Yhtälöiden ratkaisemista Lambertin funktion avulla

Heikki Apiola
Aalto yliopisto, matematiikan ja systeemianalyysin laitos, lehtori emeritus
heikki.apiola@aalto.fi

Lähtökohta

Abitytöt *Elle Oksanen* ja *Vilja Varis* suorittivat vaihto-oppilasjaksoaan Utsjoen saamelaislukiossa maaliskuussa 2021. Sattuipa niin, että olivat ratkaisemassa GeoGebra-ohjelmalla yhtälöä, jossa esiintyi termejä x ja k^x.

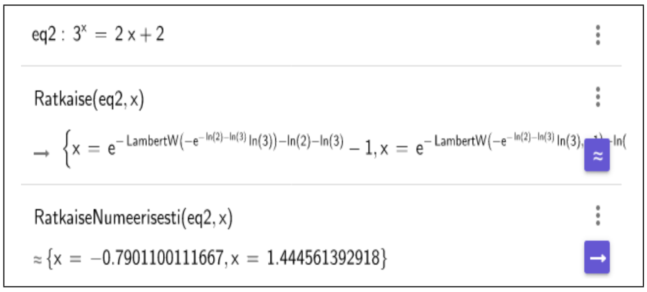
Kuvissa ovat tytöt pähkäilemässä tätä ja muitakin matematiikan ihmeitä vierailevan opettaja-Sissin avustuksella.

`Yhtälöitä Ailigas-tunturin varjossa`

`ja vielä Wanhan Taskilan pihapiirissä.`

Kukaan ei muista, mikä tuo yhtälö tarkalleen ottaen oli, mutta katsotaanpa vaikka tätä: $3^x = 2x + 2$.

GeoGebra:n CAS-laskin puhuu:



Mutta mikä ihmeen *LambertW* sinne ilmestyi, kysyivät tytöt.

Tässä kirjoituksessa valaistaan tuota salaperäistä *LambertW*-funktiota ja sen käyttömahdollisuuksia erityisesti yhtälöiden ratkaisemisessa.

Vähän historiaa

Johann Heinrich Lambertin elämä ajoittuu vuosille 1728–1777. Hänen kuuluisa aikalaisensa *Leonhard Euler* (1707–1783) työskenteli yhteistyössä *Lambertin* kanssa tämän tutkimuksen kohteena olevien yhtälöiden parissa etupäässä sarjamuotoisia ratkaisuja kehitellen.

Molemmat matemaatikot olivat ajan tyyliin erittäin laaja-alaisia ulottaen tutkimuksensa myös eri luonnontieteiden alueelle.

Lambertin tutkimusalueet liikkuivat mm. lukuteoriassa, tilastotieteessä, tähtitieteessä, optiikassa, filosofiassa. Hänet tunnetaan myös ensimmäisestä π:n irrationaalisuuden todistuksesta, jota ovat sittemmin täsmentäneet ja yksinkertaistaneet monet matemaatikot aina viime aikoihin saakka. *Lambertin* matemaattisten julkaisujen joukosta löytyy myös tulevaisuuden visio koneesta, joka kykenisi suorittamaan matemaattista symbolien käsittelyä, siis verrattomasti kehittyneempää laitetta kuin *Pascalin* vuonna 1642 rakentama aritmetiikkakone.

Runsaat 200 vuotta *Lambertin* pähkäilyjä myöhemmin ilmestyivät ensimmäiset ('muistiongelmaiset') symbolialgebraohjelmistot, ja kas, nykyisin on 'CAS' jokaisen koululaisenkin ulottuvilla.

Lambert tutki muotoa $x = q + x^m$ olevaa yhtälöä kehittämällä ratkaisun sarjaksi. Euler kehitti sarjaratkaisun yhtälölle $xe^x = a$, joka on muunnettavissa alkuperäisen *Lambertin* tutkiman yhtälön ratkaisuksi. Tämäpä on juuri se yhtälö, jonka ratkaisu määrittelee '*Lambertin funktion*' siinä muodossa kuin sitä nykyisin käsitellään.

Kirjoituksessa käytettävät ohjelmistot

Tässä kirjoituksessa ei käsitellä *Lambertin funktion* arvojen laskemiseen tarvittavia numeerisia ratkaisumenetelmiä, vaan käytetään ohjelmistoja, joissa kyseinen funktio on valmiiksi ohjelmoituna.

Valtaosa laskuista suoritetaan MATLAB/OCTAVE:lla. Joitakin MAPLE-esimerkkejä on mukana symbolilaskennan alueella, ja pari näkymää myös GEOGEBRA-ratkaisuihin, kuten yllä.

Kirjoituksessa [HA1] on ohjelinkkien lisäksi perusteellinen alkuunpääsyohjeisto aina OCTAVE-onlinen käyttöönottoa myöten.

Tämän kirjoituksen viitteissä on lisäksi hyvä OCTAVE:n yleisopas [Oct].

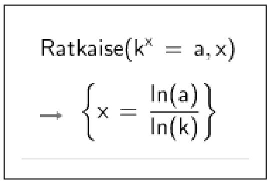
Ohjelmakoodeja ja ajotuloksia, erityisesti niiden tuottamia kuvia on tekstissä mukana joiltakin osin hiukan riisuttuina. Täydelliset koodit kaikkine yksityiskohtineen on saatavissa viitteessä [HA2].

Käänteisfunktioita

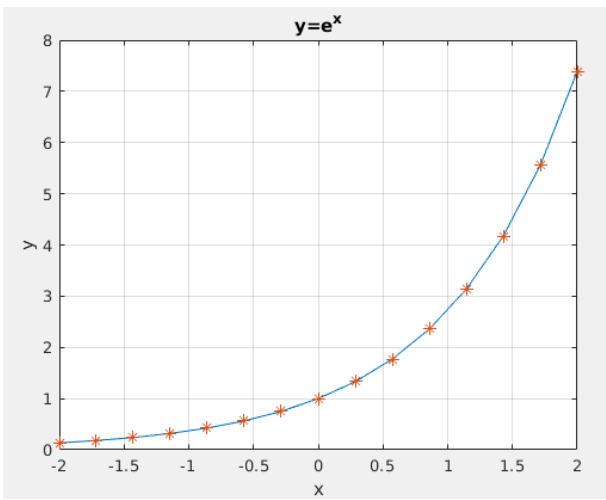
Yhtälön ratkaiseminen yleisessä muodossa $f(x) = y$ voidaan nähdä käänteisfunktion f^{-1} arvon laskemisena pisteessä y. Tämä edellyttää käänteisfunktion tai sen haaran olemassaoloa pisteen y ympäristössä. Jos ratkaistavana on esimerkiksi yhtälö $x^2 = 4$, jolloin $f(x) = x^2$, niin ratkaisut ± 2 sijaitsevat kaksihaaraisen käänteisfunktion $\sqrt{y}$ positiivisella ja negatiivisella haaralla. Vaihdetaan y:n ja x:n roolit, jolloin kuvaaja muuttuu oikealle avautuvaksi paraabeliksi, ja positiivinen ja negatiivinen käänteisfunktion haara $\pm\sqrt{x}$ näkyvät normaaliasentoisessa koordinaatistossa.

Logaritmi

Jos emme olisi kuulleet logaritmista, niin tämäkin GEOGEBRA-lasku olisi hämmentävä:

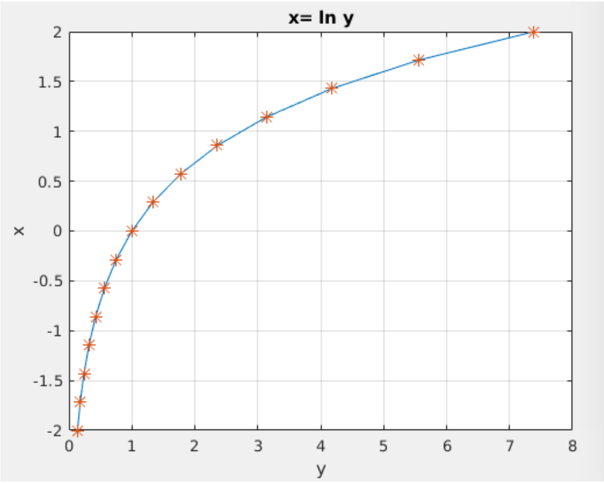


Johdatuksena pääaiheeseen onkin hyvä palauttaa mieleen logaritmin tarina, sitä tytötkin tarvitsivat, ennen kuin oppivat rakastamaan logaritmeja :-)



pisteet (x, e^x)

Funktio $x \mapsto e^x$ on kasvava ja jatkuva, käänteisfunktio on siis olemassa. Minkähän nimen sille antaisimme? No, olisiko mitään, jos kutsuttaisiin sitä nimellä '**luonnollinen logaritmi**'? Kuulostaa monimutkaiselta, mutta olkoon menneeksi, otetaan sentään käyttöön helppo merkintä: `ln`. Siis jos $y = e^x$, niin x on y:n luonnollinen logaritmi $x = \ln(y)$.



pisteet (e^x, x)

Tässä siis pystyakselilla ovat lähtöarvot x ja vaaka-akselilla tulosarvot $y = e^x$.

Kuvat syntyivät seuraavilla komennoilla MATLAB:ssa/OCTAVE:ssa:

```
x=linspace(-2,2,15);
y=exp(x);
plot(x,y); % Pisteet (x(k),y(k)).
hold on
plot(x,y,'*','MarkerSize',7);
title('y=e^x')
xlabel('x');ylabel('y')
```

Vaihdetaan x ja y plot-komennossa:

```
figure % Uusi grafiikkaruutu.
plot(y,x);  % Pisteet (y(k),x(k)).
grid on;hold on
plot(y,x,'*','MarkerSize',8);
title('x= ln y')
xlabel('y');ylabel('x')
```

Käänteisfunktion arvot saadaan siis valmiiksi lasketuissa funktion $f(x) = e^x$ arvopisteissä $y_k = f(x_k)$.

Käänteisfunktiokuvassa näkyvät merkityt $(*)$-pisteet ovat tarkkoja käänteisfunktion arvoja (f-arvojen laskennan tarkkuudella), koska ne ovat lukuja $f(x_k)$ vastaavia, pystyakselille sijoitettuja lähtöarvoja x_k.

MATLAB/OCTAVE suorittaa visuaalisesti paloittain lineaarisen interpolaation (y_k, x_k)-pisteiden välillä. Jos halutaan laskea käänteisfunktion arvo mielivaltaisessa pisteessä y, voidaan suorittaa numeerisesti paloittain lineaarinen (tai 'palapolynomi'-) interpolaatio, jonka MATLAB/OCTAVE tekee visuaalisesti.

Menetelmää kutsutaan *käänteiseksi interpolaatioksi* ja sitä käytetään sopivin muunnelmin osana useita menetelmiä yhdistävissä yhtälöiden ratkaisemisen 'hybridialgoritmeissa'. Tällä kertaa en etene pitemmälle numeeristen menetelmien parissa.

Kun funktio määritellään annetun funktion f käänteisfunktiona, on paikallaan miettiä, mitä johtopäätöksiä voidaan tehdä funktion f ominaisuuksien perusteella käänteisfunktion f^{-1} ominaisuuksista. Ainakin derivaatta voidaan johtaa.

Logaritmin derivaatta: Käänteisfunktion derivaatalle pätee $Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$, missä $x = f^{-1}(y)$. Jos $f(x) = e^x$ niin $f^{-1} = \ln$. Koska $D\, e^x = e^x$, niin logaritmin derivaatta on $D(\ln y) = \frac{1}{e^x}$, missä $e^x = y$, joten $D(\ln y) = \frac{1}{y}$.

Samalla mallilla voidaan johtaa kohta määriteltävän *Lambert W*-funktion derivaatta. Muotoillaan harjoitustehtäväksi, kun sen aika koittaa.

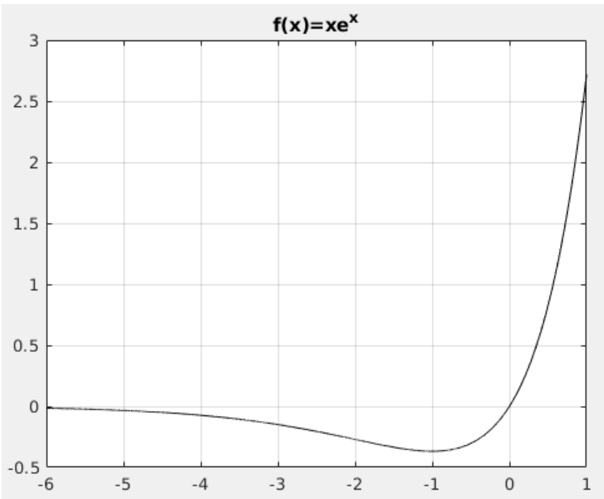
Lambertin W-funktio

Toimitaan aivan samoin kuin edellä eksponenttifunktion ja logaritmin tapauksessa. Lähtökohtana on e^x:n sijasta funktio

$$f(x) = xe^x.$$

Lähdetään siis etsimään käänteisfunktiota tälle. Piirretään aivan kuten edellä, nyt on e^x:n sijasta xe^x:

```
f= @(x) x.*exp(x) %Funktiomäärittely,huomaa(.*)
x=linspace(-6,1,1000);
y= f(x);
plot(x,y,'k'); grid on
title('f(x)=xe^x')
```

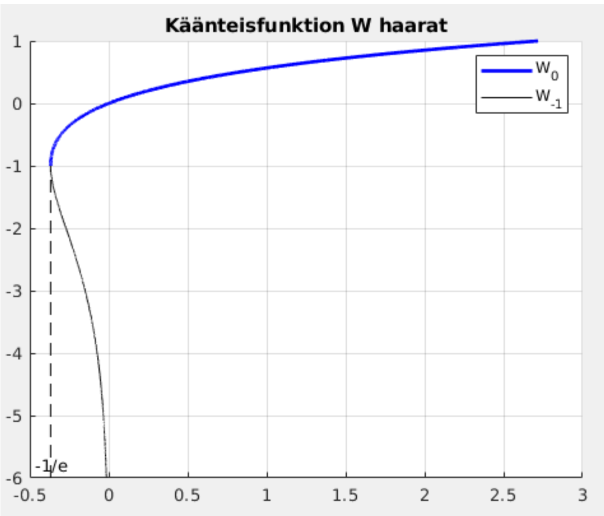


Koska $f'(x) = e^x(x+1)$, vahvistuu todeksi kuvan kertoma: f:n minimi on kohdassa $x = -1$, ja f on vähenevä vasemmalla ja kasvava oikealla puolella. Huomaa, että $f(x) \to 0$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Minimin arvo $f(-1) = -1/e \approx -0.367$. Siis jos $-1/e < y < 0$, saadaan kaksi x:n arvoa, joille $xe^x = y$, ja jos $y \geq 0$, saadaan yksi x. Siis edellisillä y:n arvoilla on kaksihaarainen käänteisfunktio ja jälkimmäisillä yksikäsitteinen.

Merkitään **käänteisfunktiota** tai sen haaroja W:llä tai *LambertW*:llä. Niinpä W suhtautuu funktioon $x \mapsto xe^x$ aivan kuten *luonnollinen logaritmi* ln suhtautuu eksponenttifunktioon $x \mapsto e^x$.

Piirretään käänteisfunktio aivan kuten edellä `exp/log`-puuhassa. Vaihdetaan x ja y, eli piirretään pisteet (y_k, x_k). Jatketaan edellisen istunnon muuttujalla `x`.

```
x1=x(x>=-1);y1=f(x1);  %1. haara -> W_0
x2=x(x<=-1);y2=f(x2);  %2. haara -> W_{-1}
p1=plot(y1,x1,'b','LineWidth',2);
hold on;grid on
p2=plot(y2,x2,'r');
title('Käänteisfunktion W haarat')
legend([p1,p2],{'W_0','W_{-1}'})
e=exp(1); % e ei ole varattu symboli.
plot([-1/e -1/e],[-6,-1],'--k')
text(-1/e-0.1,-5.8,'-1/e')
```



Vaihdetaan käänteisfunktiossa *y:n* ja *x:n* roolit, ja kootaan yhteen edellä jo osittain todettua:

- Käänteisfunktion kasvava haara W_0 on määritelty joukossa $x \geq -1/e \approx -0.3679$ ja saa arvoja $y \geq -1$.
- Pienenevä haara W_{-1} on määritelty välillä $-1/e \leq x < 0$ ja se saa kaikki arvot $y \leq -1$. Muista: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
- Välillä $-1/e < x < 0$ käänteisfunktiolla on kaksi haaraa, vähenevä: $y \leq -1$ ja kasvava: $-1 \leq y < 0$.

Kompleksialueella W on äärettömän monihaarainen (kuten vaikkapa trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot jo reaalialueella). Kompleksiset W-funktion haarat pohjautuvat kompleksialueen logaritmifunktion haaroihin, mutta niihin ei tämän kirjoituksen alue ulotu.

Merkinnällä W tarkoitetaan yleensä käänteisfunktion jotain haaraa, W_0, W_{-1} tarkoittavat käänteisfunktion reaalista kasvavaa haaraa ja vähenevää haaraa vastaavasti. Useimmissa ohjelmistoissa W-funktiolla on nimenään `lambertW`, vaihtelevan kokoisin kirjaimin, ja ensimmäinen argumentti on reaalialueella haaraan viittaava 0 tai -1. Jos 1. argumentti puuttuu, ts. annetaan vain yksi argumentti, niin käsitellään päähaaraa W_0.

Nykyisin monet ohjelmistot ja kielet sisältävät *Lambertin funktion* koodin. Tässä on OCTAVE-onlinen helptekstin ote, jossa samalla kerrataan ohjelman merkinnöin edellä esitellyt funktion perusominaisuudet.

```
octave:1> help lambertw
-Function: lambertw(Z)
-Function: lambertw(N, Z)
 This function satisfies W(z).*exp(W(z)) = z,
 and can thus be used to express solutions of
 equations involving exp's or log's.
 N must be integer, and specifies the branch of W.
 W(z) is a shorthand for W(0,z).
 Branches 0 and -1 are the only ones that can
 take on non-complex values.
 For example, the principal branch W(0,z) passes
 through the point (0, 0):
   lambertw (0)    -> ans = 0
   lambertw(-1,0) -> ans = -Inf
 And the 0 and -1 branches coincide for the
 real value:
    x = -1/exp(1);
    lambertw (0, x)    -> ans = -1
    lambertw (-1, x)   -> ans = -1
```

Esimerkkejä

Yhtälöt, jotka sisältävät termejä x^p, e^x, $\ln x$, pyritään saattamaan muotoon $ve^v = b$, jolloin W-funktion määritelmästä seuraa: $v = W(b)$. (Vertaa tähän: Jos edellä kertoja v puuttuisi, niin ratkaisu olisi $v = \ln b$.)

Esim. 1. Ratkaise alussa olleen GEOGEBRA-istunnon yhtälö $3^x = 2x + 2$.

Ratkaisu: Yhtälössä esiintyy x ja 3^x, joten *Lambertista* voisi olla apua. Pyritään aluksi muotoon $u3^u$, missä u on sopiva apumuuttuja:

$$3^x = 2x + 2 \iff (x+1)3^{-x} = \frac{1}{2}.$$

Kerrotaan $-\frac{1}{3}$:lla, jolloin $(-x-1)3^{-x-1} = -\frac{1}{6}$.

Merkitään $u = -x-1$, otetaan 3:n sijasta e kantaluvuksi ja kerrotaan yhtälö $\ln 3$:lla, jotta päästään muotoon $(*)e^{(*)} = b$:

$$u(\ln 3)e^{u \ln 3} = -\frac{\ln 3}{6}.$$

Siis $u \ln 3 = W(-\frac{\ln 3}{6})$.

Lasketaan $-\frac{\ln 3}{6} = -0.1831$, joka kuuluu välille $(-\frac{1}{e}, 0)$, joten molemmat haarat W_0, W_{-1} antavat reaalisen arvon.

Näin saadaan

$$x_0 = -1 - \frac{1}{\ln\, 3} W_0(\frac{-\ln 3}{6}),$$
$$x_1 = -1 - \frac{1}{\ln\, 3} W_{-1}(\frac{-\ln 3}{6}).$$

Tämän tyyppisellä tekniikalla saadaan pienellä harjoitelurutiinilla yllättävän suuri joukko yhtälöitä, jotka sisältävät termejä x^p, $\ln x$, e^x ratkaistuksi Lambertin funktion avulla.

Lasketaan vielä likiarvot (Octave:ssa `log` on luonnollinen logaritmi):

```
>> x0=-1-lambertw(0,-log(3)/6)/log(3)
   x0 = -0.7901   % Laskun tulos
>> x1=-1-lambertw(-1,-log(3)/6)/log(3)
   x1 = 1.4446    % Laskun tulos
```

Jatkotehtävä: CAS-ratkaisu ja kuvasta tarkistaminen. Katsotaan, miten Matlab:n symbolilaskenta selviää tehtävästä:

```
>> syms x
>> solve(3^x == 2*x + 2,x)
ans =
- lambertw(0, -log(3)/6)/log(3) - 1
```

Muuten oivallisesti, mutta toinen ratkaisu

```
- lambertw(-1, -log(3)/6)/log(3) - 1
```

jäi puuttumaan.

Osaisiko Maple?Annetaan LaTeX:n tulkata Maple:n antamat tulokset:

```
> ratk:=solve(3^x = 2*x + 2,x);
> latex(ratk[1]);
```

$$-\frac{W\left(-\frac{\ln(3)}{6}\right) + \ln(3)}{\ln(3)}$$

```
> latex(ratk[2]);
```

$$-\frac{W\left(-1, -\frac{\ln(3)}{6}\right) + \ln(3)}{\ln(3)}$$

Siispä Maple osasi ratkaista täydellisesti.

Kirjoituksen alkujohdannossa olevaa GeoGebra-kuvaa tihrustamalla näkyy, että GeoGebra:n CAS pärjäsi tässä myös.

Esim. 2. Ratkaise yhtälö $x = ae^x$. Millä a:n arvoilla on 2, 1, 0 reaalista ratkaisua?

Ratkaisu: Kerrotaan yhtälö $-e^{-x}$:llä, jolloin

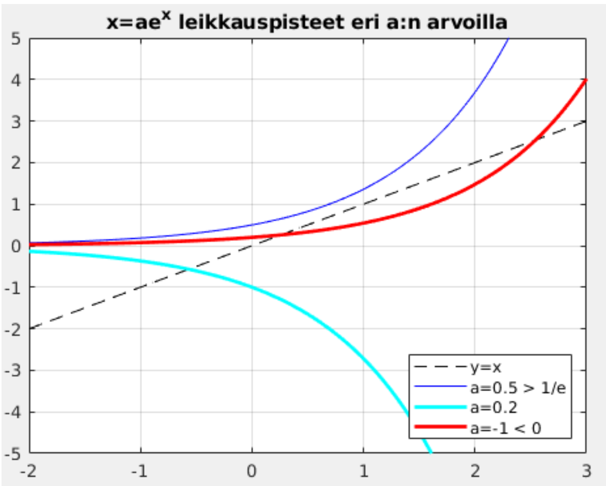
$$-a = -xe^{-x}.$$

Lambertin W-funktion määritelmän mukaan saadaan $x = -W(-a)$.

Katsotaan W-funktion kuvaa:

- 2 ratkaisua, kun $-\frac{1}{e} \le -a \le 0$, eli $0 \le a \le \frac{1}{e}$.
- 1 ratkaisu, kun $-a > 0$, eli $a < 0$.
- 0 reaalista ratkaisua, kun $-a < -\frac{1}{e}$, eli $a > \frac{1}{e}$.

Piirretään vielä kuva yhtälön molemmista puolista valitsemalla kultakin yllä mainitulta arvoalueelta näytteeksi a:lle arvot 0.5, 0.2, -1.



Kuva tehtiin näillä komennoilla:

```
>> x=linspace(-2,3);
>> plot(x,x,'--k')
>> hold on
% 1) a> 1/e = 0.3679 =>ei ratk.Esim: a=0.5
% 2) 0 < a < 1/e    => 2 ratk. Esim. a=0.2
% 3) a < 0    => 1 ratk. Esim. a=-1
>> a=0.5;
>> plot(x,a*exp(x),'b') % Ei ratk.
>> a=-1;
>> plot(x,a*exp(x),'c','LineWidth',2)%1 rat
>> a=0.2;
>> plot(x,a*exp(x),'r','LineWidth',2)%2 rat
>> grid on;ylim([-5 5])
>> legend('y=x','a=0.5 > 1/e',...
    'a=0.2','a=-1 < 0')
>> title('x=ae^x leikkauspisteet...')
```

Kuva tukee yllä olevia johtopäätöksiä.

Lasketaan seuraavaksi OCTAVE:n `lambertw`-funktiolla nuo kuvassa näkyvät ratkaisut.

```
>> a=0.5
>>-lambertw(0,-a)  % ans = 0.7940 - 0.7701i
>>-lambertw(-1,-a) % ans = 0.7940 - 0.7701i
```

Ei reaalisia ratkaisuja.

```
>> a=0.2
>> x0=-lambertw(0,-a)  % ans = 0.2592
>> x1=-lambertw(-1,-a) % ans = 2.5426
```

2 reaalista ratkaisua.

```
>> a=-1
>> x0=-lambertw(0,-a) % ans = -0.5671
>> -lambertw(-1,-a) % ans = 1.5339 + 4.3752i
```

1 reaalinen ratkaisu.

Siispä kaikki on kuin kuvassa.

Analyyttinen vai numeerinen

Tässä on sopiva kohta palata samaan pohdiskeluun, jota harjoitettiin diffyhtälökirjoituksessa [HA1], kun 'täydennysfunktioina' olivat *Airyn* ja *Besselin* funktiot.

Tällä kertaa voitiin *Lambertin* W-funktion avulla määrittää parametri a, jota tehtävässä kysyttiin. Pelkkien numeeristen yhtälöratkaisijoiden avulla oltaisiin jouduttu katselemaan numeerisen hakuammuskelun puita näkemättä analyyttisen ratkaisun tarjoamia metsiköitä. Toisaalta tehokkaat numeeriset menetelmät mahdollistavat *Lambertin funktion* hyötykäytön. Molempi siis parempi. Ja jälleen huomataan, että *analyyttisen ratkaisun* käsite laajenee luontevasti laajentamalla sopivasti 'hyväksyttävien' funktioiden joukkoa.

Esim. 3. Ratkaise yhtälö

$$x^y = y^x.$$

Tässä on kysymys implisiittisessä muodossa annetun yhtälön ratkaisemisesta muodossa $y(x)$ tai $x(y)$. Aika veikeä tehtävä, ehkä vaikeakin?

Ensinnäkin on selvää, että triviaaliratkaisu on $y = x$, mutta mitä muuta? Kokonaislukuratkaisuja tuskin löytyy muita kuin 2 ja 4. Viimeinen toivo taitaa olla yritys turvautua ystäväämme *Lambertiin*. Miten tuossa lähdettäisiin liikkeelle? Seuraava osoittautuu kelvolliseksi.

Korotetaan yhtälö puolittain potenssiin $\frac{1}{x}$:

$$x^{\frac{y}{x}} = y \implies e^{-\frac{\ln x}{x}y} = y^{-1}.$$

Kerrotaan puolittain y:llä ja sitten järjestetään kertoimeksi sama kuin eksponentissa kertomalla $-\frac{\ln x}{x}$:llä. Saadaan:

$$(-\frac{\ln x}{x}y)e^{-\frac{\ln x}{x}y} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Näin saatiin vasen puoli muotoon $(*)e^{(*)}$, ja voidaan turvautua *Lambertin* apuun:

$$-\frac{\ln x}{x}y = W(-\frac{\ln x}{x}).$$

Siispä

$$y = -\frac{W(-\frac{\ln x}{x})x}{\ln x}.$$

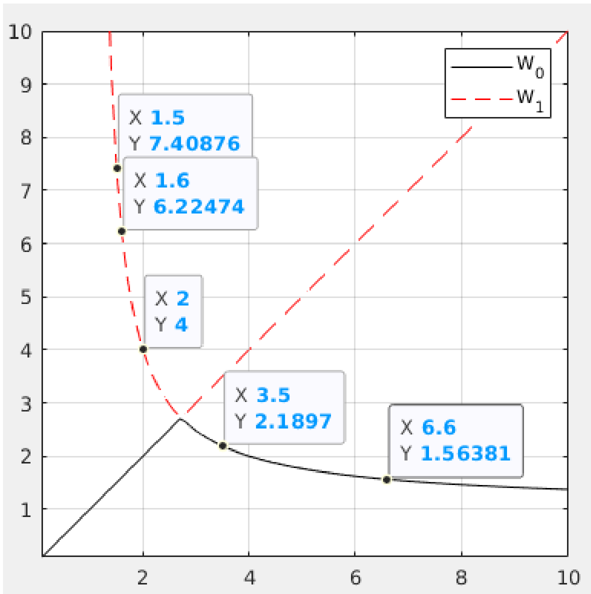
Miltä näyttää kuvaaja? Puolet kuvasta saadaan tähän tapaan:

```
x=linspace(.1,10);
y=-x./log(x).*lambertw(-log(x)./x);
plot(x,y)
```

Toinen puoli saadaan käyttämällä laskevaa haaraa W_{-1}, jolloin täytyy rajoittua niihin x:n arvoihin, joilla

$$-\frac{1}{e} < -\frac{\ln x}{x} < 0.$$

Vaihtoehtoisesti voitaisiin käyttää hyväksi symmetriaa, eli vaihtaa x ja y, jolloin saataisiin kuvan puuttuva puolikas taas päähaaran W_0 avulla. Kuva tehtiin edellisellä tyylillä (ja siihen jäi pikku virhe: W_1 pitää lukea: W_{-1}).



$x^y = y^x$

Kuvasta (hiirikäden tarkkuudella) poimittujen arvojen avulla voit testata yhtälön toteutumista likimäärin.

Vertailun vuoksi voidaan piirtää myös implisiittimuodossa 0-korkeuskäyrä `contour`-funktiolla, joka edustaa 'raakaa voimaa' verrattuna hienostuneeseen *Lambert*-käsittelyyn. Yksityiskohdat tästä, kuten kaikista muistakin kirjoituksen koodeista ovat viitteessä [HA2].

Mihin muuhun *LambertW* kelpaa?

Viite [CGHJK] on perusteellinen esitys aiheesta sisältäen suuren joukon matematiikan ja luonnontieteiden sovellusaloja. Mainitsen tässä vain yhden, joka liittyy sekä edelliseen esimerkkiin että Solmun numerossa 1/2021 olleeseen 'Delfiinikirjoitukseen' [HA1]. Siinä esittelin yhtenä ratkaisutekniikkana 'muuttujien erottelun'. Mainitsin, että tämä menettely johtaa usein implisiittiseen (ratkaisemattomassa muodossa olevaan) yhtälöön y:n ja x:n välillä. Viitteessä [CGHJK] esitellään palamisilmiöön liittyvä 'Model combustion problem', jota kuvaa alkuarvotehtävä

$$y' = y^2(1-y),\ y(0) = \epsilon > 0.$$

Siinä näytetään muuttujien erottelulla aikaansaatu implisiittinen yhtälö, josta artikkelin kirjoittajat johtavat W-funktion avulla esitettävän eksplisiittisen ratkaisun.

Värikäs visuaalinen tiivistelmä *Lambert*-teemasta on nähtävissä ja seinätauluksi ladattavissa **Lambert-posterissa**:

`http://www.orcca.on.ca/LambertW/`

Käy ihmeessä katsomassa, se on ihan MUST!

Muutama sana *W*-funktion laskennasta

Julkaisu [CGHJK] on perusteellinen tietolähde koko aihepiiriin *'Lambertin funktio'*. Siinä kerrotaan, kuinka MAPLE-symbolilaskentaohjelmiston kehitysryhmä täydennettynä *Donald Knuth*'illa ryhtyi tutkimaan sen historiaa ja erilaisia käyttömahdollisuuksia sekä erityisesti kehittämään numeerista algoritmia, joka olisi kyllin tehokas ja tarkka, jotta se täyttäisi CAS-ohjelman 'mielivaltaisen tarkkuuden' vaatimuksen ja toimisi tehokkaasti myös singulaaripisteen lähistöllä vieläpä funktion kompleksihaarojen suhteen. Julkaisussa pohditaan myös nimien `LambertW` ja `W` historiaa ja sen useitakin 'uudelleen löytymisiä' myös mm. Ω-nimisenä. Matemaatikot *Polya* ja *Szegö* (1925) arvellaan myös nimen `W` ensimmäisiksi käyttäjiksi.

Tekijät kehittivät 'mielivaltaisen tarkkuuden' laskenta-algoritmin, joka siis kirjoitettiin MAPLE-ohjelmistolle. Algoritmi on toteutettu '*Halleyn menetelmällä*', joka on vähemmälle huomiolle jäänyt 'terästys' tunnetulle *Newtonin menetelmälle*. Julkaisu [CM] on helppolukuinen tiivistelmä, joka sisältää myös hyvin selkeän, *Halleyn menetelmällä* kirjoitetun MATLAB-koodin `W`-funktiolle.

Nykyisin tämä funktio sisältyy moniin ohjelmointikieliin ja ohjelmistoihin nimellä `LambertW` tai esim. `lambertw`, kuten 'meidän' OCTAVE:ssa. CAS-ohjelmistoista mainittakoon edellä mainittujen lisäksi MAXIMA, MATHEMATICA ja Wolframin vastaava julkinen tuote WOLFRAM ALPHA. (Kts. myös [WF].)

Derivaatta voidaan johtaa käänteisfunktion derivointikaavan avulla, kuten yllä logaritmin tapauksessa tai implisiittisen derivoinnin avulla kaavasta

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Saadaan: $W'(x)e^{W(x)}(1+W(x)) = 1$,

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1+W(x))} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Jälkimmäinen muoto saadaan sijoittamalla $e^{W(x)}$:n paikalle $\frac{x}{W(x)}$. Jos haluaisimme laskea arvon $W'(0)$, pitäisi käyttää edellistä muotoa, josta saadaan $W'(0) = 1$. Kokeilemani CAS-ohjelmat palauttavat jälkimmäisen muodon, jota ei voi käyttää arvolla $x = 0$. CAS-ohjelmien puutteena on usein erikoispisteiden käsittely, mistä jokaisella 'vakavalla' käyttäjällä lienee kokemuksia. (Kts. myös [CJ].)

Tehtävä: Huomaa, että yllä W tarkoittaa kumpaa tahansa haaraa W_0, W_{-1}. Piirrä derivaattafunktion kummankin haaran kuvaajat ja vertaa niitä edellä olevaan *Lambertin* funktion kuvaajaan. Valitse piirtoalue sopivasti väliä $-\frac{1}{e} < x < 0$ tapauksessa W_{-1} ja aluetta $x > -\frac{1}{e}$ tapauksessa W_0 reunoilta (reunalta) supistaen. Mallia voit ottaa tiedostoista [HA2].

Siis lopultakin: "Mikä ihmeen *LambertW*?"

Saivatkohan *Elle* ja *Vilja* valaistusta kysymykseen?

Viitteet

[CGHJK] Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey, and D. E. Knuth: Advances in Computational Mathematics, Vol 5 (1996) 329–359, ladattavissa:
`https://cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf`

[CM] Cleve Moler: `https://blogs.mathworks.com/cleve/2013/09/02/the-lambert-w-function/`

[Posteri] `http://www.orcca.on.ca/LambertW/`

[Wiki] `https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function`

[WF] `https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html`

[HA1] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/1/diffyhtaloita.pdf`

[HA2] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/2/skriptit/`
Sisältää tiedostot `LambertSkriptit.m` ja `LambertSkriptitLIVE.pdf`. Edellisessä on koodit (MATLAB, OCTAVE), jälkimmäinen MATLAB:n tyylikkäällä 'LiveEditorilla' ajettu pdf.

[Oct] `https://octave.org/doc/v6.2.0/`

[CJ] R.M. Corless and D.J. Jeffrey,"Well, It Isn't Quite That Simple", SIGSAM Bulletin, 26, 3 (1992) 2–6.