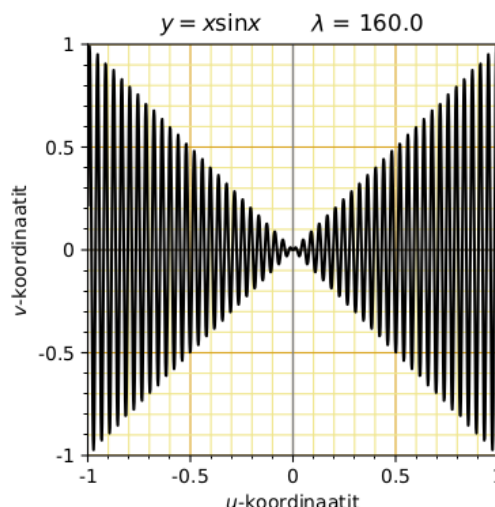
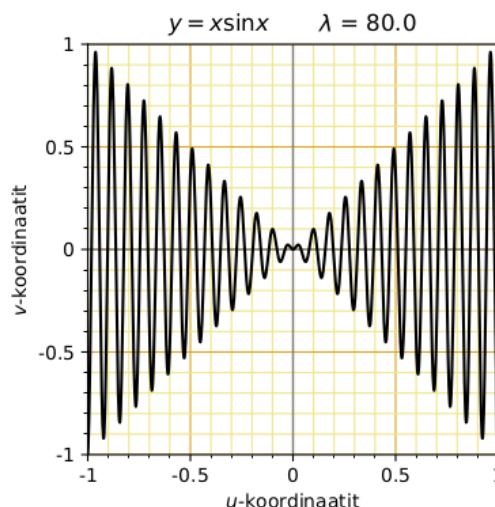
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{(u, v) \mid \lambda v = f(\lambda u)\} = \{(u, v) \mid v = 0\}.$$

Funktiota  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , sanotaan rajoitetuksi, jos sen arvot pysyvät rajoitetulla välillä, ts. on olemassa sellainen vakio  $C$ , että kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  on voimassa  $|f(x)| \leq C$ .  $\blacktriangle$

### ▼ Esimerkki

Kun sinifunktioon lisätään  $x$  kertoimeksi, tilanne muuttuu ratkaisevasti edellisestä:  $y = x \sin x$ . Tällöin funktio ei enää ole rajoitettu. Skaalauksella saadaan

$$\lambda v = \lambda u \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = u \sin \lambda u.$$



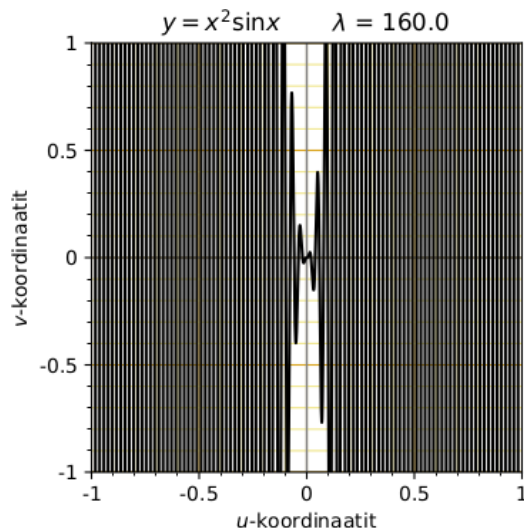
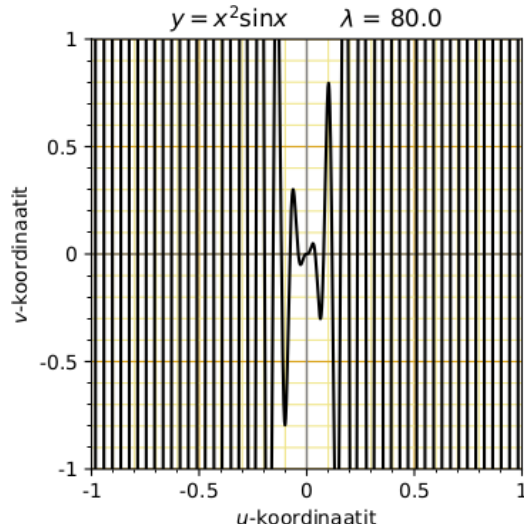
Rajajoukko ei ole enää ohut käyrä, vaan kaksi umpeen sututtua kolmiota, jotka yhdessä täyttävät puolet karttaikkunasta:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{(u, v) \in M \mid v = u \sin \lambda u\} = \{(u, v) \mid |v| \leq |u|\}. \blacktriangle$$

### ▼ Esimerkki

Tilanne muuttuu edelleen, kun sinifunktioon laitetaan kertoimeksi  $x^2$ . Funktion  $y = x^2 \sin x$  värähtelyn laajuus kasvaa toisessa potenssissa. Skaalaus tuottaa yhtälön

$$\lambda v = \lambda^2 u^2 \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = \lambda u^2 \sin \lambda u.$$



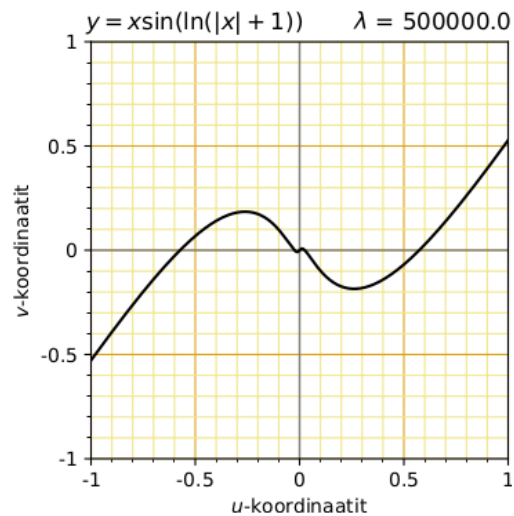
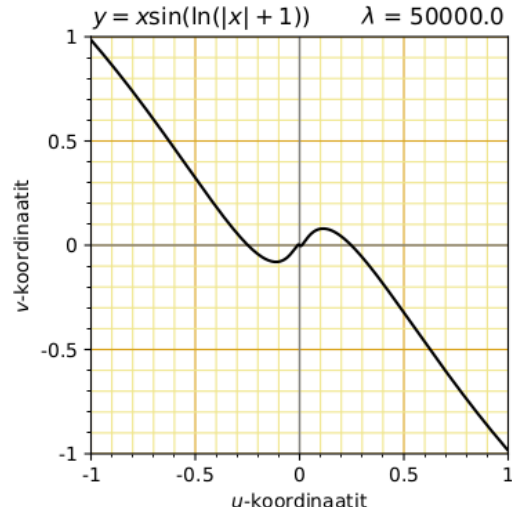
Kun  $\lambda$  kasvaa rajatta, lopulta koko karttaikkuna negatiivista ja positiivista  $v$ -akselia lukuun ottamatta sulkeutuvat. Rajajoukko on määritelmän mukaan sulkeuma, jolloin yksikään karttapiste ei jää pois:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{(u, v) \in M \mid v = \lambda u^2 \sin \lambda u\} = M. \blacktriangle$$

#### ▼ Esimerkki

Edellisissä esimerkeissä sinifunktion taajuus oli kaikilla sama. Kun taajuutta pienennetään sopivasti kauas origosta poistuttaessa, saadaan esimerkki käyrästä, jolla ei ole raja-arvoa. Sellainen funktio voisi olla  $y = x \sin(\ln(|x| + 1))$ . Skaalauksen jälkeen

$$\begin{aligned} \lambda v &= \lambda u \sin(\ln(|\lambda u| + 1)) && \Leftrightarrow \\ v &= u \sin(\ln(|\lambda u| + 1)). \end{aligned}$$



Lukijaa kehoitetaan miettimään, miksi raja-arvoa

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{(u, v) \in M \mid v = u \sin(\ln(|\lambda u| + 1))\}$$

ei ole olemassa.  $\blacktriangle$

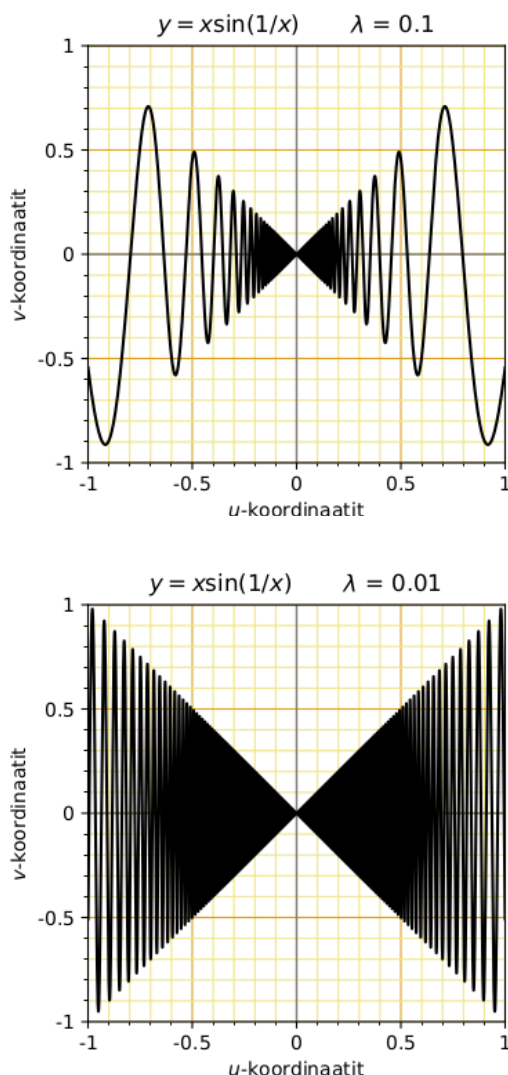
#### ▼ Esimerkki

Tapausta  $\lambda \rightarrow 0$  varten rakennetaan sinifunktiosta käyrä  $y = x \sin(1/x)$ . Ehto  $\lambda \rightarrow 0$  tarkoittaa, että mitataavaa suurennetaan rajatta, ts. origon ympäristöä tarkastellaan yhä enemmän ja enemmän suurentavalla mikroskoopilla. Skaalauksen jälkeen

$$\lambda v = \lambda u \sin \frac{1}{\lambda u} \quad \Leftrightarrow \quad v = u \sin \frac{1}{\lambda u}.$$

Raja-arvoksi saadaan tutunnäköinen joukko

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \{(u, v) \in M \mid v = u \sin(1/(\lambda u))\} = \\ \{(u, v) \mid |v| \leq |u|\}. \end{aligned}$$



Mitähän tulisi raja-arvoksi siinä tapauksessa, jos kerroin  $x$  jätettäisiin pois? Olisiko raja-arvoa edes olemassa käyrälle  $y = \sin(1/x)$ ? ▲

### Tehtäviä

- 1) Olkoon  $f(x) = x^2 + 2x$ . Miten käy käyrille  $y = f(x)$ ,  $y = |f(x)|$  ja  $y = \sqrt{|f(x)|}$  origon ympäristössä, kun mittakaavaa suurennetaan rajatta?
- 2) Funktiosta  $g$  oletetaan, että se on määritelty ja derivoituva eräällä välillä  $]-h, h[$ , missä  $h > 0$ , ja  $g(0) = 0$ . Kuinka funktion  $g$  kuvaaja käyttäytyy origon ympäristössä, kun mittakaavaa suurennetaan rajatta?

### Raja-arvojoukkojen luonnehdinta

Tason osajoukkoa  $A$  sanotaan **säteittäiseksi**, jos se on yhdiste origosta alkavista puolisuorista ja itse origosta. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikilla  $a = (a_1, a_2) \in A$  ja kaikilla  $t \geq 0$  pätee

$$ta = (ta_1, ta_2) \in A.$$

Rajatapauksessa pelkkä origo yksinään muodostaa säteittäisen joukon. Säteittäiset joukot ovat kiinnostavia mm. siitä syystä, että ne ovat tyhjän joukon lisäksi ainoat joukot, jotka ovat *invariantteja* kaikkien skaalaus-ten suhteen:  $h_\lambda(A) = A$  kaikille säteittäisille joukoille  $A$  ja kaikille  $\lambda > 0$ , ja jos  $A$  ei ole säteittäinen eikä tyhjä, on olemassa ainakin yksi  $\lambda > 0$ , jolle  $h_\lambda(A) \neq A$ . Säteittäinen joukko on täsmälleen saman näköinen kaikissa mittakaavoissa.

Seuraavat kaksi lemmaa pätevät yleisille joukkoperheille.

#### Lemma 1

Olkoon  $A$  joukkoperheen  $A_\lambda$  raja-arvo, kun  $\lambda \rightarrow \infty$ , ja olkoon  $b$  tason piste. Oletetaan lisäksi, että jokaisella  $r > 0$  on olemassa sellainen  $\lambda_r$ , että  $B(b, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$  aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ . Tällöin  $b \in A$ .

#### Todistus

Riittää osoittaa, että  $A \cup \{b\}$  on perheen  $A_\lambda$  raja-arvo. Olkoon  $r > 0$ . Pitää etsiä sellainen  $\lambda_r > 0$ , jolle  $A \cup \{b\}$  ja  $A_\lambda$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ . Koska  $A$  on raja-arvo, on olemassa  $\lambda_{r,A} > 0$ , jolle  $A$  ja  $A_\lambda$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_{r,A}$ . Oletuksen mukaan on olemassa sellainen  $\lambda_{r,b}$ , että  $B(b, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$  aina, kun  $\lambda > \lambda_{r,b}$ . Tällöin  $\lambda_r := \max(\lambda_{r,A}, \lambda_{r,b})$  täyttää vaaditun ehdon. ■

#### Lemma 2

Olkoon  $A$  joukkoperheen  $A_\lambda$  raja-arvo, kun  $\lambda \rightarrow \infty$ , ja olkoon  $t > 0$ . Tällöin  $A$  on joukkoperheen  $A'_\lambda := A_{\lambda t}$  raja-arvo.

#### Todistus

Olkoon  $r > 0$ . Pitää etsiä sellainen  $\lambda'_r > 0$ , jolle  $A'_\lambda$  ja  $A$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda'_r$ . Koska  $A$  on raja-arvo, on olemassa  $\lambda_r > 0$ , jolle  $A$  ja  $A_\lambda$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ . Tällöin  $A'_\lambda = A_{\lambda t}$  ja  $A$  ovat  $r$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r/t =: \lambda'_r$ . ■

Seuraavassa lauseessa palataan joukkojen skaalaukseen. Aikaisemmasta muistetaan, että joukko  $A_1$  mitakaavaan  $1:\lambda$  skaalattuna on  $h_{1/\lambda}(A_1)$ .

#### Lause 1

Olkoon  $A_1$  tason osajoukko, jolle  $A_\lambda := h_{1/\lambda}(A_1)$  supenee kohti suljettua joukkoa  $A$ , kun  $\lambda \rightarrow \infty$ . Tällöin  $A$  on säteittäinen.

#### Todistus

Olkoon  $a \in A$  ja  $t \geq 0$ . Pitää osoittaa, että  $ta \in A$ . Olkoon  $r > 0$ . Lemman 1 perusteella riittää löytää sellainen  $\lambda_r$ , että  $B(ta, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$  aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ .

Aluksi käsitellään erikoistapaus  $t = 0$ . Valitaan joukosta  $A_1$  kiinteä alkio  $a_1$ . Silloin  $h_{1/\lambda}(a_1) = a_1/\lambda \rightarrow 0$ , kun  $\lambda \rightarrow \infty$ . Siis on olemassa  $\lambda_r$ , jolle  $h_{1/\lambda}(a_1) \in B(0, r) = B(ta, r)$  aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ . Väite seuraa siitä, että  $h_{1/\lambda}(a_1) \in A_\lambda$ , jolloin  $h_{1/\lambda}(a_1) \in B(ta, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ .

Olkoon seuraavaksi  $t > 0$ . Koska  $a \in A$ , ja lemmän 2 perusteella  $A = \lim_{\lambda} A_{\lambda t}$ , on olemassa sellainen  $\lambda_r > 0$ , että  $A$  ja  $A_{\lambda t}$  ovat  $r/t$ -läheiset aina, kun  $\lambda > \lambda_r$ . Arvoilla  $\lambda > \lambda_r$  on siis olemassa  $a_{\lambda} \in B(a, r/t) \cap A_{\lambda t}$ . Silloin  $ta_{\lambda} \in B(ta, r) \cap A_{\lambda} \neq \emptyset$ . ■

Lemmat 1 ja 2 pätevät ilmeisin muutoksin myös silloin, kun  $\lambda \rightarrow 0$ . Tämä seuraa jo siitä, että

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_{1/\lambda}.$$

Myös lauseella 1 on vastine tilanteessa  $\lambda \rightarrow 0$ . Seuraavassa esitetään varmuuden vuoksi näiden uuteen tilanteeseen sovitettujen tulosten sanamuodot. Todistusten kirjoittaminen jää lukijalle helpoksi ja opettavaiseksi harjoitustehtäväksi. Helpoksi sikäli, että edellä esitetyt todistuksia voidaan käyttää mallina.

### Lemma 3

Olkoon  $A$  joukkoperheen  $A_{\lambda}$  raja-arvo, kun  $\lambda \rightarrow 0$ , ja olkoon  $b$  tason piste. Oletetaan lisäksi, että jokaisella  $r > 0$  on olemassa sellainen  $\lambda_r$ , että  $B(b, r) \cap A_{\lambda} \neq \emptyset$  aina, kun  $\lambda_r > \lambda > 0$ . Tällöin  $b \in A$ .

### Lemma 4

Olkoon  $A$  joukkoperheen  $A_{\lambda}$  raja-arvo, kun  $\lambda \rightarrow 0$ , ja olkoon  $t > 0$ . Tällöin  $A$  on joukkoperheen  $A'_{\lambda} := A_{\lambda t}$  raja-arvo.

### Lause 2

Olkoon  $A_1$  tason osajoukko, jolle  $A_{\lambda} := h_{1/\lambda}(A_1)$  supenee kohti suljettua joukkoa  $A$ , kun  $\lambda \rightarrow 0$ . Tällöin  $A$  on säteittäinen.

## Mikromaailma vs. makromaailma

Edeltävien lauseiden 1 ja 2 näkökulmasta matematiikan maailmankaikkeus on samalla tavalla säteittäinen sekä äärimmäisen pienessä että äärimmäisen suuressa mittakaavassa. Mutta, mutta ... entäpä ne ”pimeät” joukot, joilla ei ole raja-arvoa äärimmäisessä skaalauksessa, esimerkkinä funktion  $y = x \sin(\ln(|x|+1))$  kuvaaja! Joukoissa on sellaisia, jotka eivät suostu käyttäytymään normien edellyttämällä tavalla — kuten Joukoisakin — pimeitä yksilöitä.

## Ympyräjoukot

Olkoon

$$\mathbf{c} := (c_k)_{k=1}^{\infty} = (c_1, c_2, c_3, \dots),$$

$$0 < c_1 < c_2 < c_3 < \dots$$

aidosti kasvava päättymätön jono positiivisia reaali-lukuja. Tarkoituksena on tutkia  $c_k$ -säteisten origokeskisten ympyräviivojen

$$S_k := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c_k^2\}$$

yhdessä muodostamaa joukkoa

$$S(\mathbf{c}) := \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Merkinnät  $\mathbf{c}$  ja  $S$  tulevat englannin kielen ympyrää ja vastaavasti palloa tarkoittavista sanoista *circle* ja *sp-here*. Skaalaus mittakaavaan  $1:\lambda$  tuottaa joukon

$$S_{\lambda}(\mathbf{c}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda^{-1} S_k$$

missä

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} S_k &= \{(x/\lambda, y/\lambda) \mid x^2 + y^2 = c_k^2\} \\ &= \{(u, v) \mid u^2 + v^2 = c_k^2/\lambda^2\}. \end{aligned}$$

Kartalla  $M$  on näkyvissä ympyräviivan  $\lambda^{-1} S_k$  kehän pisteitä silloin ja vain silloin, kun  $c_k/\lambda \leq \sqrt{2}$  eli  $c_k \leq \sqrt{2}\lambda$ . Kahden perättäisen ympyrän  $\lambda^{-1} S_k$  ja  $\lambda^{-1} S_{k-1}$  etäisyys arvolla  $\lambda = c_k/\sqrt{2}$  on

$$\frac{c_k}{\lambda} - \frac{c_{k-1}}{\lambda} = \sqrt{2} \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k},$$

ja tämä etäisyys pienenee parametrin  $\lambda$  arvon kasvaessa. Tästä voidaan päätellä seuraava tulos:

### Lemma 5

Jos osamäärä

$$\rho_k(\mathbf{c}) := \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k}$$

lähestyy nollaa, kun  $k$  kasvaa rajatta, on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M \cap S_{\lambda}(\mathbf{c}) = M.$$

Muulloin perheellä  $S_{\lambda}(\mathbf{c})$  ei ole raja-arvoa, kun  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Kirjain  $\rho$  on kreikkalaisen kirjaimiston  $\rho$ , joka puolestaan on englannin kielen suhdetta merkitsevän sanan *ratio* alkukirjain. Lemman 5 viimeinen väite perustuu raja-arvon säteittäisyyteen: origokeskisten ympyröiden yhdiste on säteittäinen vain kun se täyttää koko tason.

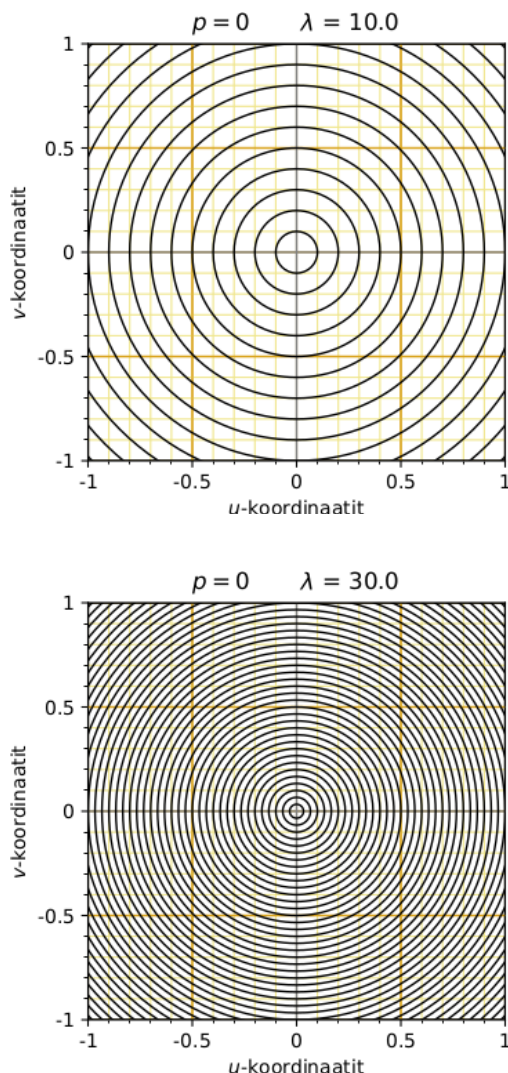
### ▼ Esimerkki

Jonon  $\mathbf{c} = (1, 2, 3, \dots)$  tapauksessa

$$\rho_k(\mathbf{c}) = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Lemman 5 perusteella

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M \cap S_{\lambda}(\mathbf{c}) = M.$$



Kuvassa  $p = 0$  tarkoittaa, että kaikki positiiviset kokonaisluvut ovat mukana (so. ei Eratostheneen seula, ks. seur.). ▲

#### ▼ Esimerkki

Jonosta  $(1, 2, 3, \dots)$  voidaan karsia pois yhdistettyjä lukuja *Eratostheneen seulalla*. Seulominen tarkoittaa, että ensin karsitaan pois ykkönen ja kakkosta isommat parilliset luvut, kolmesta isommat kolmella jaolliset luvut jne., kunnes kaikki lukua  $p$  isommat luvulla  $p$  jaolliset luvut on heitetty pois. Kun karsinta tehdään esimerkiksi arvolla  $p = 3$ , hylätään kaikki parilliset luvut ja kolmella jaolliset luvut lukuja 2 ja 3 lukuun ottamatta. Jonoon jäävät luvut

$$\mathbf{c} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, \dots).$$

Perättäisten lukujen erotuksista muodostuu jono

$$(1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \dots).$$

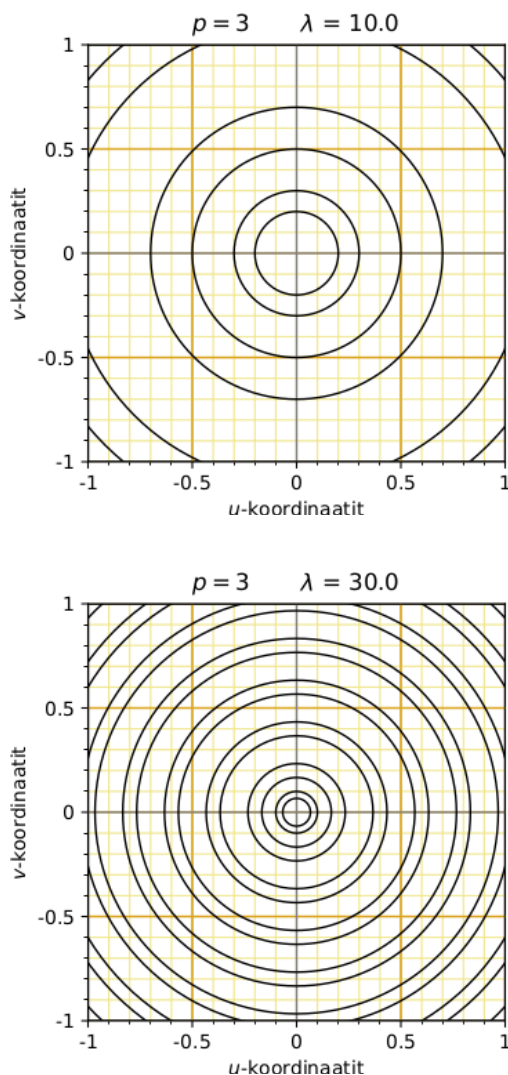
Se on jaksollinen kolmannesta alkioista  $2 = 7 - 5$  lähtien. Jaksona on kaksialkioinen jono  $(2, 4)$ . Itse asiassa

Eratostheneen seula tuottaa aina sellaisen jonon, jonka erotusjono on jaksollinen tietyistä kohdista eteenpäin. Peruste! Jos seulotun jonon alkioita otetaan ympyrän säteiksi, kahden perättäisen säteen erotuksella  $c_k - c_{k-1}$  on jaksollisuuden takia äärellinen yläraja  $C$ , so. arvo, jota suuremmaksi erotus ei voi tulla. Tällöin

$$\rho_k(\mathbf{c}) = \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k} \leq \frac{C}{c_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

Lemman 5 perusteella

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{c}) = M.$$



Kuvassa  $p = 3$  tarkoittaa, että kahdella ja kolmella jaolliset yhdistetyt luvut on karsittu pois. ▲

#### ▼ Esimerkki

Sädejonoille  $c_k := k^s$  ja  $c'_k := a^k$ , missä  $s > 0$  ja  $a > 1$ , pätee

$$\begin{aligned} \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k} &= \frac{k^s - (k-1)^s}{k^s} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^s \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

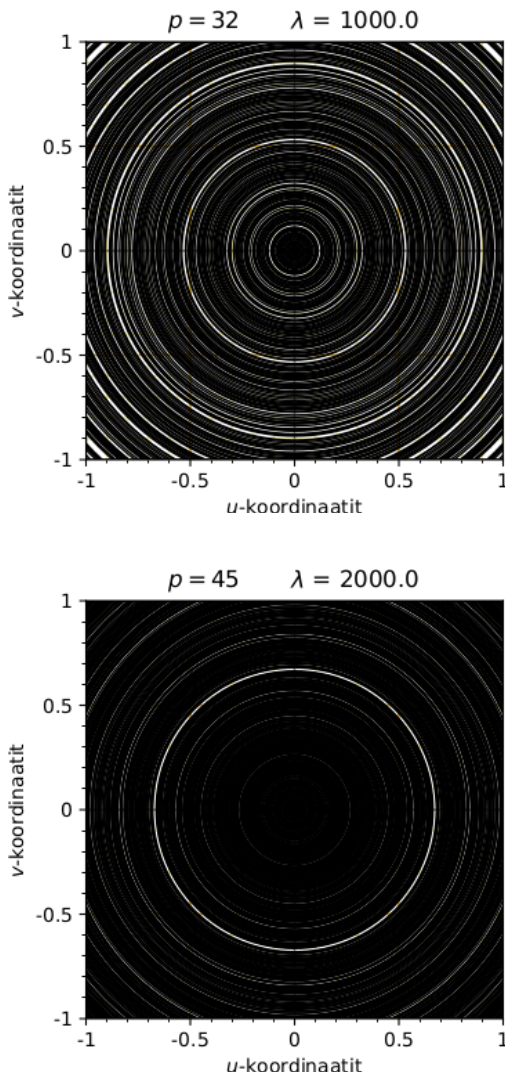


$$\frac{c'_k - c'_{k-1}}{c'_k} = \frac{a^k - a^{k-1}}{a^k} = 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Mitä voidaan päätellä vastaavien joukkoperheiden  $S_\lambda(\mathbf{c})$  ja  $S_\lambda(\mathbf{c}')$  suppenemisesta, kun  $\lambda \rightarrow \infty$ ? ▲

## Alkulukuympyrät

Kun Eratostheneen seulalla karsitaan pois kaikki lukujen  $2, \dots, p$  monikerrat, kokonaislukujen  $2$  ja  $p^2$  välille jäävät vain kyseisen välin alkuluvut. Miksi? Oheisiin kuviin on piirretty ne ja vain ne ympyrät, joiden säteet ovat alkulukuja. Yhdistetyt luvut on poistettu Eratostheneen seulaa käyttäen. Pisin yhtenäinen aukko on alkulukujen  $1327$  ja  $1361$  välillä. Siinä on  $33$  yhdistettyä lukua. Aukko nähdään jälkimmäisessä kuvassa muita paksumpana valkoisena ympyrärenkaana.



Välille  $[0, x]$  osuvien alkulukujen lukumäärää merkitään yleiseen tapaan

$$\pi(x) := \#\{p \mid p \text{ on alkuluku ja } p \leq x\}.$$

Merkintä  $\#J$  tarkoittaa joukon  $J$  alkuiden lukumäärää. Luku  $\pi(x)$  sellaisenaan ei kerro paljoakaan siitä, kuinka etäällä toisistaan kaksi välin  $[0, x]$  perättäistä alkulukua enimmillään voivat olla. Vuonna 1896 todistetun *alkulukulauseen* mukaan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Alkulukulauseelle on keksitty useita todistuksia, joista toiset ovat “elementaareja”, ja toiset perustuvat järeämpään matemaattiseen koneistoon. Elementaareiksi kutsutut todistuksetkin ovat huomattavasti monimutkaisempia kuin mihin lukiossa tai yliopisto-opintojen alussa on totuttu. Ymmärrettävistä syistä alkulukulauseen todistusta ei esitetä tässä. Huomaa, että  $\ln x$  on verrannollinen välin  $[0, x]$  suurimman kokonaisluvun desimaaliesityksen numeroiden määrään.

Alkulukujen (engl. *prime*) jonoa merkitään

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= (p_1, p_2, p_3, \dots) \\ &= (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \\ &\quad 41, 43, 47, 53, \dots). \end{aligned}$$

Esimerkiksi oppikirjassa [1] (teoreema 4.5, s. 80) alkulukulause osoitetaan yhtäpitäväksi sen kanssa, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{k \ln k} = 1.$$

Tällöin

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\frac{p_k}{k \ln k}}{\frac{p_{k-1}}{(k-1) \ln(k-1)}} \cdot \frac{k \ln k}{(k-1) \ln(k-1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Raja-arvoyhtälön

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{(k-1) \ln(k-1)} = 1$$

todeksi osoittaminen jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. Lopulta siis

$$\rho_k(\mathbf{p}) = \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} = 1 - \frac{1}{\frac{p_k}{p_{k-1}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Tästä ja lemmasta 5 päätellään, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{p}) = M.$$

Toisin sanoen: kun mittakaavaa pienennetään rajatta, kartalle piirretyt origokeskiset alkulukuympyrät peittävät kartan lopulta kokonaan. Vaikka Eratostheneen seulalla seulotaan kaikki yhdistetyt luvut pois, jäljelle jää lukuja riittävästi mustaamaan koko kartan.

Lukija voi Wikipediaa ja muita verkkodokumentteja apuna käyttäen miettiä, miten käy, kun alkulukujen josta otetaan mukaan vain ne, joiden indeksi on alkuluku. Tarkastelun kohteena on silloin paljon harvempi jono

$$\begin{aligned} (p_{p_k})_{k=1}^\infty &= (p_2, p_3, p_5, p_7, p_{11}, \dots) \\ &= (3, 5, 11, 17, 31, \dots). \end{aligned}$$

Tämän jonon alkioita sanotaan *superalkuluuvuiksi* (engl. *super prime*). Superkarsinta voidaan toistaa, jolloin saadaan supersuperalkuluvut jne. Muutaman iterointikierroksen jälkeen syntyy, jos ei muuta, niin hauskoja kuvia ainakin. Indeksit voidaan valita mistä tahansa muustakin positiivisten kokonaislukujen jonosta, kuten esimerkiksi *Fibonaccin jonosta*

$$\mathbf{f} := (f_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots),$$

jossa alkio on aina kahden edellisen summa:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_k = f_{k-2} + f_{k-1}, \quad k \geq 3.$$

### Liite: Python-koodi kuvaajan piirtämiseen

Koodista on helppoa muokata vastaava koodi esimerkiksi OCTAVElle.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
n = 10000
L = 5.0

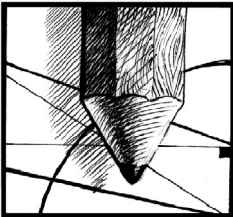
# Piirretään y=x*sin(x) mittakaavassa 1:L
u = np.linspace(-L,L,n)
v = u*np.sin(L*u)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.set_aspect('equal')
plt.grid(True)
plt.xlim([-L,L])
plt.ylim([-L,L])
plt.plot(u, v, 'k')

plt.show()
```

### Viitteet

- [1] Apostol, T. M.: *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, New York, 1976.



## Ilmakehän massa

*Markku Halmetoja*

Viime vuosituhannen lopulla laskettiin Mäntän lukion matematiikan erikoiskurssilla ilmakehän massa. Alunperin oli tarkoitus ainoastaan määrittää ilman paine ( $p$ ) ja tiheys ( $\rho$ ) maan pinnasta lasketun korkeuden funktioina, mutta tilanne riistäytyi käsistä. Oppilaiden kontribuutio ei ollut vähäinen. Laadin aiheesta tuollon nettisivunkin, mutta kun se on nyttemmin kadonnut (ilman myötävaikutustani), arvelen, että laskelma ansaitsisi tulla laajemminkin julki ja pysyvämmiin arkistoiduksi.

Kerrataan aluksi hieman kemiaa ja fysiikkaa. Ilma on seos, joka koostuu pääosin tyypestä  $N_2$  (noin 78 %) ja hapesta  $O_2$  (noin 21 %). Niiden lisäksi on pieniä määriä muita kaasuja, kuten argonia  $Ar$  (alle 1 %), hiilidioksidia, vetyä, heliumia yms., sekä vaihteleva määrä vesihöyryä. Oletetaan hieman yksinkertaistaen, että typen ja hapen lisäksi loppuosa koostuu pelkästään argonista. Laskemalla molekyylien moolimassoista niiden prosenttiosuuksilla painotetun keskiarvon saamme ilman laskennalliseksi moolimassaksi  $M = 29,0 \frac{g}{mol}$ .

Ilma noudattaa varsin hyvin ideaalikaasulakia

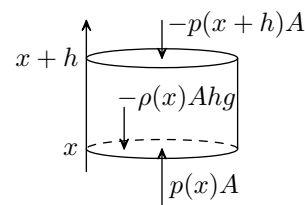
$$pV = nRT,$$

missä  $n$  on tarkasteltavan ilmaerän ainemäärä,  $V$  sen tilavuus,  $T$  sen absoluuttinen lämpötila ja  $R$  yleinen kaasuvakio. Sen arvo löytyy taulukkokirjasta. Koska ainemäärä on massa jaettuna moolimassalla ja tiheys puolestaan massa jaettuna tilavuudella, saadaan kaasuista paineen ja tiheyden väliset yhtälöt:

$$\rho = \frac{M}{RT}p \quad \text{ja} \quad p = \frac{RT}{M}\rho.$$

Jos siis saamme määritetyksi ilman paineen korkeudella  $x$ , saamme samalla ilman tiheyden kyseisellä korkeudella.

Tarkastellaan kuvion mukaista (teoreettista) ilmasylinteriä, jonka pohjan pinta-ala on  $A$ , korkeus on  $h$  ja tilavuus täten  $Ah$ . Jos ilmanpaine korkeudella  $x$  on  $p = p(x)$ , niin se vaikuttaa sylinterin pohjaan voimalla  $p(x)A$ . Yläpuoliseen pohjaan vaikuttava voima on vastaavasti  $-p(x+h)A$ , mikä samalla kohdistuu välillisesti myös alapohjaan. Siihen vaikuttaa myös sylinterin sisällä olevaan ilmamäärään kohdistuva painovoima  $\approx -\rho(x)Ahg$ , missä  $g$  on putoamiskiihtyvyys.



Voimat kumoavat toisensa, eli

$$p(x)A - p(x+h)A - \rho(x)Ahg \approx 0.$$

Jos näin ei olisi, olisi ilmakehä ajan myötä litistynyt maan pintaan tai haihtunut avaruuteen. Saatu yhtälö on sitä tarkempi mitä pienempi sylinterin korkeus on. Kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{p(x+h) - p(x)}{h} \approx -\rho(x)g$$

ja antamalla  $h$ :n lähestyä nollaa likimääräinen yhtälö tarkentuu differentiaaliyhtälöksi

$$p'(x) = -g\rho(x) = -\frac{M}{RT}gp(x).$$

Putoamiskiihtyvyyttä  $g$  voi pitää vakiona ainoastaan maan pinnan läheisyydessä tapahtuvia ilmiöitä tarkasteltaessa. Yleisemmin sen arvo korkeudella  $x$  ( $\geq 0$ ) maan pinnasta on gravitaatiolain mukaan

$$g = g(x) = \gamma \frac{m_0}{(r+x)^2},$$

missä  $m_0$  on maapallon massa,  $r$  sen säde ja  $\gamma$  on gravitaatiovakio. Kun tämä sijoitetaan edellä saatuun yhtälöön, saadaan Leibnizin tavalla merkittynä

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{p}{(r+x)^2}$$

alkuehdolla  $p(0) = p_0$  (normaali ilmanpaine). Erottamalla muuttujat saadaan

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{dx}{(r+x)^2},$$

ja edelleen integroimalla

$$\ln p = \frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{1}{(r+x)} + c.$$

Alkuehdon perusteella

$$c = \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{1}{r}.$$

Täten

$$\begin{aligned} \ln p &= \frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{1}{r+x} + \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RT} \frac{1}{r} \\ &= \ln p_0 + \frac{M\gamma m_0}{RT} \left( \frac{1}{r+x} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RT r} \left( \frac{x}{r+x} \right), \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{M\gamma m_0}{RT r} \left( \frac{x}{r+x} \right),$$

ja lopulta

$$p(x) = p_0 \exp \left( -\frac{M\gamma m_0}{RT r} \left( \frac{x}{r+x} \right) \right).$$

Täten ilman tiheys korkeudella  $x$

$$\rho(x) = \frac{Mp_0}{RT} \exp \left( -\frac{M\gamma m_0}{RT r} \left( \frac{x}{r+x} \right) \right).$$

Kun se nyt tunnetaan, voidaan laskea massa. Tarkastellaan  $(r+x)$ -säteistä pallon kuorta, jonka paksuus on  $dx$ . Sen tilavuus

$$dV = 4\pi(r+x)^2 dx$$

ja massa eli massa-alkio

$$\begin{aligned} dm &= \rho(x)dV = 4\pi(r+x)^2 \rho(x)dx \\ &= 4\pi \frac{Mp_0}{RT} (r+x)^2 \exp \left( -\frac{M\gamma m_0}{RT r} \left( \frac{x}{r+x} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Ilmakehän likimääräinen massa saadaan summaamalla se maan pinnalta parin sadan kilometrin korkeuteen. Satelliittien alimmat kiertoradat ovat niillä main eikä ohuenkaan ilman kitka häiritse niiden lentoa. Lämpötilassa on hyväksyttävä hieman mielivaltaisuutta. Wikilähteen [1] mukaan maapallon keskilämpötila maan pinnan tasolla on noin 15 °C eli 288 K, mutta ylemmissä ilmakerroksissa se on pakkasellakin. Toisaalta, ilmakehä on tiheimmillään maan pinnalla, joten oletamme keskimääräiseksi lämpötilaksi 0 °C eli 273 K. Maa on navoiltaan hieman litistynyt. Puserramme sen pyöreäksi valitsemalla säteeksi napa- ja ekvaattorisäteiden keskiarvon. Taulukossa on tiivistetysti numeeriset vakiot.

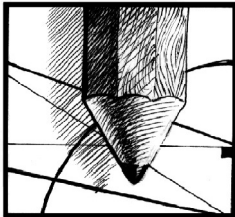
|                                                            |
|------------------------------------------------------------|
| $r = 6,367 \cdot 10^6 \text{ m}$                           |
| $m_0 = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$                     |
| $\gamma = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ |
| $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$                   |
| $R = 8,3145 \text{ Nm (mol} \cdot \text{K)}$               |
| $T = 273 \text{ K}$                                        |
| $M = 0,0290 \text{ kg/mol}$                                |

Solmu-formaattiin saattamista lukuunottamatta tämän kirjoituksen laatimisessa on tähän mennessä käytetty ainoastaan matemaatikon kolmea perustyökälua, kynää, paperia ja roskapönttöä. Siksi tuntuu perin kummalliselta kuulla someväitteitä, joiden mukaan kynästä ja paperista on pelkkää haittaa matematiikan opimisessa. Saattaa olla, että paperilla hahmottelu on turhaa, jos tehtävät laaditaan niin alkeellisiksi, ettei niiden ratkaisemisessa tarvita ajattelua. Mutta tähän ei kouluopetuksessa pyritä – vai pyritäänkö?

Nyt on kuitenkin perusteltua turvautua tietokoneeseen, sillä integrointi on suoritettava numeerisesti. Wolfram-Alpha [2] antaa vastaukseksi  $m \approx 5,28 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ . Wikisivuston [1] mukaan  $m \approx 5,15 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ . Siellä käytetystä menetelmästä ei ole tietoa, mutta ilmeisesti todellisuuden piirteitä on otettu tarkemmin huomioon. Luontoa kuvaavilla eksponentiaalisilla malleilla on kokeellisiin tietoihin perustuvat pätevyysalueensa. Kahtasataa kilometriä korkeammalle ei kannata integroida, sillä kuten todettu, satelliitit lentävät siellä. Lisäksi integraali hajaantuu yli absoluuttisen nollapisteen olevissa lämpötiloissa, jos äärettömyksiin asti lasketaan.

## Viitteet

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere\\_of\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth)
- [2] <https://www.wolframalpha.com/>



## Sykloidi

**Pekka Alestalo**

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos  
Aalto-yliopisto

### Johdanto

Tässä kirjoituksessa tutustutaan tasaista alustaa pitkin vierivän ympyrän kehän pisteen muodostamaan tasokäyrään, jota kutsutaan sykloidiksi. Aihetta on käsitelty aikaisemmin mm. Solmun artikkeleissa [1], [2] ja [3] sekä kilpailutehtävässä [4, tehtävä 9 vuonna 2008], mutta kirjoitusten lähestymistavat ovat ainakin osittain erilaiset. Lisäksi vanhemmilla kirjoituksilla on ikävä taipumus hautautua arkistojen kätköihin.

Joissakin tämän kirjoituksen kohdissa pyörimisliikkeen fysiikkaan<sup>1</sup> liittyvistä käsitteistä on hyötyä tilanteen hahmottamisen kannalta, mutta esimerkiksi viitteen [4] ratkaisu perustuu pelkästään kolmioiden geometriaan. Nykyisessä poikkeusteellisyyttä ihannoivassa maailmassa matematiikan ja fysiikan vuorovaikutusta ei pitäisi kuitenkaan karsastaa.

### Ympyräliike

Kaikki pyöriminen alkaa ympyrästä, jonka yhtälö on muotoa  $x^2 + y^2 = R^2$ . Tämä ympyrä muodostuu niistä tason pisteistä  $(x, y)$ , joiden etäisyys origosta on  $R$ . Kaavan  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  perusteella piste

$(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$  toteuttaa tämän yhtälön, joten piste sijaitsee tarkasteltavalla ympyrällä. Yleensä tätä ominaisuutta käytetään (tapauksessa  $R = 1$ ) kuitenkin sini- ja kosinifunktioiden määrittelemiseen kolmioita yleisemmässä tilanteessa. Joka tapauksessa kulman  $\varphi$  arvoilla  $0 \leq \varphi < 2\pi$  saadaan kaikki ympyrän pisteet täsmälleen yhden kerran, ja arvolla  $\varphi = 2\pi$  palataan alkukohtaan  $(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ . Esitystä

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \end{cases}$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$ , kutsutaan ympyrän *parametriesitykseksi*<sup>2</sup>. Tällöin kulman  $\varphi$  kasvaessa vastaava piste kiertyy ympyrällä positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Vastakkainen kiertosuunta saadaan vaihtamalla kulmaparametrin etumerkki, joten ominaisuuksien  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ ,  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$  perusteella parametriesitys tulee muotoon  $(\cos \varphi, -\sin \varphi)$ , mutta parametriväli  $[0, 2\pi]$  säilyy entisellään.

Yleisemmin muotoa

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

$t \in I$ , olevaa lauseketta kutsutaan *tasokäyrän parametriesitykseksi*, jos  $f$  ja  $g$  ovat jatkuvia funktioita *para-*

<sup>1</sup>Erästä fyysikko-kollegaa lainatakseni ”pyöriminen on lukiofysiikassa kiellettyä”, ts. se on valitettavasti poistettu uusimmasta opetussuunnitelmasta (tasaista ympyräliikettä lukuun ottamatta).

<sup>2</sup>Parametriesitys lienee kielipolisesti parempi kuin usein käytetyt parametrisointi tai parametrisaatio.



metrivälillä  $I \subset \mathbf{R}$ . Parametriväli voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu, eikä sen tarvitse edes olla rajoitettu. Varsinainen tasokäyrä  $C$  on tällöin se joukko, joka koostuu kaikista muotoa  $(f(t), g(t))$  olevista pisteistä, kun  $t \in I$ ; matemaattisemmin kirjoitettuna

$$C = \{(f(t), g(t)) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in I\}.$$

Yleensä merkitään  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$ , vaikka saman symbolin käyttämistä kahdessa eri merkityksessä 'koordinaatti' vs. 'funktion nimi' pitäisi välttää.

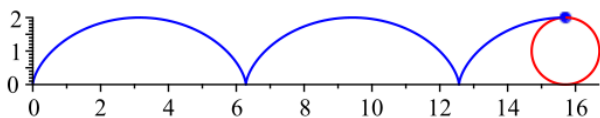
Matemaattisina käsitteinä tasokäyrä ja sen parametriesitys ovat siis eri asioita. Parametriesityksestä on helppo muodostaa vastaava tasokäyrä (esimerkiksi sopivan piirto-ohjelman avulla), mutta vastakkainen suunta ei ole yksikäsitteinen: pelkästä ympyrän yhtälöstä  $x^2 + y^2 = 1$  ei esimerkiksi voi päätellä sitä, halutaanko käyttää "standardiesitystä"  $(\cos t, \sin t)$ , vastakkaisista kiertosuuntia  $(\cos t, -\sin t)$  vai jopa kiertää ympyrä kahteen kertaan parametrivälillä  $[0, 4\pi]$ . Ja tämä on vain esimakua kaikista mahdollisista hankaluuksista!

Konkreettisena tulkintana voidaan ajatella, että parametrina  $t$  on aika, ja lausekkeet  $f(t)$  ja  $g(t)$  kuvaavat kynän kärjen  $x$ - ja  $y$ -koordinaatteja paperilla, johon on piirretty koordinaatisto. Funktioiden jatkuvuus voidaan tulkita niin, että kynää ei saa piirtämisen aikana nostaa paperista.

Jos kaavoihin lisätään  $z$ -koordinaatti muodossa  $z = h(t)$ , niin saadaan *avaruuskäyrän* parametriesitys, mutta niitä ei käsitellä tässä kirjoituksessa.

## Sykloidi

Sykloidi on tasokäyrä, joka kuvaa esimerkiksi vierivään renkaaseen tarttuneen kiven rataa.



Viitteessä [5] on tilanteeseen liittyvä animaatio.

Jos renkaan säde on  $R$ , renkaan etenemisnopeus  $v$  ja parametriksi valitaan aika, niin akselin liikettä kuvaa parametriesitys  $x = vt$ ,  $y = R$ . Kiven pyöriminen akselin suhteen tapahtuu vierimisehdon perusteella kulmanopeudella  $\omega = v/R$  ja pyörimissuunta on negatiivinen. Jos vielä ajan nollakohta valitaan sellaiseen hetkeen, kun kivi koskettaa maata, niin vaakasuurasta al-

kukulmasta täytyy vähentää  $\pi/2$ . Tällöin pyörimisliikettä akselin suhteen kuvaa parametriesitys

$$\begin{cases} x = R \cos(-(vt/R - \pi/2)) = -R \sin(vt/R), \\ y = R \sin(-(vt/R - \pi/2)) = -R \cos(vt/R) \end{cases}$$

trigonometristen kaavojen perusteella. Termien kulmanopeus ja vierimisehto käyttäminen voidaan välttää vaatimalla, että rengas pyörähtää yhden kierroksen samassa ajassa  $t = 2\pi R/v$ , jossa akseli etenee renkaan kehän pituuden  $2\pi R$  verran. Lausekkeissa  $\cos(at)$  ja  $\sin(at)$  esiintyvä kerroin saadaan siis ehdosta  $a \cdot 2\pi R/v = 2\pi$ , joten  $a = v/R$  kuten aikaisemminkin, mutta kiertosuunta ja nollakohdan valinta täytyy joka tapauksessa selvittää erikseen.

Kiven rata saadaan yhdistämällä akselin liike ja pyöriminen toisiinsa, eli käytännössä paikkavektoreiden yhteenlaskulla. Sykloidin parametriesitys on siis muotoa

$$\begin{cases} x = vt - R \sin(vt/R), \\ y = R(1 - \cos(vt/R)). \end{cases} \quad (1)$$

Matemaattisempi vaihtoehto on käyttää parametrina renkaan kiertokulmaa  $\varphi = vt/R$ , jolloin

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin \varphi), \\ y = R(1 - \cos \varphi). \end{cases} \quad (2)$$

Näiden kaavojen vertaaminen sykloidin kuvaan saat-  
taa herättää kysymyksen, miten syklويدissa esiintyvät terävät kulmat syntyvät, kun parametriesityksen kaikki lausekkeet ovat derivoituvia funktioita. Vastaus liittyy renkaassa olevan kiven nopeuteen<sup>3</sup>, jota kuvaavat lausekkeet  $x'(t)$  ja  $y'(t)$  menevät yhtä aikaa nol-  
laan silloin, kun  $y(t) = 0$  eli  $vt/R = n \cdot 2\pi$ . Kiven hetkellinen nopeus on nolla sen osuessa maahan, joten myös sen suunta voi muuttua jyrkästi ilman derivoituvuusongelmia.

**Tehtävä:** Tarkastellaan yhtälöparia (1). Osoita, että  $x'(T) = y'(T) = 0$ , jos  $y(T) = 0$ .

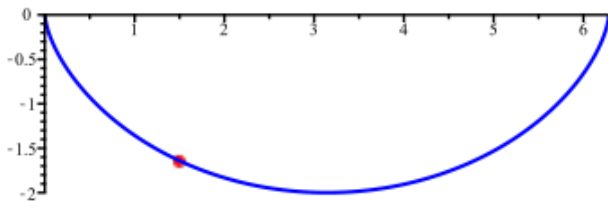
Kaavan (2) ylempi lauseke  $x = x(\varphi)$  on aidosti kasvava, joten siitä voidaan periaatteessa (muttei käytännössä!) ratkaista  $\varphi$  koordinaatin  $x$  avulla ja sijoittaa tulos alempaan  $y$ -koordinaattiin. Näin sykloidi voidaan esittää myös funktion kuvaajana muodossa  $y = y(x)$ , mutta käytännössä tämä ei onnistu pelkästään alkeisfunktioiden avulla.

## Tautokroni ja brakistokroni

Sykloidi esiintyy myös kahden historiallisesti mielenkiintoisen ongelman ratkaisuna. Molemmat liittyvät samantapaiseen tilanteeseen, jossa esimerkiksi pieneen

<sup>3</sup>Parametrisoidun käyrän tangentti ja sen konkreettinen tulkinta nopeus jääköön tässä kirjoituksessa tarkemmin käsittelemättä, mutta osoittautuu, että hetkellinen nopeusvektori on muotoa  $\mathbf{v} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ , kun parametrina on aika  $t$ .

helmeen on porattu reikä, ja helmi on pujotettu taipui-  
saan rautalankaan. Tautokroni (kreikaksi 'sama aika')  
kuvaava sitä rautalangan muotoa, jossa helmen liukumis-  
nen langan alimpaan kohtaan on aina sama, lähtökör-  
keudesta riippumatta. Brakistokroni (kreikaksi 'lyhin  
aika') liittyy puolestaan kysymykseen, minkä muotois-  
ta lankaa pitkin helmi liikuu nopeimmin kahden eri  
korkeudella olevan pisteen välillä.

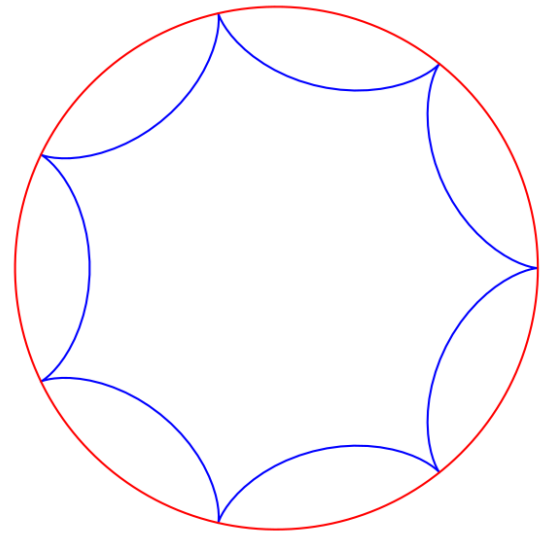


*Symmetrisessä tautokronissa ilman kitkaa edestakaisin  
liukuvan helmen jaksonaika ei riipu amplitudista (eli  
helmen korkeimmasta kohdasta).*

Molempien kysymysten vastaus on alaspäin käännet-  
ty sykloidi, sopivasti skaalattuna tilanteen geometrian  
mukaan. Näiden ongelmien historiasta voi lukea viit-  
teistä [2] ja [3] tai Wikipedian sivuilta [6] ja [7]; annan  
tässä englanninkieliset viitteet, koska niiden sisältämät  
animaatiot selventävät kysymyksiä erittäin hyvin. Sen  
sijaan en ole kovin innoissani Wikipediassa esitetyistä  
todistuksista, koska pienellä differentiaali- ja integraa-  
lilaskennan täydennyksellä ratkaisut voidaan esittää ly-  
hyesti ilman geometrisia approksimaatioita tai differen-  
tiaalien pyörittelyä. Mutta tämä olisi kokonaan uuden  
kirjoituksen aihe.

## Muut sykloidit

Hankalammassa tilanteessa pienempi ympyrä vierii pit-  
kin suuremman ympyrän kehää joko sisä- tai ulkopuo-  
lella, jolloin syntyy hypo- tai episykloideja. Käsittelen  
niitä myöhemmin tämän kirjoituksen jatko-osassa.



*Eräs hyposykloidi (sisempi käyrä).*

## Viitteet

- [1] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/1999/5/kivela/>
- [2] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/html/anal1700/index.html>
- [3] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/kasitehist/AnalyttinenGeometria.pdf>
- [4] <https://matematiikkakilpailut.fi/pythagoras/>
- [5] <https://fi.wikipedia.org/wiki/Sykloidi>
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve)
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve)

## Solmu 2/2021

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

*matematiikkalehtisolmu.fi*

Päätoimittaja:

*Anne-Maria Ernvall-Hytönen*, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

*Juha Ruokolainen*, FT

Sähköposti:

*toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi*

Toimittajat:

*Pekka Alestalo*, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

*Sirkka-Liisa Eriksson*, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

*Aapo Halko*, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

*Olli Järvinen*, opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

*Jyrki Lahtonen*, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

*Heikki Pokela*, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

*Antti Rasila*, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

*Mikko Sillanpää*, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

*Samuli Silta*, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

*Kimmo Vehkalahti*, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

*Esa Vesalainen*, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

*Heikki Apiola*, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

*Mika Koskenoja*, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

*Liisa Näveri*, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

*Juha Ruokolainen*, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

*Marjatta Näätänen*, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

*Ari Koistinen*, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

*Juha Lehtinen*, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

*Jorma K. Mattila*, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenranta teknillinen yliopisto

*Jorma Merikoski*, emeritusprofessori, Informaatiotieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

*Antti Viholainen*, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

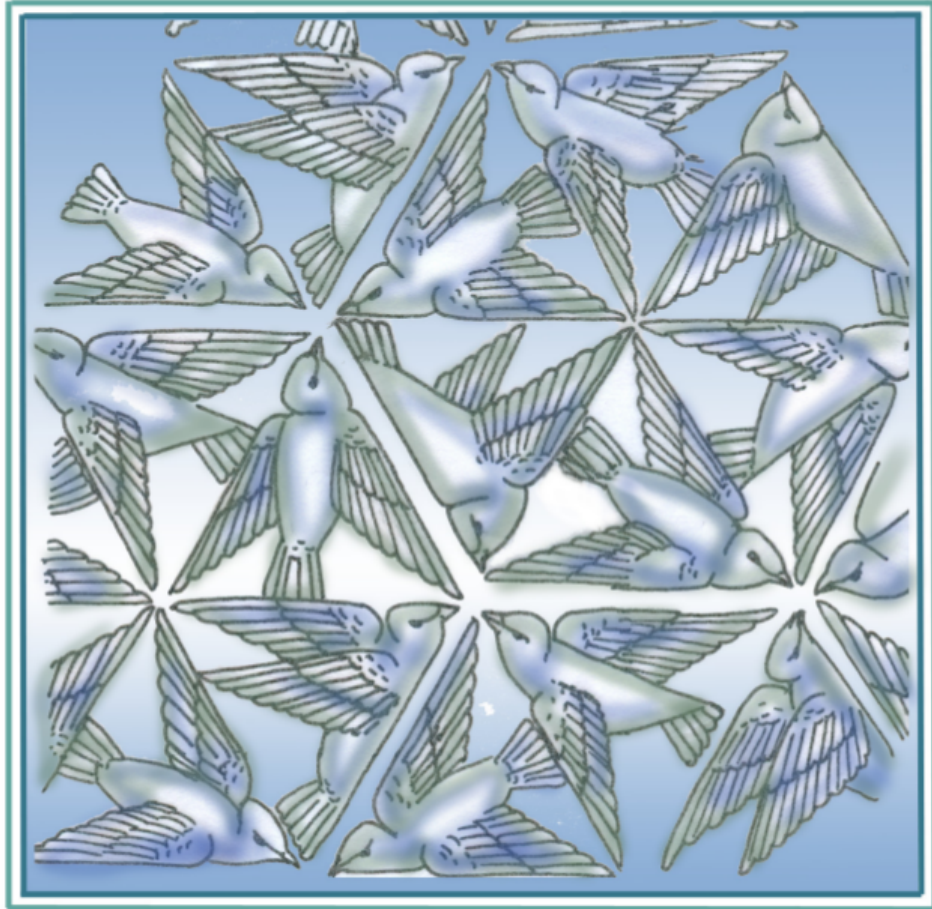
*Noora Isoeskelä*

Painopaikka:

*Painosalama Oy*

Numeroon 3/2021 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.12.2021 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



 **SOLMU**  
MATEMATIIKKALEHTI

[matematiikkalehtisolmu.fi](http://matematiikkalehtisolmu.fi)