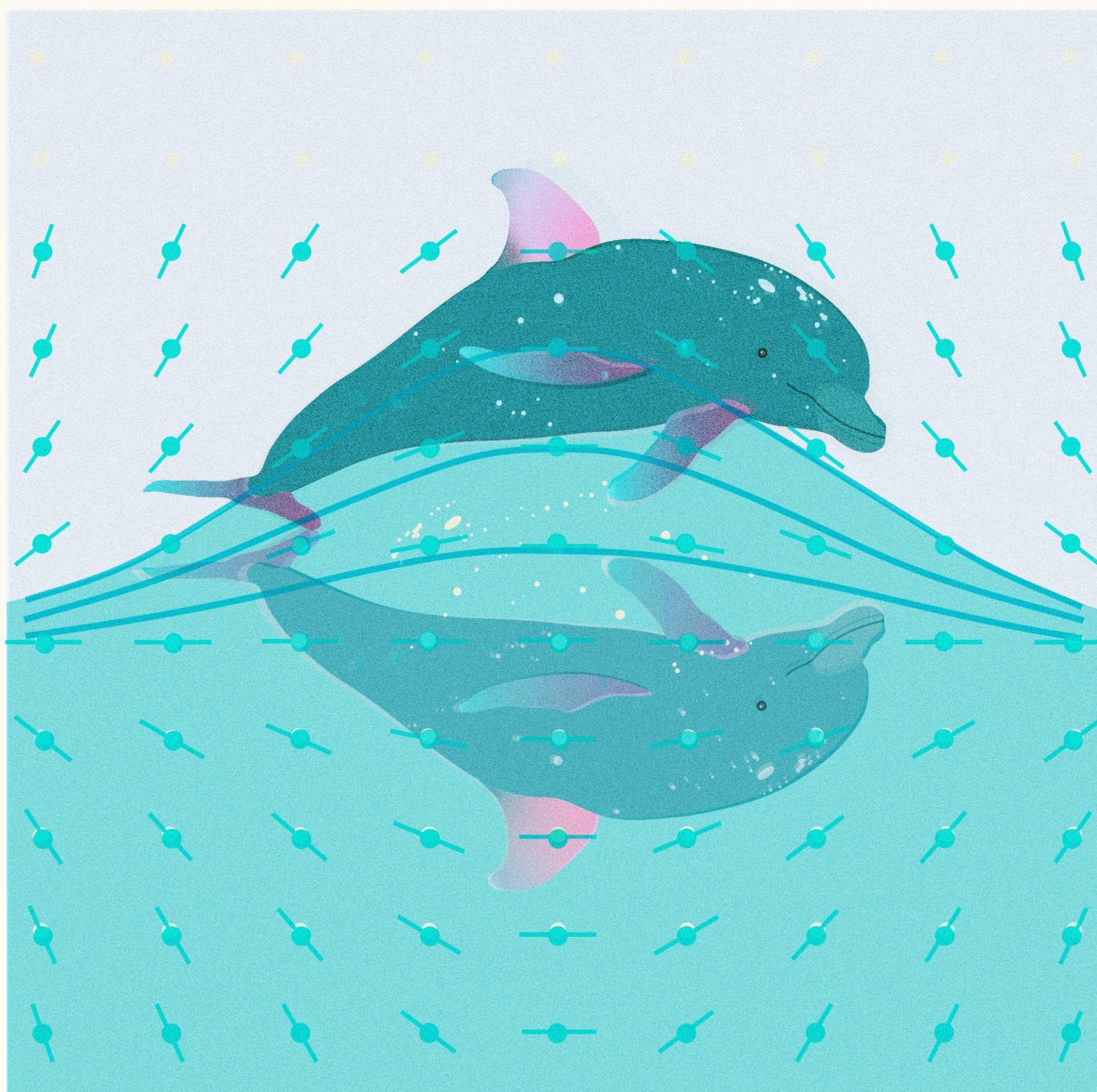


S&LMU

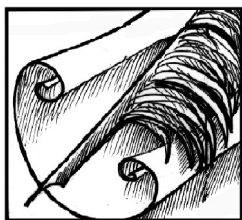
MATEMATIIKKALEHTI 1/2021

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Ylioppilaskokeet ja sisäänottokiintiöt – jälleen (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) ..	3
Differentiaaliyhtälöitä, ohjelmointia ja delfinimallinnusta (Heikki Apiola)	5
Matematiikkadiplomit vuonna 2020 (Marjatta Näätänen)	19
Solmun tehtävien ratkaisut	21
Monte Carlon menetelmä ja numeerinen integrointi Pythonilla (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	27



Ylioppilaskokeet ja sisäänottokiintiöt – jälleen

Pääkirjoitus

Rehellisesti sanottuna en kuvitellut päätyväni kirjoittamaan pääkirjoitusta yliopistojen sisäänottokiintiöistä tänä keväänä tai varsinkaan tähän lehteen. En edes muista mikä alkuperäinen aiheeni oli, mutta tässä sitä ollaan – ruotimassa yliopistojen sisäänottoa. Tänä keväänä alkoi jälleen keskustelu ylioppilaskokeiden merkityksestä yliopistojen sisäänotossa. Tarkasti ottaen keskustelu suuntautui siihen, onko matematiikan paino järkevä vai ei.

Keskusteluun on osallistunut useita tahoja ja keskustelu on rönsyillyt. Tavoitteeni onkin antaa tässä vain jonkinlainen tiivistelmä erilaisista argumenteista ja näkökulmista, joita keskustelussa on tähän mennessä kuultu. Jos en ihan aikajanan kanssa sekoile, alkoi keskustelu Ylen raflaavasti otsikoimasta ”*Epäreilua niille, joita matikka ei kiinnosta*” – Oona Marttinen ja suuri osa korkeakoulujen rehtoreista arvostelee opiskelijavalintaa [1]. Tässä tekstissä ongelmia oli tuotu hyvin esiin, mutta valitettavasti juuri muuhun ei oltu keskitytty lainkaan. Kovin pienelle huomiolle jäi esimerkiksi se, että yliopistojen rehtoreista vain 18 % suhtautui pitkän matematiikan painoon negatiivisesti. Muiden mielestä se oli hyvä tai heillä ei ollut mielipidettä. Samana päivänä Yle uutisoi myös, että opetusministeri Saramo piti tilannetta hälyttävänä [2].

Matematiikan painoa puolestaan puolustivat Hesarissa sekä pääkirjoitustoimittaja Annikka Mutanen [3] että mielipidepalstalla matematiikan opiskelija Eeva Pyrhönen [4]. Molemmissa kirjoituksissa korostui matematiikan yleinen merkitys abstraktille ajattelulle. Tätä kautta on helppo ymmärtää, miksi matematiikan

osaamisesta on hyötyä monella muullakin alalla kuin vain matematiikassa. Mutasen kirjoitukseen ilmestyi itse asiassa vastine melkein kuukautta myöhemmin Huvudstadsbladetissa, kun Nora Hämäläinen kirjoitti manipuolisuuden katoamisen riskistä [7].

Ennen Hämäläisen tekstiä ilmestyi vielä kaksi artikkelia, jotka haluan tässä mainita. Näissä kahdessa on hyvin paljon yhteistä oman ajatteluni kanssa. Ensin toukokuun lopussa Anna-Sofia Nieminen [5] muistutti siitä, että muullakin kuin pitkällä matikalla pääsee yhä korkeakouluun. Moni opiskelupaikka ei vaadi huipparvosanoja eikä sitä pitkää matikkaa ja hän antoi tästä myös useita esimerkkejä. Tiina Raevaara [6] formuloi hyvin selvästi: ”Kohupaljastus: pisteitä valintaan todella saa muistakin aineista kuin pitkästä matematiikasta.” Hän myös totesi sen, että toisin kuin joskus väitetään, ei pitkän matematiikan laudatur ole helppo reitti korkeakouluun, sillä sitä laudaturia ei ole helppo saada.

Toistan nyt hiukan itseäni ja edellistä kertaa, kun kirjoitin ylioppilaskokeiden antamista pisteistä: pitkässä matematiikassa kurssimäärä on huomattava. Valtakunnallisia pakollisia ja syventäviä on yhteensä 13 kurssia. Siinä suhteessa on varsin kohtuullista, että urakan kunnialla selvittämisestä saa reilusti pisteitä. Lisäksi matematiikka opettaa abstraktia ajattelua sekä on hyvä ennuste pärjäämiselle korkeakouluopinnoissa. Minusta hyvin mielenkiintoista on se, että koko keskustelun aloittaneessa Ylen artikkelissa [1] yliopistojen rehtorit suhtautuivat yleisesti ottaen varsin myönteisesti tai neutraalisti pitkän matematiikan asemaan.

Kuuluttaisin itse kuitenkin ensisijaisesti kohtuutta ja harkintaa, kuten Nieminen [5] ja Raevaarakin [6] kuuluttivat. Minusta tuntuu täysin absurdilta kuulla (kuten toisinaan kuulen), että oppilaita käsketään valitsemaan pitkä matematiikka niiden pisteiden vuoksi. Onko se pitkän matematiikan laudatur monessa tapauksessa todella realistinen tavoite, jos sitä tavoitellaan vain pisteiden vuoksi, vailla kiinnostusta aineeseen? Matematiikka on hyödyllistä. Sitä tarvitaan yllättävillä aloilla. Monella humanistisella alalla tehdään tilastollista tutkimusta laadullisen tutkimuksen ohessa. Tilastollista tutkimusta on varmempi tehdä, jos tilastotieteen perusteet ovat hallussa. Todennäköisyyslaskenta ja analyysi auttavat hahmottamaan useita ilmiöitä, kuten epidemioita. Monelle pitkä matematiikka on hyvä valinta, mutta siis hyvä valinta matematiikan itsensä vuoksi, ei niiden pisteiden vuoksi.

Jos siis ainoa motivaatio pitkän matematiikan opiskeluun ovat pisteet, eikä se, että sitä uskoisi tarvitsevana tai että se kiinnostaisi, niin oleelliset kysymykset minusta ovatkin nämä: Mitä uskon haluavani opiskella? Tarvitsenko todella sen pitkän matematiikan laudaturin? Onko se oikeasti realistinen tavoite, eli olenko valmis tekemään huomattavasti töitä 13 kurssin (jatkossa 12 modulin) ajan?

Pitkä matematiikka – ja matematiikka ylipäätään – on loistava valinta, mutta pakotetuksi valinnaksi sitä ei kannata ajatella. Se vaatii työtä, mutta se tekee onnistumisen hienommaksi.

Hyvää kesän jatkoa!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Viitteet

- [1] ”Epäreilua niille, joita matikka ei kiinnosta” – Oona Marttinen ja suuri osa korkeakoulujen rehtoreista arvostelee opiskelijavalintaa. Yle 10.5.2021. <https://yle.fi/uutiset/3-11914722>
- [2] Ministeri Saramon mielestä toisen asteen koulutuksen tilanne on hälyttävä – matematiikka romahduttanut monen oppiaineen merkityksen. Yle 10.5.2021. <https://yle.fi/uutiset/3-11922299>
- [3] Annikka Mutanen: Matematiikan opiskelu on entistä hyödyllisempää, eikä se ole pahitteeksi aivoillekaan. Helsingin Sanomat 19.5.2021. <https://www.hs.fi/mielipide/art-2000007983783.html>
- [4] Eeva Pyrhönen: Matematiikka tukee abstraktia ajattelua. Helsingin Sanomat 23.5.2021. <https://www.hs.fi/mielipide/art-2000007979469.html>
- [5] Anna-Sofia Nieminen: Opiskelupaikan saamiseen ei tarvitse pitkää matikkaa tai laudatureja. Yle 31.5. <https://yle.fi/uutiset/3-11950507>
- [6] Tiina Raevaara: Tilastomatematiikan harhat. Suomen Kuvalehti 10.6.2021. <https://suomenkuvalehti.fi/jutut/kotimaa/kolumni-pitka-matematiikka-ei-ole-helppo-tie-yliopistoon-eika-pakkovalintalukiolaiselle/>
- [7] Nora Hämäläinen: Matematik, humaniora och mångfald. Huvudstadsbladet 12.6.2021. <https://www.hbl.fi/artikel/matematik-humaniora-och-mangfald/>

SMY:n hallituksen tervehdys

Solmu on tehnyt yhteistyötä jo pitkään Suomen matemaattisen yhdistyksen kanssa ja jo joitakin vuosia Solmu on ollut myös virallisesti ja byrokraattisesti SMY:n sateenvarjon alla. Tämä ei kuitenkaan ole käytännössä näkynyt ulospäin lainkaan, ei Solmun lukijoille, eikä SMY:n jäsenille. Tämä tilanne on ollut vähintäänkin outo.

Tavoitteemme on tiivistää yhteistyötä. Tästä lähtien uuden Solmun ilmestymisestä lähetetään tieto sisältäen lehden sisällysluettelon Suomen matemaattisen yhdistyksen jäsenille.

Aktiivisen yhteistyön myötä toivomme Solmun näkyvyyden lisääntyvän ja tämän puolestaan tarkoittavan enemmän luettavaa suuremman joukon kirjoittamana. Solmu toivoo artikkeleja lukijoilta. Vain laaja kirjoittajapooli takaa vaihtelevat tekstit. Kirjoitukset sekä kaikilta matematiikan aloilta että opettajilta ovat erittäin tervetulleita. Paras tapa lisätä tärkeänä pitämänsä asian näkyvyyttä on kirjoittaa siitä itse.



Differentiaaliyhtälöitä, ohjelmointia ja delfinimallinnusta

Heikki Apiola

Aalto yliopisto, matematiikan ja systeemianalyysin laitos, lehtori emeritus

heikki.apiola@aalto.fi

Aluksi

Käsillä on yritys hahmotella matemaattisen teorian, numeeristen menetelmien ja graafisen havainnollistuksen avulla tieteellisen laskennan aluetta, jossa mallintamisen työkaluina toimivat differentiaaliyhtälöt.

Differentiaaliyhtälöiden käsittelyyn on tietotekniikan ansiosta tullut viimeisten vuosikymmenien aikana uusia näkökulmia ja menetelmiä. Voidaan erottaa kolme erilaista, toisiaan täydentävää osaa:

- Analyttinen
- Geometrinen, kvalitatiivinen
- Numeerinen

Näiden näkökulmien välinen vuorovaikutus on mitä hedelmällisin. Kaksi ensimmäistä antaa näkemystä ratkaisujen ja ratkaisuparvien ominaisuuksiin, pitkän aikavälin käyttäytymiseen ym. ja kolmas on se, jolla tulokset viime kädessä saadaan numeeriseen muotoon. Kuitenkin numeerinen ratkaisu yksinään on “sokea”, se ei kerro koko ratkaisukentän käyttäytymisestä eikä tunnista joidenkin ratkaisujen luonteeseen vaikuttavien parametrien, kutsuttakoon vaikka “ominaisarvoiksi”, vaikutusta. Kaikkia siis tarvitaan.

Kirjoituksen voidaan katsoa kuuluvan *tieteellisen laskennan* alueeseen, jossa rakennetaan siltaa matemaattisen teorian ja tietotekniikan välille. Käytössämme on

ohjelmaympäristö, joka mahdollistaa numeerisen mallin suhteellisen vaivattoman muodostamisen graafisine havainnollistuksineen. Toisaalta sen avulla voi halutessaan opetella ohjelmoinnin perusteita korkean tason “funktionaalisella vektorikielellä”. Tällainen on vapaasti ladattava OCTAVE, johon olen viitannut aiemmissakin kirjoituksissani Solmussa. OCTAVE:n kieli on käytännöllisesti katsoen identtinen kaupallisen MATLAB-ohjelmiston kielen kanssa. Todettakoon kohtuuden nimissä, että kieli ja ympäristö on MATLAB:n kehittäjän *Cleve Molerin* ja hänen “joukkueensa” *MathWorks Inc’n*: <https://se.mathworks.com/> käsialaa ja innovaatiota. Korostan OCTAVEa siksi, että sen ääreen lukija pääsee vapaasti.

Yhtenä tavoitteena on opettaa lukijalle differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen perustekniikoita, ihan käsin laskienkin. Niitä sovelletaan moninaisiin esimerkkeihin ja havainnollistetaan kuvin, joita lukija voi ohjeiden mukaan tuottaa ja muunnella. Henki on sellainen, että asiat esitetään varsin perusteellisesti ajatellen lukijaa, joka lähtee matkalle vaatimattomin esitiedoin.

Tarinan juoni

Seuraillaan delfinien seikkailuja Välimeressä Aiolian saaristossa mallintaen populaation dynamiikkaa asteittain tarkentuvilla malleilla. Mallien mutkistuessa tarvitaan uusia ratkaisu- ja havainnollistusmenetelmiä, joita

esitellään vaiheittain, ja samalla kehitellään ratkaisuis-
sa tarvittavia algoritmeja ohjelmakoodiin saakka.

Esiintyvät datat ja matemaattiset mallit ovat viitteestä
[QG]. Ohjelmat ovat osittain saman viitteen pohjalta
muunneltuja, osittain taas omia kehitelmiäni.

Delfinijuonen ohella esitellään kolmea mainittua diffe-
rentiaaliyhtälöiden näkökulmaa pohjautuen mm. mai-
nioon viitteeseen [HW] sekä omiin vuosien varrella ke-
hittämiini opetusmateriaaleihin. Käväisy symbolilas-
kennan puolella ja siinä yhteydessä pohdinta analyyt-
tisten ratkaisujen “suljetun muodon” yleistyksistä on
pienellä sivujuonteena mukana.

Yleisiä ratkaisujen **olemassaolo- ja yksikäsitte-**
isyyslauseita kosketellaan lyhyesti kevyellä otteella
vuotavaa ämpäriä mallittavalla esimerkillä valaisten.

Myös pienimuotoista **ohjelmankehitystä** tarjoilen
juonen edetessä aiheesta kiinnostuneille.

Mitä pohjatietoja tarvitaan?

- **Derivaatta** on perusta, jolle differentiaaliyhtälö ra-
kentuu. Sitä ilman ei oikein voida elää. Tavalliset ma-
temaattiset funktiot, kuten sini, kosini, eksponentti-
funktio, logaritmi derivaattoineen on hyvä tuntee.
- **Integraalia ei** tarvitse tuntee, siitä selitetään kaik-
ki, mitä tässä tarvitsee tietää, ja se on yhdellä sanalla
sanottu: *antiderivaatta*.
- **Ohjelmointia ei** myöskään tarvitse osata.

Kirjoituksesta saat enemmän irti ottamalla OC-
TAVE-ohjelmiston käyttöön. Jos haluat rajoittua
minimiin “kieliopinnoissa”, riittää ladata viitteen
<https://matematiikkalehti.solmu.fi/2021/1/skriptit/tiedostot>
ja suorittaa ne neuvottavalla tavalla.

Octaven asennus ja ohjeita

Sivulla www.octave.org annetaan latauslinkki ja perus-
käyttöesimerkkejä.

Tässä pari laajempaa käyttöopasta:
<https://octave.org/doc/v5.1.0/>
[http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/programs/
octave/tutorial/](http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/programs/octave/tutorial/)
Kts. myös suomenkielinen [AL] alla viitteissä.

Lisää Googlella esim. hakusanoilla *octave tutorial*, *mat-
lab tutorial*.

Asennus on helpointa (Ubuntu) Linux:lla. Komentoik-
kunassa kirjoitat:
`sudo apt-get install octave`

Suositus: Octave-online

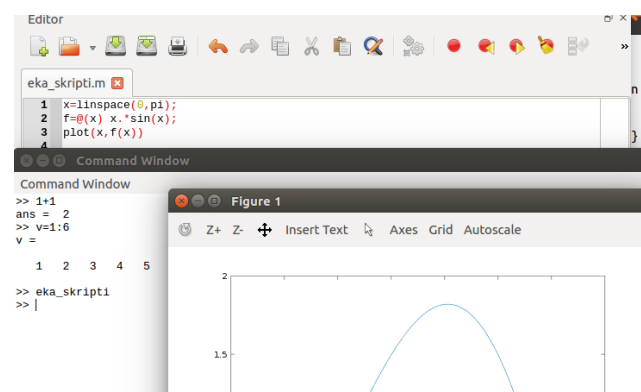
Voit välttyä asennusvaikeilta kirjautumalla Octave on-
line -sivulle, josta pääset käyttämään ohjelmaa suoraan
selaimella “käyttiksestä” riippumatta.

Kun klikkaat linkkiä <https://octave-online.net/>, voit
heti ryhtyä kirjoittamaan komentoja alimmana näkyvälle
komentoriville. Kannattaa ehdottomasti kirjautua,
muussa tapauksessa käyttö on liian rajoitettua.

Ensiaskleet

Jos olet asentanut OCTAVE:n koneellesi, voit nähdä seu-
raavanlaiset ikkunat, joiden oletusasettelu voi näyttä-
tyä hiukan eri muotoisena. *Komentoikkunaan* voit kir-
joittaa suoraan komentoja kuvan mukaisesti. Vähänkin
laajempaa hommaa tehdessäsi käytät editoria, johon
talletetut komennot käynnistyvät kuvakkeesta tai
kirjoittamalla komentoikkunaan `>> omaskripti`, jos
komennot on talletettu tiedostoon `omaskripti.m`.

OCTAVE:n käyttöliittymä: Kaksi pääikkunaa: *komen-
toikkuna* ja *editori*.



Jos käytät *Octave-online* -ohjelmaa, näyttö jakaantuu
kahteen osaan. Komentoikkunana toimii oikean puolen
alin rivi, joka näkyy kuvassa. Aiemmat komennot tu-
loksineen ja mahdollisine kuvineen näkyvät komentori-
vin yläpuolella, ja aiempia komentoja voi selata ja edi-
toida komentorivillä -näppäimellä (vanhaan hyvään
MATLAB-tyyliin).

Näin voit toimia kirjautumatta.

```
octave:1> 1+1
ans = 2
octave:2> v=0:6
v =
    0    1    2    3    4    5    6
```

Kun kirjautut, saat vasempaan ruutuun editorin. Tie-
dostot tallentuvat Octave-palvelimelle, voit myös tal-
lentaa omalta koneeltasi palvelimelle (“upload”). Tässä

vasemman ikkunan yläosa, josta -kuvakkeella voit avata editorin. Oikealla näkyy RUN, jolla skriptin voi ajaa.



Kannattaa huomata, että kaikki kooditiedostot ovat tavallisia tekstitiedostoja, joten niitä voit editoida mieli-editorissasi omalla koneellasi ja ladata (“upload”) palvelimelle.

Täytyy sanoa, että *Octave-online* vaikuttaa vähäisen käyttökokemukseni perusteella varsin käyttökelpoiselta. Sen tapa jakaa ruututila on onnistunut ja istunnon loki kuvineen kehittyä miellyttävästi niin, etteivät ikkunat peitä toisiaan. Ainoa alla olevaan yhteen ohjelmakoodiin, *SuuntakenttajaDYratk.m* vaikuttava puute näyttää olevan grafiikkaikkunaan kohdistuvan hiirisyötön toimimattomuus.

Varoitus: Lyhytkin tuumailu johtaa ilmoitukseen: “Due to inactivity, your session will expire...”. Ei hättää, istuntosi jatkuu *reconnect*-painalluksella.

Octave:n “pieni kielenopas”

1. Voit kirjoittaa suoraan komentoikkunaan tyyliin:
`>> komento` tai voit kirjoittaa editori-ikkunaan ja suorittaa komennot sieltä.
2. OCTAVE:ssa operoidaan *vektoreilla* (kts. kohta 4. alla), esim.
`>> v=[1 3 5 7]`
 Lyhyemmin: `v=1:2:7` tai `v=linspace(1,7,4)`
3. `>> help nimi` avustaa funktion *nimi* käyttöä. Toimii myös itse kirjoitettuihin funktioihin näyttämällä kaikki alkukommenttirivien tekstit.
4. **Matriisi** on suorakulmion muotoinen lukutaulukko, seuraavassa ei suoriteta matriiseilla laskutoimituksia. **Vektori** tarkoittaa lukujonoa, **skalaari** on toinen nimitys luvulle. **Vektorin pituus** on sen alkioden lukumäärä, usein meillä 100 tai enemmänkin. Vektori voi olla myös “pystyasennossa”, jolloin se voidaan mieltää yksisarakeiseksi matriisiksi.
5. **Laskutoimitukset:** Matematiikassa (lineaarialgebrassa) määritellään samanpituisille vektoreille yhteen- ja vähennyslasku **vastinalkioittain** sekä skalaarilla kertominen kertomalla kukin alkio ko. skalaarilla. Vastinalkioittain tapahtuvalle kerto- ja jakolaskulle ei ole lineaarialgebrassa omaa merkin-tää.

Vektoriohjelmointikielissä, kuten APL, MATLAB, OCTAVE, JULIA, SCILAB operoidaan vektorilausekkeilla, joilla laskettaessa tarvitaan kaiken aikaa sekä vastinalkioittain tapahtuvaa aritmetiikkaa että matriisialgebraa. Edellisessä laitetaan operaation merkin eteen piste (.) (“pisteittäin operointi”) näin:
`.* .^ ./`

Pisteettömät operaatiot viittaavat lineaarialgebran ytimeen kuuluvien matriisilaskutoimituksiin, joita ei tässä kirjoituksessa kuitenkaan tarvita. Esim:

```
>> u=[1:4]      % u = [1 2 3 4]
>> v=[4:-1:1]  % v = [4 3 2 1]
>> w=u.*v      % w = [4 6 6 4]
>> u*v %error:operator*:nonconf.args
```

Huomaa, että “pisteoperaatioissa” operandien on oltava samankokoisia vektoreita (yleisemmin matriiseja), tai toisen operandin on oltava skalaari.

6. **Grafiikka:** Esim: Piirrä $\sin(x)$ ja $x\sin(x)$ välillä $[-\pi, \pi]$.

```
>> x=linspace(-pi,pi,100);
>> y=sin(x);plot(x,y)
>> hold on % Seuraava samaan kuvaan.
>> plot(x,x.*sin(x))
```

`plot(x,y)` piirtää murtoviivan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$

Huomaa, että `x.*sin(x)` laskee vastinalkioittaiset tulot: $(x_1 \sin(x_1), x_2 \sin(x_2), \dots, x_{100} \sin(x_{100}))$.

7. **Skriptit:** Tekstitiedostoon *skripti.m* talletetaan OCTAVE-komentoja. Tiedoston komennot suorituvat kirjoittamalla komentoikkunaan `>> skripti`
8. **Funktiot:** Tekstitiedostoon *fun.m* talletetaan komentoja, kuten skriptiin, mutta otsikkorivi on tyyppiä `function [out1,out2] = fun(in1,in2,in3)`. Funktiota kutsutaan komentoriviltä tyyliin:
`>> [out1,out2] = fun(in1,in2,in3)`
 Syöteargumenteilla (tässä *in1, in2, in3*) tulee ennen kutsua olla arvot, joista ainakin osa on yleensä vektoreita. Sekä syöte- että tulosargumentteja voi olla kuinka monta tahansa.
9. **Funktiokahva** (“Function handle”): Kätevä tapa määritellä yhden rivin funktio tyyliin
`f=@(x) x.*sin(x)`
 Ajattele: “at x”, f saa arvon `x.*sin(x)`.
 Matematiikassa: $f : x \mapsto x \sin x$.
10. **“Vektoriäly”:** Jos *x* on vektori, niin $y=f(x)$ on samanpituisen vektorin, jolla $y(k)=f(x(k))$ jokaisella indeksillä *k*. Tämä pätee kaikilla matemaattisilla funktioilla *f*, omat funktiot tulee kirjoittaa niin, että tämä “vektoriäly” toteutuu, mikä hoidetaan juuri pisteittäisillä laskutoimituksilla, kuten edellä.
11. **Lopeta** komento **puolipisteeseen** (;) aina, jos on odotettavissa pitkä tulostus; puolipiste estää sen. Muuttujan arvon saat näkyviin kirjoittamalla sen nimen ilman puolipistettä.

Voit myös kääntyä Googlen tai Wikipedian puoleen kysymällä vaikkapa `help matlab`, `help octave plot`, ... Lisää ohjeita on kirjoituksen lopun viitteissä.

Lähtekäämme ennakkoluulottomasti matkaan näillä eväillä ja esimerkkikoodien kommentteilla varustautumalla.

Esimerkkikoodit

<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/1/skriptit/> Tästä viitteestä pääset lataamaan m-tiedostot, siis tekstissä käytettävät skripti- ja funktiotiedostot. Huomaa, että m-tiedostot ovat tavallisia tekstitiedostoja, joihin voit OCTAVE:n editorin lisäksi kirjoittaa millä tahansa tekstieditorilla.

Mikä on differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, jossa esiintyy tuntematon funktio (merkitään y :llä tai $y(t)$:llä) ja sen derivaattoja sekä tunnettuja funktioita $a(t)$, $b(t)$ jne. Merkitään riippumatonta muuttujaa t :llä, joka usein mielletään ajaksi. Ratkaistavana on *funktio* $y(t)$ eikä pelkkä luku.

Aivan kuten lukujen maailmassa, nytkin voidaan muodostaa yhtälöryhmiä, joissa on useampi ratkaistava funktio. Kirjoituksen (mahdollisessa) jatko-osassa käsittelemme näitä.

Yhtälön *kertaluku* tarkoittaa korkeimman esiintyvän derivaatan kertalukua.

Esimerkkejä:

$$\begin{array}{ll} (1) y' = t & (2) y' = y \\ (3) y' = t + y & (4) y' = y^2 - t \\ (5) ay'' + by' + cy = 0 & (6) y'' - ty = 0 \end{array}$$

Yhtälössä (1) kysytään funktiota, jonka derivaatta on funktio $f(t) = t$, no sellainenhan on $y(t) = \frac{t^2}{2}$. Siis takaperoista derivointia, eli haetaan “antiderivaattaa”. Koska vakion derivaatta = 0, niin kaikki muotoa $\frac{t^2}{2} + c$ olevat kelpaavat, kun c on mielivaltainen vakio. (2):ssa etsitään funktiota, joka yhtyy omaan derivaattaansa. Mikähän sellainen on?

Yhtälöissä (3) ja (4) oikea puoli riippuu sekä t :stä että y :stä. Yhtälön (4) y^2 tekee siitä “epälineaarisen”. Se osoittautuukin vaikeammaksi tapaukseksi kuin yksinkertainen ulkoasu antaisi olettaa.

Yhtälöt (5) ja (6) ovat toisen kertaluvun **lineaarisia** yhtälöitä. Edellinen on vakiokertoiminen, jälkimmäisessä on ei-vakiokerroin t . Kyseessä on ns. *Airy*n differentiaaliyhtälö, jota meillä on myös tilaisuus lyhyesti ihmetellä.

Koko delfinijuoni sisältää pelkkiä ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä, suoritamme vain pari pientä syrjähyppyä toisen kertaluvun maailmaan. Tällä kertaa ei siis käsitellä varsinaisia “peto-saalis”-malleja.

Ensimmäisen kertaluvun yhtälö:

$$y' = f(t, y) \quad (1)$$

Ratkaisu tarkoittaa jatkuvasti derivoituvaa funktiota $y(t)$, joka toteuttaa yhtälön $y'(t) = f(t, y(t))$ jollain reaaliakselin välillä $a < t < b$.

Alkuarvotehtävällä tarkoitetaan sellaisen ratkaisun etsimistä, joka toteuttaa **alkuehdon** $y(t_0) = y_0$.

Kun suureen kasvunopeus on verrannollinen suureen suuruuteen

Lähtökohtana olkoon “kaikkien differentiaaliyhtälöiden äiti”:

$$y' = \alpha y. \quad (2)$$

Ratkaisu tarkoittaa siis funktiota y , joka toteuttaa yhtälön $y'(t) = \alpha y(t)$ jollain muuttujan välillä $a < t < b$.

Yhtälö kuvaa ilmiöitä, joissa funktion kasvunopeus on verrannollinen funktion arvoon kullakin ajanhetkellä t . Tällaisia ilmiöitä ovat esimerkiksi:

- (a) Pankkitilin saldo, kun korko lisätään pääomaan jatkuvasti.
- (b) Rajoituksista vapaa populaation kasvu.
- (c) Radioaktiivisen aineen hajoaminen, kun kerroin $\alpha < 0$ edustaa hajoamisnopeutta massayksikköä kohti.

Tässä tapauksessa yhtälön **ratkaisemiseksi** tarvitsee vain miettiä, mikä onkaan sellainen funktio, jonka derivaatta on se itse (johan sitä mietittiin!). No eksponenttifunktiohan se sellainen on. Derivoimalla näet välittömästi, että kaikki muotoa

$$y(t) = C e^{\alpha t}$$

olevat funktiot, missä C on mielivaltainen vakio, toteuttavat yhtälön. Tämä on yhtälön (2) *yleinen ratkaisuparvi*. Erityisesti arvo $C = 0$ antaa vakiofunktion $y(t) \equiv 0$, joka nähdään ratkaisuksi jo suoraan yhtälöstä (2). Jos vielä vaaditaan, että ratkaisu toteuttaa **alkuehdon** $y(t_0) = y_0$, saadaan ratkaisu

$$y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

joka on **alkuarvotehtävän**

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

ratkaisu.

Esimerkki: Delfinit Aiolian saaristossa

Tyrrhean meressä Sisilian pohjoispuolella sijaitsevan Aiolian saariryhmän vesillä arvioitiin heinäkuussa 2017 delfiinien lukumääräksi 100 yksilöä. Oletetaan, että delfiineillä oli/on rajattomasti ruokaa, ja luonnolliset saalistajat (kuten hait ym.) puuttuvat näiltä vesiltä. Oletetaan, että nettokasvunopeuskerroin (syntymät – kuolemat) on $r = 0.06$ (6 % vuodessa). Arvioi delfiinien lukumäärä tällä alueella heinäkuussa 2025.

Ratkaisu: Näillä yksinkertaisilla oletuksilla populaation kasvua kuvaa alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} y' = r y \\ y(t_0) = 100, \end{cases} \quad (4)$$

missä siis $r = 0.06$, $t_0 = 2017.5$, $y_0 = 100$. Niinpä

$$y(t) = y_0 e^{r(t-t_0)}$$

noilla numeerisilla arvoilla. Sittenpä käynnistetään laskentaympäristömme OCTAVE. Koko skripti `Delfiinit1.m` on jakelupaketissamme <https://matematiikkalehti.fi/2021/1/skriptit/>.

Tässä tiivistettynä tärkeimmät koodirivit:

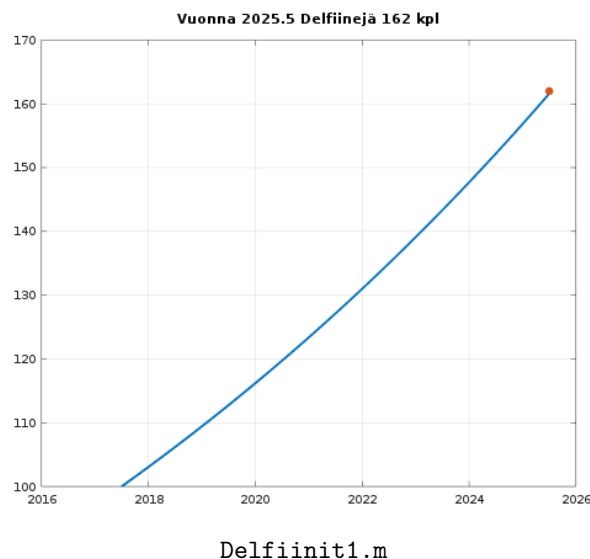
```
r=0.06;t0=2017.5; y0=100;tloppu=2025.5;
y=@(t) y0.*exp(r.*(t-t0)); % Ratkaisufunktio
yloppu=round(y(tloppu)); % Pyöristys
% Piirretään ratkaisufunktio
t=linspace(t0,tloppu,100);
plot(t,y(t),'LineWidth',2)
hold on % Seuraava samaan kuvaan.
% Merkitään loppupiste:
plot(tloppu,yloppu,'.', 'MarkerSize',10)
display('Loppuarvo vuonna 2025.5');
yloppu % Näytetään loppuarvo.
```

(Tästä tekstistä copy/paste johtaa (')-merkistä virheeseen.)

Komentojen selitykset:

- Rivi 1: Sijoitetaan arvot muuttujille `r`, `t0`, `y0`, `tloppu`
- Rivi 2: Funktiomäärittely: (Vektori)argumentin arvolla t funktio y saa arvon $y_0 e^{r(t-t_0)}$. (Muuttujille `y0`, `r`, `t0` on annettu kiinteät arvot ennen määrittelyä, ne eivät ole funktion argumentteja.)
- Rivi 5: Vektorille `t` annetaan arvoksi välin `[t0,tloppu]` jako sataan osaan, mikä on piirtämisen kannalta useimmiten riittävä.
- Rivi 6: `plot`-komennossa säädetään viivan leveyttä, sillä OCTAVE:ssa saattavat oletusleveydellä näkyä hiukan himmeästi.

Saadaan kuva ja komentoikkunaan tulostus:



Loppuarvo vuonna 2025.5
yloppu = 162

Huom: Jos lataisit itsellesi `Delfiinit1.m`-tiedoston, voit suorittaa sen komennot kirjoittamalla komentoikkunaan: `>> Delfiinit1`. Suositeltavaa on ottaa tiedosto editoriin: `>> edit Delfiinit1.m`, jolloin voit myös tehdä haluamiasi muutoksia ja käynnistää komennot myös editorin työkalunauhan oikean reunan ikonista tai **run**-nuolesta. Jos lataat tiedoston OCTAVE-onlineen, se avautuu suoraan editoriin.

Jotain rajaa delfiineillekin!

Kehitellään mallia pikkuhiljaa realistisempaan suuntaan. Oletetaan, että tietty vakiomäärä B delfiinejä joutuu petokalojen, pyydysten, muskeliveneonnettomuuksien ym. uhriksi vuodessa. Tilannetta mallintaa alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} y' = r y - B \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Kyseessä on *lineaarinen differentiaaliyhtälö*. Näitä esitellään yleisesti hiukan tarkemmin *analyttisiä ratkaisuja* koskevassa kohdassa hetken päästä. Lyhyesti: Lineaarisessa yhtälössä y esiintyy ensimmäisessä potenssissa. “Homogeeniosa” on $y' = r y$. Epähomogeeniosassa ei y esiinny, tässä se on pelkkä B . Merkitään homogeeniosan yleistä ratkaisua y_h :lla. Lineaarisuuden takia riittää lisäksi löytää jokin koko yhtälön “erityisratkaisu” y_e . Kaikki koko yhtälön ratkaisut saadaan nyt muodossa $y(t) = C e^{r t} + y_e$.

Tämä on lineaaristen yhtälöiden yleinen ominaisuus, joka johtuu siitä, että y esiintyy ensimmäisessä potenssissa ja summan derivaatta on derivaattojen summa.

Yhtälöstä on helppo nähdä, että erityisratkaisuksi kannattaa kokeilla vakioratkaisua, koska vakion derivaatta

= 0. Näinpä ratkaisu suorastaan hyppää silmille:

$$y_e = \frac{B}{r}.$$

Kaikki koko yhtälön ratkaisut saadaan nyt muodossa

$$y(t) = C e^{rt} + \frac{B}{r}.$$

(Anteeksi, tämä meni hiukan pikaisesti. Jos siltä tuntuu, jätä uskon asiaksi ja jatka eteenpäin.)

Kun sijoitetaan alkuehto, saadaan ratkaistuksi kerroin C , ja ratkaisukaava voidaan kirjoittaa muotoon:

$$y(t) = (y_0 - \frac{B}{r})e^{r(t-t_0)} + \frac{B}{r}.$$

Jos oletetaan (sentään), että $r > 0$, niin tapauksessa $B < r y_0$ ratkaisufunktio kasvaa, kun taas päinvastaisessa tapauksessa tapahtuu päinvastoin, eli pienenee. Jos nyt sattuisi niin eriskummallisesti, että $B = r y_0$, niin ei liikuttaisi mihinkään, eli populaatio jatkaisi ikuisesti elämäänsä $\frac{B}{r} = y_0$ -kokoisena. Tällöin luonnollinen dynamiikka ja uhkatekijät olisivat *tasapainossa*.

Tehtävä 1. Olkoon edellä olevaan tilanteeseen liittyen $r = 0.06$, $t_0 = 2017.5$, $y_0 = 100$, $t_p = 2025.5$ (p: päätepiste).

- Täydennä ja aja skripti `Delfiinit1b.m` siinä olevien ohjeiden mukaisesti. Ainoa "koodi", joka sinun tarvitsee kirjoittaa, on yllä oleva ratkaisufunktion koodi: `y=@(t) ...`
- Piirrä populaatiokäyrät arvoilla $B = 0$, $B = 3$, $B = 6$, $B = 8$ ja laske loppuarvot vuonna 2025.5. Pysykö populaatio vakiona jollain B :n arvolla, ja mitä tapahtuu suuremmilla? Voit tietysti kokeilla muitakin kuin ehdotettuja B :n arvoja.

Salaisuus: `Delfiinit1bratk.m`, mutta yritä ensin!

Seuraava kehitysvaihe on sellainen, jossa B ei ole vakio. Tällöin joudutaan tilanteisiin, joissa ratkaisukaavaa ei ole mahdollista johtaa. Elävässä elämässä kyseessä on pikemminkin sääntö kuin poikkeus. Mikä silloin neuvoksi? Lienee helppo arvata, että numeerinen ratkaisumenetelmä on avainasemassa. Kunhan työvälineitä saadaan kehitellyksi, palataan tarkempaan delfiinimalinnukseen.

Analyttiset ratkaisumenetelmät

Esitellään joidenkin esimerkkien puitteissa tavallisimpia ratkaisumenetelmiä.

Muuttujien erottelu

Tietäntyyppisille yhtälöille voidaan suorittaa ns. *muuttujien erottelu* niin, että yhtälön ratkaiseminen palautuu kummankin muuttujan (t, y) suhteen muodostuvaan integrointitehtävään.

Esimerkki:

$$\frac{dy}{dt} = -t y. \quad (6)$$

Yhtälö on kirjoitettu *Leibnitzin notaatiolla*, jotta voidaan hiukan leikitellä "differentiaaleilla":

$$\frac{dy}{y} = -t dt.$$

Integroidaan puolittain, ts. etsitään kummallekin puolelle "antiderivaattaa". Muistellaan logaritmin derivoimiskaavaa: $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$, josta seuraa:

$$\ln |y| = -\frac{t^2}{2} + C,$$

missä C on mielivaltainen vakio. Itseisarvo siksi, että myös $\frac{d}{dy} \ln(-y) = \frac{1}{y}$. Kun yhtälöön sovelletaan exp-funktiota, saadaan:

$$|y| = e^C e^{-\frac{t^2}{2}},$$

josta saadaan

$$y(t) = C e^{-\frac{t^2}{2}},$$

missä C :llä merkitään nyt mielivaltaista (ei pelkästään positiivisia arvoja saavaa) vakiota. (Yhtälöstä (6) nähdään suoraan, että $C = 0$ käy myös, onhan vakion derivaatta = 0.)

Lukija voi saada jonkinlaisia kylmiä väristyksiä tällaisesta "differentiaaleilla" dt ja dy suoritettavasta algebrasta. Itse asiassa koko homma voidaan kirjoittaa käyttämällä $\ln y(t)$:n derivoimiskaavaa (logaritmi ja yhdistetty funktio), mutta yllä esitetty on tavanomainen formaali laskutyylillä näissä yhteyksissä.

Sama menettely toimii yleisemmin muotoa $y' = \alpha(t)y$ olevaan yhtälöön:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \alpha(t) dt,$$

jolloin tehtävä on yhtä vaikea kuin funktion $\alpha(t)$ integrointi.

Yleisin muoto muuttujien erottelulle, joka myös motivoi tuon nimityksen, on sellainen, jossa oikean puolen funktio $f(t, y)$ on muotoa $g(t)h(y)$, eli

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y),$$

josta saadaan:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt.$$

Jos integrointi onnistuu, tästä saadaan yleensä impliittinen (ratkaisemattomassa muodossa oleva) yhtälö $y:n$ ja $t:n$ välille.

Lineaarinen yhtälö yleisesti

Tällä kohden puhutaan myös lyhyesti korkeamman kertaluvun yhtälöistä.

Yhtälöt, joissa tuntematon funktio y ja sen derivaatat esiintyvät vain ensimmäisessä potenssissa ja tyyppiä $y y'$ olevia tuloja ei esiinny, ovat **lineaarisia**. Yleinen tilanne konkretisoituu kenties parhaiten 2. kertaluvun lineaarisen yhtälön tapauksessa:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = s(t). \quad (7)$$

Jos oikea puoli $s(t) \equiv 0$, puhutaan *homogeenisesta lineaarisesta* yhtälöstä.

Jos erityisesti kerroinfunktiot $a(t), b(t), c(t)$ ovat vakioita, kyseessä on harmonisia värähtelyjä, sähkövirtapiirejä (LRC-piirejä) ja monia muita mallintava yhtälö. Mikä hauskinta, sen ratkaiseminen palautuu toisen asteen yhtälön juurien määrittämiseen, ja ominaisuudet määräytyvät juurien ominaisuuksista.

Toisen asteen yhtälöön johdetaan sijoittamalla differentiaaliyhtälöön ”yrite” $y(t) = e^{rt}$. Näin saadaan parametrin r määrittämiseksi yhtälö

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Taas tarvitaan siis vain eksponenttifunktion derivoimiskaavaa (ja toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa).

Lineaarisille (tässä toisen kertaluvun) yhtälöille pätee yleisesti:

- Homogeeniosan (oikea puoli = 0) yleinen ratkaisu on muotoa $y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$, missä y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, joiden suhde ei ole vakio. (Puhutaan lineaarisesti riippumattomista ratkaisuksista.)
- Koko epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y(t) = y_h(t) + y_k(t)$, missä y_k on jokin koko epähomogeenisen yhtälön ratkaisu, puhutaan ”erityisratkaisusta”.

Nämä seuraavat suoraan lineaarisuudesta, koska myös derivaatat käyttäytyvät lineaarisesti (summan derivaatta on derivaattojen summa).

Näitä periaatteita käytettiin edellä anteeksipyydellen 1. kertaluvun lineaarisen yhtälön tapauksessa.

Kvalitatiiviset menetelmät

Kvalitatiivinen menetelmä tarkoittaa lyhyesti sanottuna pyrkimystä saada tietoa ratkaisujen laadullisesta

käyttäytymisestä suoraan yhtälöstä. Tietokonegrafiikan ja tehokkaan laskennan mahdollisuudet ovat edistäneet näitä pyrkimyksiä ratkaisevasti ja johtaneet aihepiiriin nimeltään ”dynaamiset systeemit”. Tässä tulevat näkyviin ”(epä)stabiilisuus”, ”perhosefekti”, ”kaaos”, pitkän aikavälin ilmiöt. Viite [HW] on erinomainen lähde, mukaansatempaavaan tyyliin kirjoitettu.

Suuntakenttä

Kun lasketaan yhtälön $y' = f(t, y)$ tilanteessa funktion f arvoja (t, y) -tason pisteissä, saadaan kokoelma ratkaisufunktion derivaatan arvoja.

Muodostamalla (t, y) -tasoon pistehila ja piirtämällä kuhunkin hilapisteeseen (t_k, y_k) lyhyt jana arvon $f(t_k, y_k)$ ilmoittamaan ratkaisukäyrän tangentin suuntaan, saadaan viivakuva (vektorikenttä), jota kutsutaan differentiaaliyhtälön **suuntakentäksi**.

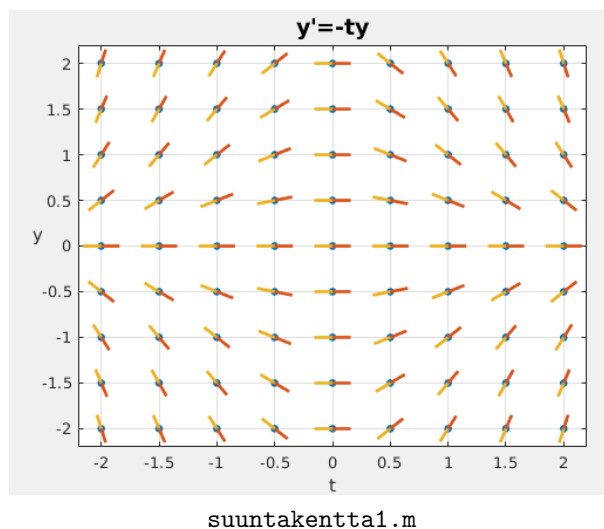
Edellä ratkaistiin muuttujien erottelulla yhtälö $y' = -ty$. Katsotaanpa, miltä suuntakenttä näyttää.

Ratkaisua katsomatta nähdään suoraan yhtälöstä:

- Ratkaisu on vaakasuora t - ja y -akselin pisteissä.
- Kiinteällä $t:n$ arvolla ($t \neq 0$) kulmakerroin jyrkkenee, kun $|y|$ kasvaa. Samoin käy kiinteällä $y:n$ arvolla, kun $|t|$ kasvaa.
- Kenttä on symmetrinen $O:n$ suhteen ja antisymmetrinen akselien suhteen.

Harjoituksen vuoksi voit hahmotella ruutupaperille.

Tässä on OCTAVE:lla (MATLAB:lla) piirretty kuva, jossa selvyuden vuoksi on otettu harva pistehila.



Suuntakentän piirtäminen

OCTAVE-jakelussamme

<https://matematiikkalehti.solmu.fi/2021/1/skriptit/> on suuntakentta1.m-tiedosto, jonka voit ladata työhakemistoosi ja suorittaa komennolla `>> suuntakentta1`. Kannattaa avata editorissa: `>> edit suuntakentta1.m`. (Jos lataat tiedoston “Octave-onlineen”, se avautuu suoraan editoriin.) “Markkerien” koko näkyy erilaisena eri versioissa, kokeile esim. `'MarkerSize', n` välillä $5 \leq n \leq 15$. Muuten voit muokata vaikkapa muuttamalla hilaväliä ja aluetta.

Differentiaaliyhtälöä voit vaihtaa muuttamalla funktion $f(t, y)$ määrittelyä. Funktiomäärittelyn syntaksi on: `f = @(t,y) -t.*y`. Kertaukseksi, ajattele: “at (t, y) , arvo $-ty$ ”, matemaatikassa: $f : (t, y) \mapsto -ty$.

Huom: Funktiota sovelletaan hilapisteistöön, jonka tuottaa alla oleva `meshgrid`-komento, joka muodostaa kaksi samankokoista matriisia `t` ja `y`, edellinen sisältää pisteistön t - ja jälkimmäinen y -koordinaatit.

Pisteittäisten laskutoimitusten käyttö ja notaatio on omaksuttu MATLAB:n perässä OCTAVE:n lisäksi muihin vektori/matriisikieliin, kuten JULIA, SCILAB.

Kaikissa muissakin mainituissa on MATLAB:sta peräisin olevat voimakkaat vektorikenttien piirtotyökalut, jotka tässä yhteydessä ovat näillä riveillä:

```
% Hilapisteistön koordinaattimatriisit(t,y):
[t,y]=meshgrid(tpoints,ypoints);
% Piirretään hilapisteisiin viivakenttä:
quiver(t,y,pt,py,viivaskaala);
quiver(t,y,-pt,-py,viivaskaala); % Viiva ...
% ..taaksepäin. Kommentoi pois, jos et halua.
```

Jos kiinnostaa kokeilla mielihajelmistollasi suuntakenttiä, voit hakea Googlella vaikka hakusanoilla *direction field*, *slope field*. Esim. Geogebra:lle on tehty: <https://www.geogebra.org/m/W7dAdgqc> “Slope field plotter”, varsin siisti.

OCTAVE-ympäristössä on käsissämme työkalut, joita voidaan muunnella halumme mukaan, lisätä eri menetelmin laskemiamme ratkaisukäyriä valituilla alkuarvoilla, laskea ratkaisujen arvoja halutuissa pisteissä, tarkastella virhekäytöstä eri menetelmien välillä jne. Samalla nähdään, miten pienellä määrällä koodirivejä saadaan varsin vaativiaakin tehtäviä suoritetuksi.

Ratkaisukäyriä suuntakenttään

Tarkasteltava yhtälö $y' = -ty$ ratkaistiin yllä, joten voidaan katsoa, miten suuntakenttä ja oikeat ratkaisukäyrät sopeutuvat yhteen. Edellä saatiin muuttujien

erottelulla alkuarvotehtävälle ratkaisu

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

kun $y_0 = y(0)$.

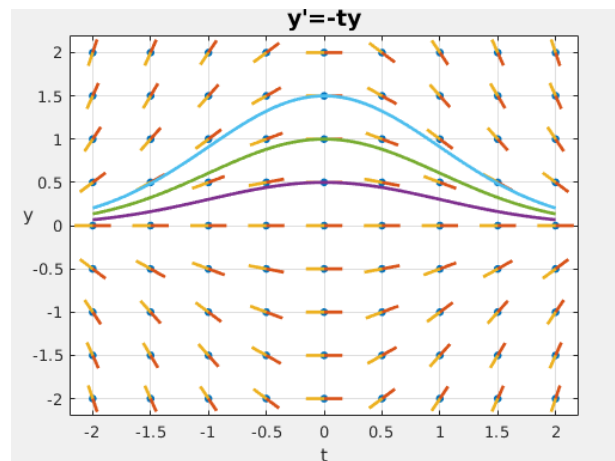
Voidaan piirtää suuntakenttäkuvaan vaikka ratkaisut alkuarvoilla $y(0) = 0.5, y(0) = 1, y(0) = 1.5$ komennolla:

```
yf=@(y0,t)y0.*exp(-0.5.*t.^2) % t.^2, kts. alla.
hold on
t=linspace(-2,2,100);
plot(t,yf(0.5,t),'LineWidth',2)
plot(t,yf(1,t),'LineWidth',2)
plot(t,yf(1.5,t),'LineWidth',2)
```

(“copy/paste” komentoriville toimii, mutta merkkijonojen ‘hipsukat’ koodautuvat väärin.)

Huomaa: $t.^2$, koska funktiomäärittelyssä `t:n` pitää voida olla vektori, kuten käyttöesimerkeissä heti nähdään. Kertolaskuissa riittäisi tässä `*`, koska toinen tekijä on skalaari, mutta johdonmukaisuuden nimissä käytäkäämme pistettä. (Miksi t^2 ei kelpaa, vaikka 2 on skalaari? Koska t^2 tarkoittaa (matriisi)tuloa `t*t`.)

Itse asiassa lisäsin nämä rivit `suuntakentta1.m`-skriptiin, kuten näet kirjoittamalla OCTAVE:n komentoikkunaan: `>> suuntakentta1`. Kokeile ja piirrä lisää, jos huvittaa, tai jos ei huvita, katso vain herkeämättä kuvaa.



SUUNTAKENTTÄ JA RATKAISUJA

Milloin voidaan ratkaista analyttisesti?

Edellä esiteltiin joitakin ratkaisutekniikoita. Kerrataan vielä: Puhumme *symbolisesta*, *analyttisestä* tai *suljetussa muodossa olevasta* ratkaisusta, jos se voidaan esittää tunnettujen alkeisfunktioiden avulla.

Esimerkki:

$$y' = y^2 - t.$$

Yhtälö näyttää varsin vaatimattomalta, toki siinä on y^2 , joten se on *epälineaarinen*, mutta silti siistin näköinen. Vaan eikö mitä, tarvittiin kuuluisa matemaatikko *Henri Poincaré*, joka osoitti n. 100 vuotta sitten, että yhtälöllä ei ole ratkaisukaavaa tavallisten matemaattisten alkeisfunktioiden avulla eikä edes niiden integraalien avulla lausuttuna. Tämän todistaminen vaati syvällistä matemaattista koneistoa, ns. *Galois'n* teoriaa.

Kehittyneimmät tietokonealgebraohjelmistot sisältävät laajan valikoiman tekniikoita alkaen edellä esitetyistä perustekniikoista varsin kehittyneisiin matemaattisiin menetelmiin.

Tällä syntaksilla toimii MATLAB/OCTAVE:n *symbolic toolbox*'n ratkaisija.

```
>> syms t y(t)
>> dsolve(diff(y(t),t)==y(t)^2-t)
```

OCTAVE-online ei selviä tehtävästä, MATLAB palauttaa “tolkuttoman” kaavan, jossa esiintyy murtolukuindekseihin varustettuja kahden lajin “*Besselin funktioita*”.

Symbolilaskentaan erikoistunut MAPLE-ohjelmisto toimii siistimmin:

```
> ratk:=dsolve(diff(y(t),t)=y(t)^2-t);
> latex(ratk);
```

Kun tulos tulkitaan L^AT_EX-ohjelmalla (kuten koko tämä kirjoituskin), saadaan:

$$y(t) = -\frac{C \operatorname{Ai}^{(1)}(t) + \operatorname{Bi}^{(1)}(t)}{C \operatorname{Ai}(t) + \operatorname{Bi}(t)},$$

missä osoittajan yläindeksit tarkoittavat derivaattoja. (Kun funktiot tunnetaan, saadaan derivaatat suoraan diffyhtälöstä.)

Onko tulos ristiriidassa *Poincaré*:n todistuksen kanssa? No ei, vaan “suljettu muoto” voidaan yleistää salimalla erinäisiä ns. “erikoisfunktioita”, joista yllä mainitut Besselit ja Airy ovat esimerkkejä. MAPLE:a voidaan pyytää kertomaan, mitä menetelmiä se yrittää. Saadaan pitkä lista, alkaen lineaarisista ja muuttujien erottelusta, päättyen tällaiseen:

```
trying Riccati Special (erikoisfunktiot)
Riccati Special successful
```

Tässä tapauksessa saatiin siisti kaava, jonka laskeminen on aivan yhtä helppoa kuin jos Airyjen sijalla olisi vaikka sinit ja kosinit. Laskentateho riippuu Airy-funktioiden laskenta-algoritmista.

Kuten sanottu, “suljetun muodon” käsite on erikoisfunktioiden avulla laajennettavissa perinteisestä huomattavassa määrin, ja se laajenee sitä mukaa kuin uusia erikoisfunktioita otetaan käyttöön ja niille kehitetään

luotettavia numeerisia algoritmeja, jotka myös standardisoidaan niin, että eri ohjelmointikielet ja ohjelmistot ja jopa laskimet ne tuntevat yksiselitteisesti. (Toisin ajan mittaan laskimet voivat tällä menolla kasvaa “Stadionin tornin korkuisiksi”.)

Yleistettyjen ratkaisumuotojen määrittäminen ei enää oikein ole ihmisen käsissä, vaan “matemaattista tekoälyä” edustaviin tietokonealgebraohjelmistoihin on hyvä turvautua analyttisten ratkaisujen alueella ainakin silloin, kun perustekniikat eivät pure. Toki tuloksen pätevyyttä kannattaa aina tutkia ja erityisesti, jos ratkaisukaava on toivottoman mutkikas, jolloin sen käyttökelpoisuuskin voi olla kyseenalainen.

Pohdinta: Airyn funktioilla on monta eri luonnehdintaa. Esimerkiksi ne ovat alkuesittelyssä mainitun “Airyn differentiaaliyhtälön” $y'' - ty = 0$ lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja (niiden suhde ei ole vakio). Eräs laskenta-algoritmi olisi tuon differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen. Siis ratkaisemalla Airyn differentiaaliyhtälö numeerisesti saadaan differentiaaliyhtälön $y' = y^2 - t$ (yleistetty) analyttinen ratkaisu. Miksi emme yhtä hyvin ratkaisisi yhtälöämme suoraan numeerisesti? Toki näin siistin kaavan käyttö on helpompaa, kun/jos Airyn yhtälön ratkaisu on saatavilla luotettavasti ohjelmoituna. Mutta monessa tapauksessa suora numeerinen ratkaisu on helpompi, tehokkaampi ja ennen kaikkea **yleispätevämpi** tie.

Entä tämä ajatus: Jos ratkaistavana olisi (lineaarinen) yhtälö $y'' = -y$, niin hetihän näkisimme derivoimalla 2 kertaa, että $\cos t$ ja $\sin t$ toteuttavat yhtälön ja ovat lineaarisesti riippumattomat, onhan $\frac{\sin t}{\cos t} = \tan t \neq$ vakio, joten yleinen ratkaisu on $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Mistä tiedämme, millä algoritmeilla meille kosini- ja sini-näppäimet laskevat? Kukaties ne ratkaisevat numeerisesti yhtälön $y'' = -y$ alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$.

Miten edellä saatua ratkaisukaavaa käytettäisiin?

Jos jatkaisimme MAPLE:lla, ei olisi mitään ongelmaa. Mutta kirjoituksen henki on sellainen, että haluamme pitäytyä vapaasti saatavassa OCTAVE:ssa (tuota annettua MAPLE-kaavanvääntöä lukuunottamatta). Pitää siis selvittää, tuntee OCTAVE nuo ratkaisukaavassa esiintyvät funktiot. Kirjoitin tätä varten skriptin *AnalratkAiry.m*, jossa asia on selvitetty ja jolla pääset piirtämään ja laskemaan ratkaisuja

Tehtävä: Piirrä yhtälömme suuntakenttä ja siihen joitakin ratkaisukäyriä *AnalratkAiry.m*-skriptin avulla samaan tapaan kuin edellä *suuntakentta1.m*-skriptissä.

Käytännön mallinnustehtävissä on joka tapauksessa tässä laajennetussakin merkityksessä suljetun muodon ratkaisun puuttuminen enemmän sääntö kuin poikkeus myös symboliohjelmistoja käytettäessä.

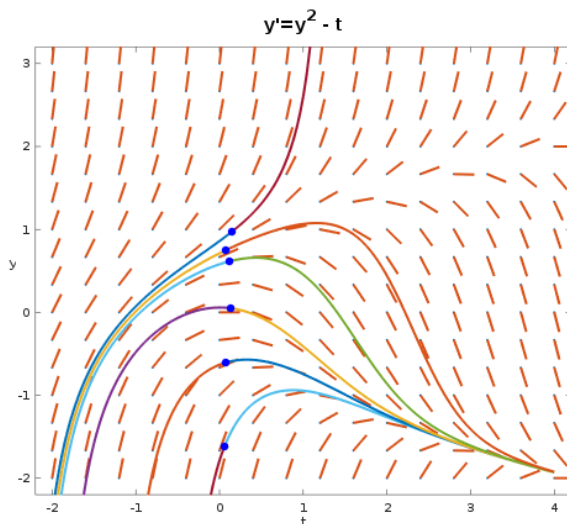
Ratkaisukäyriä vuorovaikutteisesti suuntakenttään

Jatketaan esimerkkinä parissa noudattaen yleistyskelpoista linjaa, eli mennään hiukan asioiden edelle ja käytetään MATLAB/OCTAVE:n **numeerista** ratkaisijaa **ode45** (ode on lyhenne termille “ordinary differential equation”).

Olisipa hauskaa, jos voitaisiin piirtää suuntakenttää hiirellä valituista pisteistä lähteviä ratkaisukäyriä.

Kirjoitin skriptitiedoston **SuuntakenttajaDYratk.m**, jossa käytetään OCTAVE:n **ginput**-funktioita alkupisteen poimimiseen suuntakenttäkuvausta, ja valitusta pisteestä lähtevä ratkaisuapproksimaatio lasketaan tuolla “mustalla laatikolla” **ode45**. (Valitettavasti **ginput** ei näytä toimivan Octave-online:ssa.)

Tässä on tulos, josta näkyy, mitä kohtia kuvassa olen klikkaillut.



SuuntakenttajaDYratk.m

Kahden ylimmän alkupisteen paikkeilla nähdään, että hyvin pieni alkuarvon muutos johtaa täysin eriluonteiseen ratkaisukäyryyn. Neljä alinta sijaitsevat varsin kaukana toisistaan, mutta johtavat samaan “suppiloon” puristumiseen ajan kasvaessa. Edellisessä näkyy **epästabiili käytös**, jossa voi nähdä kuuluisan “perhosefektin” ilmentymän. Jälkimmäinen taas kertoo vahvasta **stabiilisuudesta**.

Mitäs nämä numeerisella algoritmilla lasketut käppyrät ovat? Todistavatko ne ratkaisujen olemassaolon?

Tärkeää ymmärtää:

- Differentiaaliyhtälön ratkaisun olemassaolo ei edellytä *ratkaisukaavan* olemassaoloa.
- Numeerisella algoritmilla lasketaan approksimaatio oletetulle ratkaisulle, mutta se ei todista, että ratkaisu

on olemassa.

- Kvalitatiivisten menetelmien avulla voidaan saada (oletetun) ratkaisun käyttäytymisestä ymmärrys tarkastelualueen eri osissa nojautumatta ratkaisukaavaan, jota ei siis välttämättä ole.

- Ratkaisun olemassaolon selvittämiseen on yleisiä ehtoja, josta seuraavassa.

Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Kyseessä on siis ratkaisu alkuarvotetäville

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (8)$$

Ajatellaan ihan aluksi suuntakenttää. Koska $f(t, y)$:llä on yksikäsitteinen arvo jokaisessa (t, y) -pisteessä, eivät suuntajanat voi leikata toisiaan, ja siis ratkaisukäyrät eivät leikkaa. Eikös tämä jo ole yksikäsitteisyyttä? Mutta voisivathan ne sivuta toisiaan, kuten näyttäisi voivan käydä jossain tulevaisuudessa, kun katsotaan vaikkapa kuvaa $y' = y^2 - t$. Kuitenkin tällainen “suppilomainen” käytös on useimmiten tyyppiä $e^{\alpha t}$, missä $\alpha < 0$, jolloin sivuaminen tapahtuu vasta “äärettömän kaukana”.

Katsotaanpa esimerkkiä, jossa sivuaminen tapahtuukin äärellisessä ajassa.

Esimerkki: Vuotava ämpäri

Ajatellaan, että pihalle on unohdettu vedellä täytetty ämpäri, jonka pohjassa on reikä. Kun myöhemmin havaitaan, että ämpäri on tyhjä, voidaanko (asiaankuuluvat parametrit tuntemalla) laskea, milloin se oli täysi. No eipä tietenkään! (Vrt. radioaktiiviseen hajoamiseen perustuva iänmääritys, jossa päästään käsiksi kaukaiseen menneisyyteen.)

Jos vedenpinnan korkeutta merkitään $y(t)$:llä, voidaan johtaa yhtälö

$$y' = -\alpha \sqrt{y},$$

missä $\alpha = \sqrt{2g} \frac{a}{A}$, a on reiän halkaisija ja A lieriön pohjan halkaisija (kts. [HW] s.160).

Muuttujien erottelulla saadaan:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\alpha \int dt + C.$$

Kun ajatellaan käänteisesti potenssin derivoimiskavaa, saadaan:

$$2\sqrt{y} = -\alpha t + C \implies y(t) = \frac{1}{4}(C - \alpha t)^2.$$

(Korkeus $y(t)$ ei voi saada negatiivisia arvoja, kuten yhtälöstäkin näkyy.) Suoraan yhtälöstä näkyy vakioratkaisu $y(t) \equiv 0$.

Valitaan yksiköt niin, että $\alpha = 1$ ja lieriön tilavuus $= 1$, lieriö olkoon täysi hetkellä t_0 , ts. $y(t_0) = 1$ ja olkoon t_1 seuraava hetki, jolloin se on juuri tyhjentynyt, $y(t_1) = 0$.

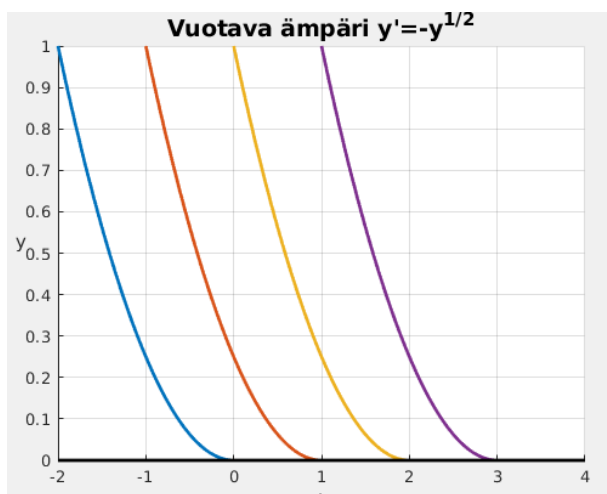
$$1 = y(t_0) = \frac{1}{4}(C - t_0)^2 \implies C = t_0 + 2 = t_1.$$

($t_0 - 2$ ei käy, kun on oltava $t_1 > t_0$.)

Ratkaisuksi saadaan:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - t_1)^2, & \text{kun } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{kun } t > t_1. \end{cases}$$

(Kun ämpäri on tyhjentynyt, se pysyy tyhjänä.)



Skripti ampäri.m

Kyseessä on jatkuvasti derivoituva funktio myös “liitoskohdassa” $t = t_1$, sillä vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat ovat $= 0$, ja differentiaaliyhtälö toteutuu niin vasemmalla kuin oikealla. Nähdään, että jos alkuarvoksi otetaan $y(t_0) = 0$, niin tämän aluehdon toteuttavia ratkaisuja ovat myös kaikki ehdon $y(t_a) = 0$ toteuttavat, joilla $t_a < t_0$. Kuvasta konkreettisesti: Oikeanpuoleinen ratkaisukäyrä toteuttaa aluehdon $y(3) = 0$, mutta niin toteuttavat myös kaikki sen vasemmalla puolella olevat.

Jos sen sijaan alkuehdoksi otetaan $y(t_0) = y_0$, missä $y_0 > 0$, ei mikään muu ratkaisukäyrä kulje tuon pisteen kautta.

Toisin sanoen: **Jos ämpäriässä on vähänkin vettä jäljellä, voidaan laskemalla selvittää hetki, jolloin se oli täysi.**

Ratkaisujen olemassaololle ja yksikäsitteisyydelle on yleisiä, funktion $f(t, y)$ ominaisuuksiin liittyviä ehtoja.

Tarvitaan *osittaisderivaatan* käsitettä. Se tarkoittaa yksinkertaisesti kahden muuttujan funktion tapauksessa sitä, että derivoidaan vain toisen muuttujan suhteen

pitäen toista vakiona (eikä anneta juhlallisen näköisen merkinnän hämätä.)

Esim:

$$\frac{\partial}{\partial t}(t + y^2) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}(t + y^2) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(ty^2) = 2ty.$$

Lause 1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää (8). Oletetaan, että f ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ovat jatkuvia alkuarvopisteen (t_0, y_0) sisältävässä suorakulmiossa $R: |t - t_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta$. Alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu alkuarvopisteen (t_0, y_0) ympäristössä $|t - t_0| \leq \min(\alpha, \beta/M)$, missä $M = \max_R |f(t, y)|$.

Lauseesta on erilaisia variantteja. Osittaisderivaattaeta voidaan lieventää, puhutaan *Lipschitz*-ehdosta ([HW] s. 165, [CF] s. 669). Lineaarille yhtälöille on tietyn edellytyksin laajemmalla alueella voimassa oleva versio jne.

Alkuperäisen todistuksen esitti ranskalainen *Emile Picard* vuonna 1893 ja tulosta tarkensi suomalainen matematiikan vaikuttajahenkilö ja “isähahmo” *Ernst Lindelöf* hiukan myöhemmin. Kts. [CF] s. 649 ja [OLEhto]. Todistuksen idea on hyvin esitetty viitteessä [CF]. Kyseessä on iteratiivinen menetelmä, “Picardin iteraatio”, ja se on abstrakti olemassaolotodistus. Vaihtoehtoinen konstruktiiivinen todistus on esitetty viitteessä [HW], jossa yhtenä osana on numeeristen menetelmien perustana oleva *Eulerin menetelmä*, seuraava aiheemme.

Mitä lause sanoo esimerkkiyhtälöstämme $y' = -\sqrt{y}$? Siis $f(t, y) = -\sqrt{y}$, f ei riipu t :stä, jolloin osittaisderivaatta on ihan tavallinen derivaatta. Siis:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Derivaattaa $-\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole, kun $y = 0$, joten lauseen oletukset alkuarvolle $y_0 = 0$ eivät ole voimassa, mutta ovat, kun $y_0 > 0$. Niinpä esimerkkinä on sopusoinnussa lauseen kanssa.

Numeeriset ratkaisumenetelmät

Eulerin menetelmä

Jos $y' = \alpha y$ on kaikkien differentiaaliyhtälöiden äiti, niin *Eulerin menetelmä* on sitä kaikkien numeeristen ratkaisijoiden suhteen.

Ratkaistavana olkoon alkuarvotehtävä:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Ajatellaan suuntakenttää. Piirretään alkuarvopisteeseen (t_0, y_0) lyhyt suuntakenttäjana, jonka suunta on ratkaisukäyrän tangentin suunta: $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

Suuntanuolen loppupäässä tehdään sama uudestaan aikapisteessä $t_1 = t_0 + h$, missä h on lyhyt aika-askel. Olkoon suuntajan loppupiste (t_1, y_1) , eli

$$y_1 = y_0 + hy'(t_0) = y_0 + hf(t_0, y_0).$$

Tässä meillä on *Eulerin menetelmän* askel, jota toistamalla saadaan pisteet $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$, joita yhdistävä murtoviiva approksimoi ratkaisua sitä tarkemmin, mitä pienemmin askelin h kuljetaan.

Jotta saataisiin myös arvio virheelle, joka tehdään yhdellä askeleella, kun ratkaisukäyrä korvataan tangentillaan, muodostetaan *Taylorin*¹ kehitelmä pisteessä t . Jos $y(t)$ on ratkaisufunktio,

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + R(h) = y(t) + hf(t, y(t)) + R(h).$$

Tässä jäännöstermi $R(h)$ toteuttaa ehdon $|R(h)| \leq Mh^2$, kun h on riittävän pieni, missä $M = \max_{|t| \leq |h|} |y''(t)|$.

Vakiota M ei etukäteen tunneta, koska y'' on tuntematon. Tärkeää on, että yhdellä askeleella syntyvä menetelmävirhe (lokaali virhe) on verrannollinen neliöön h^2 . Jos askelia otetaan n kappaletta, niin $h \sim \frac{1}{n}$, joten n :n askeleen synnyttämä kokonaisvirhe on verrannollinen askeleeseen h . (Tämä on hiukan ylimalkainen päätelmä, mutta uskottava ja vastaa todellisuutta varsin hyvin.) Liki pitäen pätee:

Eulerin menetelmän kokonaisvirhe puolittuu, kun askelpituus puolittuu.

Menetelmä on siten varsin tehoton ja siksi onkin kehitetty koko joukko huomattavasti tehokkaampia menetelmiä. Näissä muunnetaan Eulerin menetelmää niin, että otetaan koeaskelia sopivasti esim. puolikkaalla askelpituudella ja sitten tietyn kriteerin mukaan edetään optimaalisesti painotetun keskiarvon suuntaan. Tällainen on mm. edellä mainittu *ode45*, joka on varsin laadukas yleisratkaisija. Siinä kokonaisvirheen kertaluku on 4 verrattuna Eulerin kertalukuun 1. Menetelmän ovat kehittäneet matemaatikot: *Runge, Kutta, Fehlberg*.

Eulerin menetelmän ohjelmointi

Iterointiaskeleen muuttaminen ohjelmakoodiksi on mitä luontevinta. Katsotaan esimerkiksi yhtälöä

$$y' = t + y, \quad y(0) = 0.$$

Analyyttinen ratkaisu on helppo muodostaa. Lineaarisesta yhtälön homogeeniosasta antaa Ce^t :n, ja epähomogeenisen erityisratkaisua keksitään muodossa $a - t$. Vakiolle a saadaan arvo -1 . Myös OCTAVE osaa:

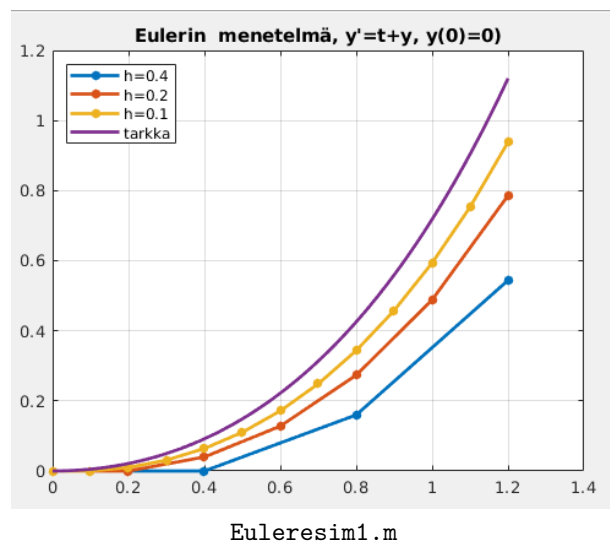
```
>> syms t y(t); dsolve(diff(y(t))==t + y)
ans = C1*exp(t) - t - 1
```

Alkuehdolla $y(0) = 0$ saadaan $C1 = 1$.

Eulerin menetelmä juoksee alla olevalla silmukalla, jolla syntyy kuvan alin murtoviiva.

```
f=@(t,y) t+y;
h=0.4; n=3; % väli: [0,1.2]
t=0:h:n*h % t=[0,h,2*h,3*h]
y(1)=0 % Vektorin indeksointi alkaa 1:stä
for k=1:n
    y(k+1)=y(k)+h*f(t(k),y(k));
end;
```

Skriptissä *Euleresim1.m* on tämä toteutettu a), b) ja c)-kohdissa askelpituuksilla 0.4, 0.2, 0.1. Sopivin alustuksin ja plot-komennoin syntyy kuva:



Nyt voidaan kirjoittaa oma funktio, jota kutsutaan, kun halutaan menetelmää soveltaa. (Tiedosto *eulerS.m*)

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Euler Skalaari, HA
% in: f - funktiokahva("function handle")
% Tspan - Tarkasteluväli
% ya - alkuarvo pisteessä Tspan(1)
% n - Jakovälien lkm.
% out: T - Aikapisteet
% Y - Lasketut y-arvot T-pisteissä
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
% f=@(t,y)t+y; close all
% [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6);
% LW='LineWidth';MS='MarkerSize';
% plot(T,Y,'.-',LW,2,MS,10)
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
```

¹Taylorin kehitelmää ei tarvitse tuntea, usko vain tuo arvio!

```
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; % Sarakevektorit,
Y(1)=ya; % kuten ode45:ssä
for j=1:n
    Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

Huomataan, että suurin osa riveistä on kommentteja, jotka tulevat näkyviin komennolla: `>> help eulerS`. Funktion kutsu on identtinen “tehoratkaisijan” `ode45` kanssa, paitsi tässä on viimeinen parametri `n`, jonka `ode45` säätää vaadittujen virhetoleranssien perusteella.

Jos halutaan käyttää *Eulerin menetelmää* tehtävään, jonka ratkaisua ei tunneta, kuten käytännössä useimmiten on tilanne, voidaan arvioida alkuaskelpituus h ja verrata tulosta muutamaan askeleen puolittamalla saatua. Jos tulosvektori ei vaadittavan laskentatarkkuuden puitteissa muutu, voidaan tulos hyväksyä. (Tarkempia askeleen säätämisen ja virheen arvioimismenetelmiä on luotettavimmissa ohjelmistoissa olevissa koo-deissa kuten `ode45`.)

Kiintoisana lähihistorian esimerkkinä kannattaa mainita elokuvan “Hidden Figures” päähenkilön oivalus käyttää *Eulerin menetelmää* laskettaessa *John Glenn*’n avaruuslennon rataa. Pääosan esittäjä eläytyy *Katherine Johnsonin*, arvostetun mustaihoisen matemaatikon osaan. Mainittakoon, että *Katherine Johnson* kuoli vuonna 2018, 101:n vuoden iässä. Aiheesta on *Anne-Maria Ernvall-Hytösen* kirjoitus ja suositus: https://matematiikkalehti.fi/2017/hidden_figures.pdf

Esihistoriallinen näkökulma

Babylonialaisissa nuolenpääkirjoituksella (n. 3000 v. eaa.) esitetyissä tauluissa annetaan menetelmä lainanlyhennyksen korkoa korolle laskennassa, kun lyhennys tapahtuu tasaisin aikavälein, siis aivan kuten meillä nykyisinkin. Tämä on täsmälleen sama menetelmä kuin yhtälön $y' = \alpha y$ alkuarvotehtävän numeerinen ratkaiseminen *Eulerin menetelmällä*.

Paluu delfinien pariin

Otsikon *Jotain rajaa delfineillekin!* alla mallissa (5) oli vakio B edustamassa kasvua rajoittavia tekijöitä, kuten kalaverkkoja, moottoriveneonnettomuuksia jne. Realistisempi malli saadaan olettamalla tämän termin olevan ajasta riippuva. Kesäkaudella on otaksuttavasti suuremmat vaarat.

Olkoon kasvua rajoittava kerroinfunktio

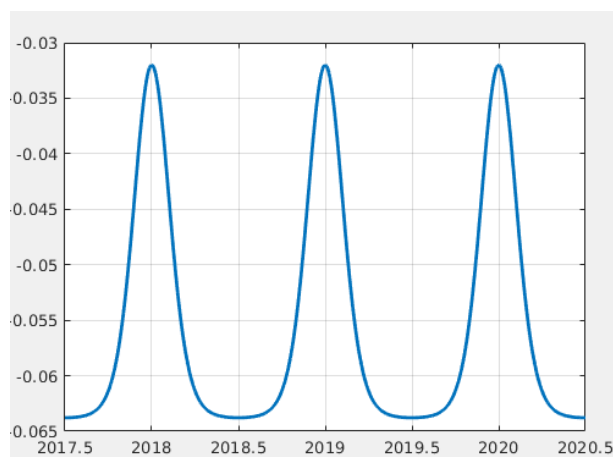
$$b(t) = -0.032(2 - \exp(-5(\sin \pi t)^2)),$$

missä aikaa mitataan vuosissa. Voidaan ajatella, että kokonaiskasvukerroin on ajasta riippuva: $r + b(t)$, joten differentiaaliyhtälö on

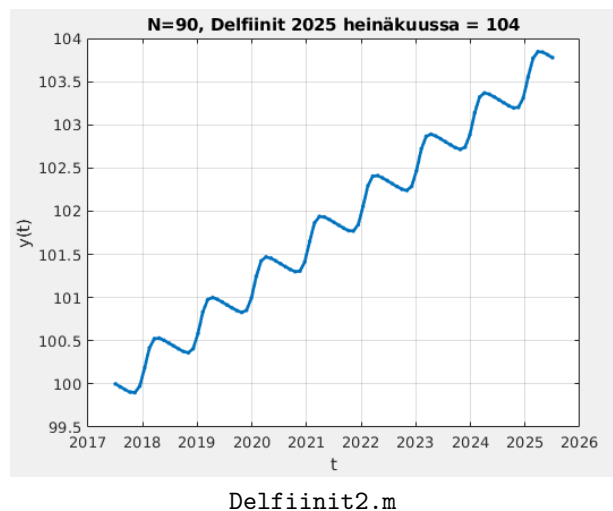
$$y' = (r + b(t))y.$$

Kasvukerroin on selvästi jaksollinen, jaksona 1 (vuosi).

```
b=@(t) -0.032*(2 - exp(-5*(sin(pi*t)).^2))
t=linspace(2017.5,2020.5,500);
plot(t,b(t),'LineWidth',2);grid on
```



Ratkaisemista ajatellen kyseessä on yhtälö $y' = \alpha(t)y$, joka voidaan ratkaista muuttujien erottelulla, kuten edellä esitettiin. Tällä kertaa $\alpha(t)$ -funktion antiderivaatan määrittämiseen ei ole mitään toiveita. Niinpä turvaudutaan *Eulerin* menetelmään. Skriptissä `Delfiinit2.m` suoritetaan ratkaisu askelmäärillä $N = 90$ ja $N = 180$, piirretään vain edellisellä ja lasketaan loppuarvot, jotka eivät eroa toisistaan. Aja taas ja kokeile huviksesi vaikkapa pienentämällä N :n arvoa.



Parannettu delfinimalli, vai huononnettu

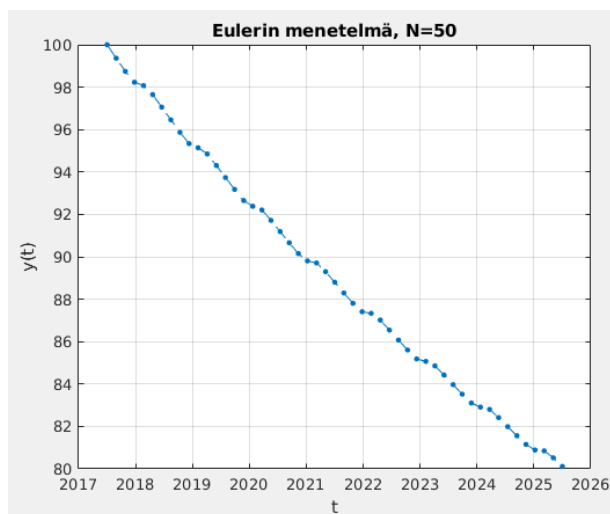
Mallinnuksessa voitaisiin vielä ottaa huomioon delfinien keskinäinen kilpailu ravinnosta ja tilasta. Merkitään K :lla maksimaalista määrää delfinejä, jonka ympäristö voi sisältää, kutsuttakoon sitä ympäristön *kantokertoimeksi*. Kasvukerroin r korvataan ajasta ja populaation koosta riippuvalla kertoimella

$$\alpha(t) = r\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right),$$

jolloin yhtälö saa muodon: $y' = \alpha(t)y + b(t)y$, missä $b(t)$ on edellisessä tehtävässä annettu, siis:

$$y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y + b(t)y. \quad (9)$$

Nytpä yhtälö on epälineaarinen, joten analyttinen ratkaisumahdollisuus karkaa yhä kauemmas. Funktiotiedosto `Delfiinitfinaali.m` laskee ja piirtää sekä Eulerin menetelmällä että OCTAVE:n ennen mainitulla `ode45`-ratkaisijalla. Näytetään edellinen, jossa on piirretty näkyviin myös laskentapistet.



Funktio: `Delfiinitfinaali.m`

Tällä kertaa kyseessä **ei ole skripti**, vaan **funktio**, joten kutsu tapahtuu komentoriviltä.

Molemmat, Eulerilla ja `ode45`:llä lasketut saat komennolla:

```
>> [ye,yo]=Delfiinitfinaali(50)
ye =
    80.1161 % ye laskettiin Eulerilla
yo =
    80.1395 % yo ode45:llä
```

Huomionarvoista on, että tulokset poikkeavat vasta neljännessä numerossa, vaikka Eulerin menetelmällä otetaan vain 50 askelta.

Tässä tapauksessa ratkaisukäyrä on hiukan aaltoileva suora, jolloin on helppo uskoa, että Eulerin menetelmäkin pääsee hyvään tarkkuuteen pienellä askelmäärällä.

Delfinien kannalta ei kylläkään hyvältä näytä, ainoa toivo on, että valitut parametrit eivät vastaisi todellisuutta ainakaan koko aikavälillä, ja/tai muutos parempaan tapahtuisi viimeistään elokuussa 2025.

Viitteet

[QG] Alfio Quarteroni – Paola Gervasio: A Primer on Mathematical Modelling, Springer 2020.

<https://www.springer.com/gp/book/9783030445409>

[HW] J.H. Hubbard – B.H. West: Differential Equations, A Dynamical Systems Approach, Part 1, Springer 1991.

[OctOL] <https://octave-online.net/>

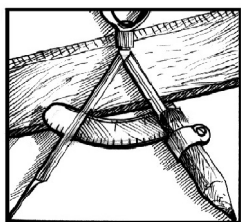
[OctOh] Eaton, Bateman, Hauberg, Wehbring 2019 GNU Octave manual: a high-level interactive language for numerical computations. <https://octave.org/doc/v5.1.0/>

[AL] <https://math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/>

[CF] Juhani Pitkäranta: Calculus Fennicus, kirjana loppuunmyyty, e-kirja ladattavissa: <https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/calculus-fennicus/releases>

[OLEhto] Olli Lehto: Tieteen aatelia : Lorenz Lindelöf ja Ernst Lindelöf, Otava 2008

[Skr] Kirjoitukseen liittyvät skriptit ja funktiotiedostot: <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2021/1/skriptit/>



Matematiikkadiplomit vuonna 2020

Marjatta Näätänen

Peruskoulun matematiikkadiplomit valmistuivat vuonna 2013. Tieto onkin levinnyt hyvin, vuonna 2020 matematiikkadiplomien uusia vastauspyyntöjä tuli ennätysmäärä, 126 paikkakunnalta:

Akaa, Alavus, Asikkala, Askola, Aura, Espoo, Eura, Forssa, Haapajärvi, Hamina, Helsinki, Hirvensalmi, Hollola, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Ii, Iisalmi, Ikaalinen, Janakkala, Joensuu, Joroinen, Joutsa, Jyväskylä, Järvenpää, Kaarina, Kajaani, Kangasala, Kangasniemi, Kankaanpää, Karkkila, Kauhava, Kauriainen, Kemi, Kemijärvi, Kemiö, Kempele, Kerava, Keuruu, Kirkkonummi, Kokkola, Kontiolahti, Kotka, Kouvolaa, Kuopio, Kurikka, Kuusamo, Kärkölä, Kärämäki, Lahti, Laihia, Laitila, Lapinlahti, Lappee, Lappeenranta, Lapua, Laukaa, Lempäälä, Lestijärvi, Lieksa, Lieto, Liminka, Lohja, Loimaa, Loppi, Loviisa, Mikkelin, Muhos, Mustasaari, Muurame, Mynämäki, Mäntsälä, Mäntyharju, Naantali, Nivala, Nokia, Nousiainen, Nurmijärvi, Orimattila, Orivesi, Oulu, Outokumpu, Paimio, Parainen, Parikkala, Parkano, Pieksämäki, Pietarsaari, Pirkkala, Pori, Porvoo, Pudasjärvi, Pyhtää, Pyhäjoki, Pöytyä, Raahen, Ranua, Rauma, Rovaniemi, Ruokolahti, Sastamala, Savitaipale, Savonlinna, Siikajoki, Sipoo, Siuntio, Sodankylä, Taivassalo, Tamela, Tampere, Tornio, Tukholma, Turku, Tuusniemi, Tuusula, Ulvila, Upplands Väsby (Ruotsi), Uusikaupunki, Vaasa, Vantaa, Varkaus, Vihti, Ylitornio, Ylivieska, Ylöjärvi, Äänekoski.

Diplomityön vetäjänä olen hyvin iloinen siitä, että

käyttäjäkunta on ottanut diplomit omakseen. Tässä yksi tyypillinen palaute:

”Täytyy kiittää mukavan erilaisista tehtävistä, jotka haastavat oppilaita eri tavalla kuin monet muut kirjasarjojen pulmatehtäväkirjat. Yksi oppilas teki koko matematiikkadiplomin 1 etäopetuksen aikana. Selvästi siis oppilaita motivoivia tehtäviä ja pulmia, kiitos näistä!”

Suomessa opettajat voivat valita oppimateriaalejaan, niinpä diplomien käyttökin perustuu opettajien vapaaehtoiseen työhön. Opettajat ovat myös itse levittäneet keskuudessaan tietoa diplomeista. Joillekin vanhemmille on ollut yllätys, että diplomitoiminta ei ole esim. opetushallinnon organisoimaa, vaan rahoitusta IT-työstä ja grafiikasta on haettu pääosin Wihurin säätiöltä ja tehtävät tehty talkootyönä, osin myös kansainvälisenä yhteistyönä. Into tehtävien ratkomiseen on jatkunut vaikka diplomien ja tehtävien sanoitusta tai ulkoasua ei ole vuosien kuluessa modernisoitu. Tehtävien ulkoasun muokkaamiselle viihteellisemmäksi käyttäen uusimpia IT-keinoja ei mielestäni ole tarvetta, eikä tällaiseen olisi mitään resurssijakaann. Matematiikan perustiedot ja rakenne eivät vanhene, tehtävien sisältö ja käsitteiden pohjustus toimivat edelleen yhtä hyvin kuin aikaisemmin. Nykyisenä viihteellisenä aikana voisi olla ajatuksia avartavaa katsella Kalle Väisälän erinomaista, vaativaa, täsmällistä ja hyvin tiivistä algebran oppikirjaa¹. Sen avulla sodan jälkeisinä vuosikymmeninä kehitettiin koululaisille sinnikkyyttä, keskittymiskykyä ja

¹<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/vaisala/>

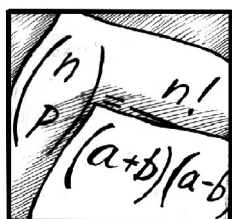
pitkäjänteisyyttä, harjoitettiin heidän aivojaan ja näin maa siirtyi maatalousyhteiskunnasta teollisuusyhteiskunnaksi, Nokia-Suomeksi, muutamassa vuosikymmenessä.

Vaarana on, että matematiikan perusosaaminen heikenee. Tähän ovat puuttuneet monet, mm. eräs 25 vuotta ammatillisissa oppilaitoksissa matematiikkaa opettanut jo vuonna 2007, mutta se on totta edelleen:

”Ongelma on kärjistynyt viime vuosina, laskusuunta alkoi jo 80-luvulta. Suomessa mennään mielestäni koneelliseen laskentaan liian aikaisin. Nyt jopa yksinkertainen jako- ja kertolaskutaito alkaa olla hukassa, suuruusluokista puhumattakaan.”

Opettajille lähetetyt vastaukset on tehty hyvin yksityiskohtaisiksi jotta tuetaan mahdollisimman paljon heidän työtään: opettajat käyttävät diplomitehtäviä vapaaehtoisesti tarkastaen niitä talkoohengessä. Tehävien kieli on pyritty tekemään mahdollisimman täsmälliseksi. Tämä on mielestäni tärkeää yksistään jatkon kannalta. Sain Oulusta viestin, että jopa yliopistotasolla on käytetty nimityksiä ”yläkerta” ja ”alakerta” jakolaskussa.

Vastauspyynnöt lähetetään edelleen osoitteeseen juha.ruokolainen at yahoo.com, oma Helsingin yliopiston osoitteeni lakkaa toimimasta, joten tarvittaessa yhteyden minuun saa Juhan välityksellä.



Solmun tehtävien ratkaisut

Solmun numerossa 3/2020 julkaistiin kaksi tehtäväsarjaa, tehtävät I lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille ja tehtävät II lukion pitkän matematiikan oppilaille. Julkaisemme nyt tehtävien ratkaisut.

Tehtävät I

I.1. Kumpulan Pallo teki jalkapalloturnauksen neljässä ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajina olleet joukkueet tekivät Kumpulan Palloa vastaan pelatessaan yhteensä kaksi maalia. Voitosta saa kolme pistettä, tasapelistä saa yhden pisteen ja tappiosta ei saa yhtään pistettä. Kuinka monta pistettä Kumpulan Pallolla on mahdollista olla pelattujen neljän pelin jälkeen?

Ratkaisu. Kumpulan Pallon kolme maalia on ollut mahdollista tehdä yhdessä, kahdessa tai kolmessa ottelussa. Vastustajien kaksi maalia on voitu tehdä yhdessä tai kahdessa ottelussa. Näin ollen neljän ottelun tulokset voivat olla mitkä tahansa seuraavista 15 mahdollisuudesta (ei välttämättä esitetyssä järjestyksessä):

3–2, 0–0, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3 + 1 + 1 + 1 = 6$.

3–0, 0–2, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3 + 0 + 1 + 1 = 5$.

3–0, 0–1, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3 + 0 + 0 + 1 = 4$.

3–1, 0–1, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3 + 0 + 1 + 1 = 5$.

2–2, 1–0, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $1 + 3 + 1 + 1 = 6$.

2–0, 1–2, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3 + 0 + 1 + 1 = 5$.

2–0, 1–0, 0–2, 0–0. Pisteet ovat $3 + 3 + 0 + 1 = 7$.

2–1, 1–1, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3 + 1 + 1 + 1 = 6$.

2–1, 1–0, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3 + 3 + 0 + 1 = 7$.

2–0, 1–1, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3 + 1 + 0 + 1 = 5$.

2–0, 1–0, 0–1, 0–1. Pisteet ovat $3 + 3 + 0 + 0 = 6$.

1–2, 1–0, 1–0, 0–0. Pisteet ovat $0 + 3 + 3 + 1 = 7$.

1–0, 1–0, 1–0, 0–2. Pisteet ovat $3 + 3 + 3 + 0 = 9$.

1–1, 1–1, 1–0, 0–0. Pisteet ovat $1 + 1 + 3 + 0 = 5$.

1–1, 1–0, 1–0, 0–1. Pisteet ovat $1 + 3 + 3 + 0 = 7$.

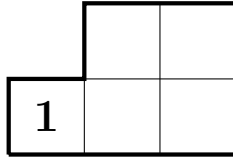
Kumpulan Pallolla voi siis olla 4, 5, 6, 7 tai 9 pistettä.

I.2. Roope-robotti on suljettu huoneeseen, joka on ruudutettu tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi. Roope kulkee suoraan yhteen suuntaan, kunnes törmää seinään. Silloin hän kääntyy oikealle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos oikealla on seinä ja hän ei voi kääntyä oikealle, niin hän kääntyy vasemmalle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos hän ei voi kääntyä oikealle eikä vasemmalle, hän pysähtyy ja jää kyseiseen ruutuun.

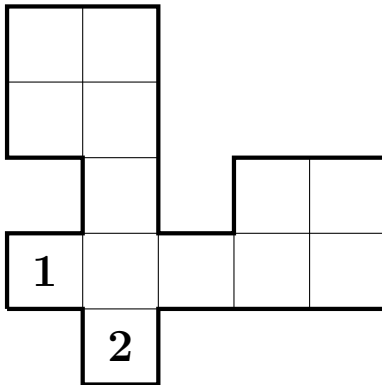
Kuvassa 1 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 hän kiertää koko huoneen ja päätyy takaisin ruutuun 1, johon pysähtyy. Kuvassa 2 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 tai ruudusta 2 hän päätyy takaisin lähtöruutuun ja pysähtyy siihen. Kuvassa 3 on huone, jossa Roopen lähtiessä ruudusta 1 hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen, ja lähtiessään ruudusta 2 hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen.

Piirrä huone, jossa on neljä aloitusruutua: Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 1, hän päätyy ruutuun 2 ja

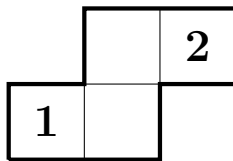
pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 2, hän päätyy ruutuun 3 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 3, hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 4, hän päätyy takaisin ruutuun 4 ja pysähtyy siihen.



Kuva 1.

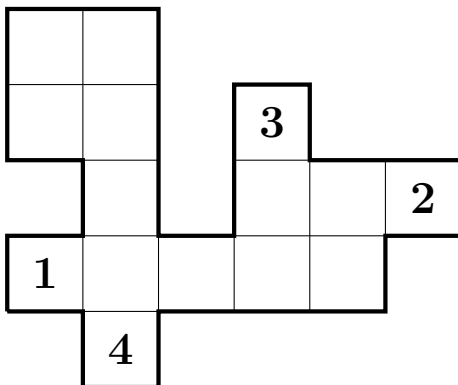


Kuva 2.



Kuva 3.

Ratkaisu. Huone ja aloitusruudut voivat olla esimerkiksi seuraavat:

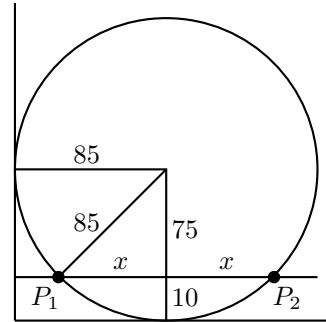


I.3. Pyöreä pöytä on huoneen kulmassa, katso kuva. Pöydän halkaisija on 170 cm. Pöydän reunassa oleva kohta on 10 cm etäisyydellä kuvassa vaakasuorassa olevasta seinästä. Laske kohdan etäisyys kuvassa pystysuorassa olevasta seinästä.

Ratkaisu. Seinästä 10 cm etäisyydellä oleva kohta voi olla kahdessa pisteessä pöydän reunassa. Merkitään näitä pisteitä P_1 ja P_2 , katso kuva. Kuvan merkinnöin Pythagoraan lauseen perusteella

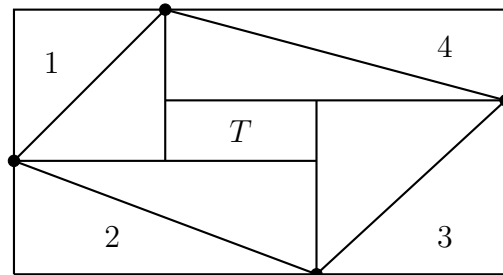
$$x^2 = 85^2 - 75^2 = 1600,$$

joten $x = 40$ cm. Näin ollen pisteen P_1 etäisyys pystysuorasta seinästä on $85 - 40 = 45$ cm ja pisteen P_2 etäisyys pystysuorasta seinästä on $85 + 40 = 125$ cm.

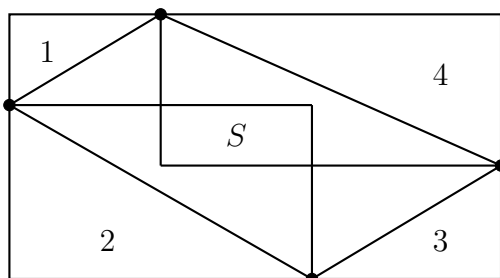


I.4. Suorakulmion jokaiselta sivulta valitaan yksi piste ja vierekkäisten sivujen pisteet yhdistetään toisiinsa janalla. Millä ehdolla muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta?

Ratkaisu.

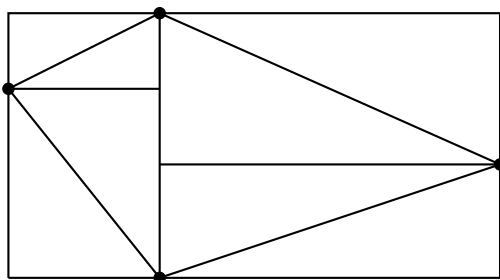


Tarkastellaan yllä olevan kuvan numeroituja kolmioita 1–4 ja niiden kolmiopareja, joilla on sama hypotenuusa. Pareina olevien kolmioiden pinta-alat ovat samat. Suorakulmiossa sisempänä olevat kolmiot eivät ole päällekkäin ja ison suorakulmion sisälle jää pieni suorakulmio T . Tällöin numeroitujen kolmioiden yhteispinta-ala on pienempi kuin puolet ison suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet ison suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun pieni suorakulmio T häviää. Näin tapahtuu silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasuorilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysuorilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla.



Pisteiden valinnat ison suorakulmion sivuilta voivat johtaa myös yllä olevassa toisessa kuvassa esitettyyn tilanteeseen, jossa suorakulmiossa sisempänä olevat kolmiot ovat päällekkäin pienen suorakulmion S verran. Tällöin numeroitujen kolmioiden yhteispinta-ala on suurempi kuin puolet ison suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on jälleen puolet ison suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun pieni suorakulmio S häviää. Näin tapahtuu myös nyt silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla.

Ison suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on siis puolet suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla, esimerkkikuva alla.



I.5. Korvaa lausekkeessa

$$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ 6 \circ 7 \circ 8 \circ 9 = 100$$

jokainen ympyrä $\circ$ jonkin peruslaskutoimituksen symbolilla niin, että yhtälö pätee. Sulkeita ei saa käyttää.

Ratkaisu.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$$

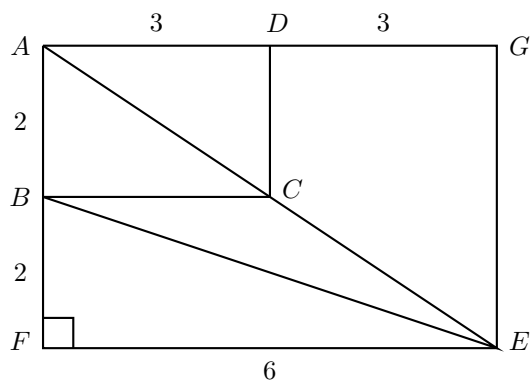
tai

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100.$$

I.6. Suorakulmion $ABCD$ sivun AB pituus on 2 ja sivun AD pituus on 3. Janat AC ja CE ovat yhtä pitkiä, katso kuva. Mikä on janan BE pituus?

Ratkaisu. Jatketaan kuvassa esitetyn mukaisesti janoja AB ja AD siten, että muodostuu iso suorakulmio $AFEG$. Tällöin suorakulmaisen kolmion BFE hypotenuusa on kysytty jana BE . Koska kateetin BF pituus on 2 ja kateetin FE pituus on 6, niin hypotenuusan BE pituus on Pythagoraan lauseen perusteella

$$|BE| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,3.$$



I.7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 2.$$

Ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} &= \frac{3x^3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x}{x - 1} \\ &= \frac{3x^3 - x(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^3 - 1} = 2 \end{aligned}$$

täsmälleen silloin, kun

$$2x^3 - x^2 - x = 2x^3 - 2$$

eli

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

eli $x = -2$ tai $x = 1$. Näistä vain $x = -2$ kelpaa ratkaisuksi.

I.8. Yhtiön vuoden 2019 tulot kasvoivat 25 % ja menot kasvoivat 15 % edellisvuoteen verrattuna. Yhtiön voitto (= tulot - menot) kasvoi 40 %. Kuinka suuri osuus yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019?

Ratkaisu. Merkitään vuoden 2018 tuloja T_{2018} , vuoden 2019 tuloja T_{2019} , vuoden 2018 menoja M_{2018} ja vuoden 2019 menoja M_{2019} . Tiedetään, että

$$\begin{aligned} T_{2019} &= 1,25T_{2018}, & M_{2019} &= 1,15M_{2018} & \text{ja} \\ T_{2019} - M_{2019} &= 1,4(T_{2018} - M_{2018}). \end{aligned}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$T_{2018} = \frac{8}{10}T_{2019} \quad \text{ja} \quad M_{2018} = \frac{20}{23}M_{2019},$$

jotka kolmanteen yhtälöön sijoittamalla saadaan

$$T_{2019} - M_{2019} = \frac{14}{10} \left(\frac{8}{10}T_{2019} - \frac{20}{23}M_{2019} \right).$$

Näin ollen

$$\frac{5}{23}M_{2019} = \frac{3}{25}T_{2019},$$

joten

$$\frac{M_{2019}}{T_{2019}} = \frac{3}{25} \cdot \frac{23}{5} = \frac{69}{125} = 0,552.$$

Näin ollen 55,2 % yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019.

I.9. Kuusi korttia numeroidaan yhdestä kuuteen ja sekoitetaan. Kolme korttia nostetaan peräkkäin ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu kolmen luvun jono on kasvava?

Ratkaisu. Kuudesta kortista voidaan kolme korttia nostaa $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ eri tavalla. Kasvavia kolmen luvun jonoja ovat 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 ja 456, joita on yhteensä 20. Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Tehtävät II

II.1. Reaaliluvulle x pätee $x + \frac{1}{x} = 5$. Määritä lukujen $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ tarkat arvot.

Ratkaisu. Koska

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23.$$

Koska

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \left(x + \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 5 = 110. \end{aligned}$$

II.2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

Ratkaisu. Koska yhtälössä esiintyvien nimittäjien on oltava nollasta poikkeavia, niin on oltava $x \neq n \cdot \frac{\pi}{4}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Sinin kaavoja $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ja $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$ käyttämällä saadaan yhtälö kirjoitettua muodossa

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{4 \sin x \cos x \cos 2x},$$

josta samannimisiksi laventamalla

$$\frac{4 \cos x \cos 2x - 2 \cos 2x}{4 \sin x \cos x \cos 2x} = \frac{2}{4 \sin x \cos x \cos 2x}$$

ja edelleen

$$4 \cos x \cos 2x - 2 \cos 2x = 2.$$

Nyt kosinin kaavaa $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ käyttämällä saadaan

$$4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2(2 \cos^2 x - 1) = 2,$$

joten

$$\cos x (2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 0.$$

Koska $x \neq n \cdot \frac{\pi}{4}$, niin $\cos x \neq 0$, ja näin ollen on oltava

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

joten $\cos x = -\frac{1}{2}$ tai $\cos x = 1$. Näistä vain ensimmäinen ratkaisu kelpaa, joten

$$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{4\pi}{3} + k2\pi, \quad \text{missä } k \in \mathbb{Z}.$$

II.3. Määritä peräkkäiset kokonaisluvut, joiden summa on 100.

Ratkaisu. Merkitään peräkkäisten kokonaislukujen lukumäärää n ja ensimmäistä lukua a . Koska lukujen keskiarvo kerrottuna lukujen määrällä on 100, toisin sanoen

$$\frac{a + a + (n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(2a + n - 1)}{2} = 100,$$

niin

$$n(2a + n - 1) = 200.$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin myös $2a + n - 1$ on positiivinen kokonaisluku. Havaitaan lisäksi, että luvuilla n ja $2a + n - 1$ on erilainen *pariteetti*,

eli luvuista toinen on parillinen ja toinen on pariton. Tästä seuraa, että n on luvun 200 tekijä, joka on joko pariton tai luvulla 8 jaollinen. Jälkimmäinen havainto seuraa siitä, että jos n on parillinen, niin $2a + n - 1$ on pariton, joten luvussa $200 = n(2a + n - 1) = 2^3 \cdot 5^2$ on tekijän 2^3 oltava luvun n tekijä. Näin ollen n voi olla 1, 5, 8, 25, 40 tai 200, joita vastaavat luvut a saadaan yhtälöstä

$$a = \frac{200 - n^2 + n}{2n}.$$

Lukua $n = 1$ vastaa siis luku $a = 100$, lukua $n = 5$ vastaa luku $a = 18$, lukua $n = 8$ vastaa luku $a = 9$, lukua $n = 25$ vastaa luku $a = -8$, lukua $n = 40$ vastaa luku $a = -17$ ja lukua $n = 200$ vastaa luku $a = -99$. Peräkkäisten kokonaislukujen summa on näin ollen 100 seuraavissa kuudessa tapauksessa:

100;
18, 19, 20, 21, 22;
9, 10, 11, ..., 15, 16;
- 8, -7, -6, ..., 15, 16;
- 17, -16, -15, ..., 21, 22;
- 99, -98, -97, ..., 99, 100.

II.4. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{3} \leq \frac{x + y}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

pätee kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y .

Ratkaisu. Korottamalla epäyhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$\frac{(x^2 + xy + y^2)^2}{9} \leq \frac{(x + y)^2(x^2 + y^2)}{8},$$

joten

$$8(x^2 + xy + y^2)^2 \leq 9(x + y)^2(x^2 + y^2)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 - 6x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + 2xy(x - y)^2. \end{aligned}$$

Viimeinen lauseke on ei-negatiivinen kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y , joten väite on todistettu. $\square$

II.5. Heitetään kolikkoa 10 kertaa peräkkäin. Jos saadaan kruuna, niin kirjoitetaan paperille numero 2. Jos saadaan klaava, niin kirjoitetaan paperille numero 3. Numerot kirjoitetaan peräkkäin arpomisjärjestyksessä. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu 10-numeroinen luku on jaollinen luvulla (a) 3, (b) 4?

Ratkaisu. Mahdollisia 10-numeroisia lukuja on $2^{10} = 1024$.

(a) Tuloksena oleva luku on jaollinen luvulla 3, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3. Koska luku sisältää vain numeroita 2 ja 3, niin numeroiden summa on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun numeroiden 2 lukumäärä on jaollinen luvulla 3, eli niitä on 0, 3, 6 tai 9. Kun 10-numeroisessa luvussa on n numeroa 2 ja $10 - n$ numeroa 3, niin luvulla 3 jaollisia lukuja on

$$\binom{10}{n} = \frac{10!}{n!(10-n)!} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 120, & n = 3, \\ 210, & n = 6, \\ 10, & n = 9. \end{cases}$$

Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{1 + 120 + 210 + 10}{1024} = \frac{341}{1024} \approx 0,33.$$

(b) Tuloksena oleva luku on jaollinen luvulla 4, jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen luvulla 4. Mahdollisuudet 10-numeroisen luvun kahden viimeisen numeron muodostamiksi luvuiksi ovat 22, 23, 32 ja 33, joista vain luku 32 on jaollinen luvulla 4. Koska $2^8 = 256$ 10-numeroista lukua päättyy numeroihin 32, niin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{256}{1024} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

II.6. Millä vakion c arvoilla yhtälöllä

$$x^2 - 2 \left| x + \frac{1}{4} \right| + c = 0$$

on täsmälleen kolme ratkaisua?

Ratkaisu. Tapaus 1: $x < -\frac{1}{4}$. Tällöin tarkasteltava yhtälö on $x^2 + 2x + (c + \frac{1}{2}) = 0$. Sen ratkaisu on

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(c + \frac{1}{2})}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2 - 4c}}{2}$$

ja determinantti on $D_1 = 2 - 4c$.

Tapaus 2: $x \geq -\frac{1}{4}$. Tällöin tarkasteltava yhtälö on $x^2 - 2x + (c - \frac{1}{2}) = 0$. Sen ratkaisu on

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(c - \frac{1}{2})}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{6 - 4c}}{2}$$

ja determinantti on $D_2 = 6 - 4c$.

Jos $D_1 = 0$, niin $c = \frac{1}{2}$, ja yhtälön kolme ratkaisua ovat

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 \pm \sqrt{2 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = -1, \\ x_2 &= \frac{2 - \sqrt{6 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = 0, \\ x_3 &= \frac{2 + \sqrt{6 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Jos $D_2 = 0$, niin $c = \frac{3}{2}$. Tällöin $D_1 = 2 - 4 \cdot \frac{3}{2} = -4 < 0$, joten yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.

Jos molemmat determinantit D_1 ja D_2 ovat positiivisia, niin yhtälön neljästä juuresta kahden on oltava samoja, jotta yhtälöllä olisi vaaditut kolme ratkaisua. Merkitään yhtälön neljää juurta

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c}, & x_2 &= -1 - \sqrt{\frac{1}{2} - c}, \\x_3 &= 1 + \sqrt{\frac{3}{2} - c}, & x_4 &= 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c}.\end{aligned}$$

Ratkaisut x_1 ja x_2 eivät voi olla samoja, eivätkä ratkaisut x_3 ja x_4 . Selvästi x_3 on suurempi kuin x_1 ja x_2 .

Jos $x_1 = x_4$, niin

$$-1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c}$$

eli

$$\sqrt{\frac{1}{2} - c} + \sqrt{\frac{3}{2} - c} = 2.$$

Korottamalla yhtälö puolittain toiseen saadaan

$$2 - 2c + 2\sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c},$$

eli

$$2 + 2c = 2\sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c}$$

ja edelleen

$$1 + c = \sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c}.$$

Korottamalla yhtälö jälleen puolittain toiseen saadaan

$$c^2 + 2c + 1 = \frac{3}{4} + c^2 - 2c,$$

joten

$$4c = -\frac{1}{4} \quad \text{eli} \quad c = -\frac{1}{16}.$$

Yhtälön kolme ratkaisua ovat siis

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = x_4 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}, \\x_2 &= -1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = -1\frac{3}{4}, \\x_3 &= 1 + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}} = 2\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Jos $x_2 = x_4$, niin vastaavasti kuin edellä saadaan $c = -\frac{1}{16}$. Tämä ei kuitenkaan ole yhtälön ratkaisu, sillä

$$-1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} \neq 1 - \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}}.$$

Väärään ratkaisuun johtaa ensimmäinen yhtälön puolittain toiseen korottaminen, koska yhtälössä toinen puoli on negatiivinen ja toinen positiivinen. Ei siis ole mahdollista, että yhtälöllä olisi täsmälleen kolme ratkaisua siten, että $x_2 = x_4$.

Yhteenvetona, tarkasteltavalla yhtälöllä on täsmälleen kolme ratkaisua, jos $c = \frac{1}{2}$ tai $c = -\frac{1}{16}$.

II.7. Mikä on luvun

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{n}$$

desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero (siis ensimmäinen numero pilkun jälkeen)?

Ratkaisu. Ensimmäisten n positiivisen kokonaisluvun ja niiden neliöiden summakaavojen perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{n} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\&= \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2} \\&= \frac{(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

Jos jaettaessa luku n luvulla 3 jakojäännökseksi tulee 1 tai 2, niin osoittajassa oleva luku $(n+1)(n+2)$ on jaollinen luvulla 3. Tällöin luvun desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero on 0. Jos luku n on jaollinen luvulla 3, niin jaettaessa osoittajassa oleva luku $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$ luvulla 3 saadaan jakojäännökseksi 2. Tällöin luvun desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero saadaan murtoluvun $\frac{2}{3}$ ensimmäisestä desimaalista, joka on 6.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitukset suomeksi: Mika Koskenoja



Monte Carlon menetelmä ja numeerinen integrointi Pythonilla

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Helsingin yliopisto

Monte Carlon menetelmä on oikeastaan menetelmäperhe. Ideana on toistaa satunnaista koetta ja tämän satunnaisen kokeen perusteella tehdä johtopäätöksiä yleisestä tilanteesta. Tässä tekstissä Monte Carlon menetelmää on tarkoitus valottaa numeerisen integroinnin näkökulmasta, eli pyritään käytännössä laskemaan erilaisia pinta-aloja Monte Carlon simuloinnilla.

Tämän kevään 2021 ylioppilaskokeet ja Monte Carlo

Tämän kevään ylioppilaskokeissa tehtävän 8 tehtävänanto oli seuraava:

Tasojoukon A pisteet (x, y) määräytyvät epäyhtälöistä $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$ ja $y \geq x^2$. Tässä tehtävässä on tarkoitus arvioida joukon A pinta-alaa simulaation avulla käyttämällä sitä tietoa, että todennäköisyys on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Arvotaan pisteitä (x, y) suorakulmiosta B , jonka määräävät epäyhtälöt $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 4$.

1. Tee sopivalla ohjelmistolla koodi, joka arpoo 1000 pistettä suorakulmiosta B ja tulostaa vastauksena niiden pisteiden lukumäärän, jotka kuuluvat joukkoon A . Kerro sanallisesti ja sopivien kuvakaappausien avulla, miten toteutit koodisi. (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi taulukkolaskennan satunnaislukugeneraattoria.) (6 p.)

2. Hille ajoi kohdassa 1 tekemänsä koodin 10 kertaa ja sai alla olevat luvut. Laske tulosten keskiarvo ja arvioi tämän perusteella joukon A pinta-alaa. (6 p.)

Hillen koodin tulosteet: 673, 664, 672, 679, 667, 650, 640, 678, 660, 667.

Tehtävän ensimmäisessä osassa on siis tarkoitus tuottaa algoritmi, joka arpoo pisteitä ja kertoo miten moni niistä kuuluu tiettyyn alueeseen. Toisessa kohdassa taas ajatellaan kuvitteellista tilannetta, jossa Hille-niminen henkilö on tehnyt koodin ja ajanut sen kymmenen kertaa ja saanut kasan tulosteita. Näiden tulosten perusteella olisi tarkoitus arvioida alueen pinta-alaa lähtien liikkeelle oletuksesta, joka voidaan muotoilla esimerkiksi seuraavasti: jos kysytty ala on x % koko pinta-alasta, niin noin x % arvotuista pisteistä osuu kyseiseen alaan.

Koko tehtävä ratkeaa sujuvasti ilman Pythonin käyttöä, esimerkiksi ihan tavallisella taulukkolaskentaohjelmalla, mutta koska tämän tekstin ideana on antaa esimerkkejä nimenomaan Pythonin käytöstä, keskitytään siihen.

YTL:n hyvän vastauksen piirteissä on tarjottu oheinen Pythonilla ohjelmoitu koodi yhdeksi mahdolliseksi ratkaisuksi:

```

1 import random
2 n=1
3 k=0
4 while n<1001:
5     x=random.uniform(0,2)
6     y=random.uniform(0,4)
7     if x*x<=y:
8         k=k+1
9     n=n+1
10 print(k)

```

Yksinkertaisuudessaan siis koodi arpoo 1000 kertaa luvut x ja y annetulta väliltä ja testaa joka kerta, onko $x^2 \leq y$ vai ei. Jos $x^2 \leq y$, niin kasvatetaan laskuria, joka määrittää, kuinka moni pari toteuttaa tämän ehdon. (Eli pidetään kirjaa siitä, kuinka moni lukupari toteuttaa annetun ehdon.) Lopuksi tulostetaan niiden lukuparien (x, y) lukumäärä, jotka toteuttavat annetun ehdon.

Jälkimmäisessä kohdassa ajatus on se, että annettujen lukujen keskiarvo antaa jonkinlaisen estimaatin siitä, kuinka monta pistettä voisi osua annettuun alueeseen. Keskiarvo on 665, joten $\frac{665}{1000}$ osuus lukupareista osuu annettuun alueeseen. Koska pisteitä arvotaan suorakulmiosta, jonka mitat ovat 2×4 , eli ala on 8, on kysytyn alueen pinta-ala arviolta

$$\frac{665}{1000} \cdot 8 \approx 5,3.$$

Integroiden pinta-alan tarkaksi arvoksi saadaan

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,3.$$

Yhden desimaalin tarkkuudella tulokset siis ovat samat.

Piiri likiarvo simuloimalla

Arvioidaan seuraavaksi luvun π likiarvo samalla idealalla. Piirretään yksikköympyrä 2×2 -neliöön ja selvitetään, kuinka suuri osa neliöstä kuuluu ympyrään. Yksikköympyrän ala on π , joten periaatteessa pisteistä suurin piirtein $\frac{\pi}{4}$ -osan pitäisi osua siihen. Koodi näyttää tältä:

```

1 import random
2 n=1
3 k=0
4 while n<1001:
5     x=random.uniform(-1,1)
6     y=random.uniform(-1,1)
7     if x*x+y*y<=1:
8         k=k+1
9     n=n+1
10 print(k)

```

Ajoin koodin 11 kertaa, jokaisella kerralla 1000 lukuparia, ja sain tulosteiksi: 790, 765, 778, 797, 748, 757, 802, 786, 789, 782, 768. Näiden lukujen keskiarvo on $\frac{8562}{11}$. Nyt siis voidaan arvioida, että

$$\frac{8562}{11 \cdot 1000} \approx \frac{\pi}{4},$$

eli

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{8562}{11 \cdot 1000} \approx 3,11.$$

Ensimmäinen desimaali on siis oikein, toinen ei. Muokasin ohjelmaa hiukan: tehdäänkin 10^6 toistoa, mutta ajetaan ohjelma vain kerran. Tuloste on nyt 786444, eli tällä kerralla saadaan

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{786444}{10^6} \approx 3,146.$$

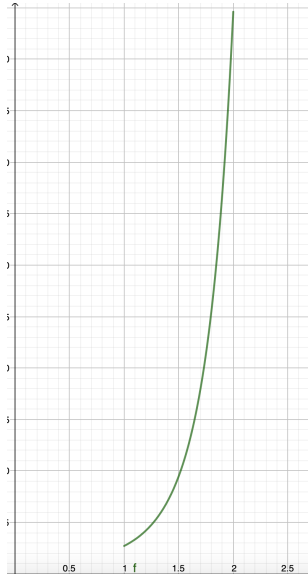
Jos koodia ajettaisiin hyvin monta kertaa ja laskettaisiin keskiarvoja tai otettaisiin hyvin iso otos, saataisiin parempia ja parempia likiarvoja luvulle π .

Numeerinen integraali ja hankala integraali

Arvioidaan viimeiseksi integraalia

$$\int_1^2 e^{x^2} dx.$$

Funktio $x \rightarrow e^{x^2}$ ei ole integroitavissa alkeisfunktioiden avulla. Jos syötän Wolfram Alphaan komennon `integrate e^(x^2)`, niin Wolfram Alphan vastaus on $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\operatorname{erfi}(x) + \text{vakio}$. Funktiota erfi ei Wolfram Alpha linkkaa mihinkään sen syvempään, mutta Wolfram Alpha osaa liittää tämän funktion Dawsonin integraaliin tai funktioon ja kertoo, että ne liittyvät puolestaan lämmönjohtumiseen ja että niillä on muitakin sovelluksia. Toteutetaan nyt ohjelma, jolla saamme arvioitua integraalia. Huomaamme ensinnäkin, että kun $x = 1$, on funktion e^{x^2} arvo e . Kun $x = 2$, on funktion arvo e^4 . Joudumme siis operoimaan suorakulmiossa, joka saa x -akselilla arvot $[1, 2]$ ja y -akselille arvot $[0, e^4]$. Kuva tilanteesta näyttää tältä:



Tavoite on siis määrittää käyrän ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala. Kirjoitetaan koodi samalla periaatteella kuin aiemminkin. Nyt arvotaan 10^4 pisteparia (x, y) :

```
1 import math
2 import random
3 k=0
4 n=1
5 while n<10001:
6     x=random.uniform(1,2)
7     y=random.uniform(0,math.exp(4))
8     if y<=math.exp(x**2):
9         k=k+1
10    n=n+1
11 print(k)
```

Ajoin koodin kertaalleen ja sain tulokseksi 2723. Nyt integraalin arvio olisi siis

$$\int_1^2 e^{x^2} dx \approx \frac{2723}{10^4} \cdot 1 \cdot e^4 \approx 14,87.$$

Integraalille Wolfram Alpha antaa puolestaan arvoksi

$$\int_1^2 e^{x^2} dx \approx 14,99.$$

Virhe on tässäkin tapauksessa suhteellisen pieni ja tietysti tarkemman arvion saisi tälläkin kertaa joko lisäämällä toistojen määrää tai ajamalla ohjelman useampia kertoja.

Lopuksi

Monte Carlon menetelmä soveltuu monen integraalin arviointiin sekä esimerkiksi hypoteesien testaamiseen ja moneen muuhun tarkoitukseen. Se soveltuu myös erinomaisen hyvin todennäköisyyslaskentaan. Monia todennäköisyyksiä on helppo laskea hiukan väärin, mutta testaamalla vastaavalla simuloinnilla voi vähintäänkin testata onko kertaluokka täysin pielessä.

Alkuun Pythonin kanssa pääsee esimerkiksi osoitteessa

<https://ohjelmointi-21.mooc.fi/>

olevalla oppaalla. Pythonille on useita kääntäjiä verkossa. Esimerkiksi tämän tekstin koodit on ajettu osoitteessa

<https://www.programiz.com/python-programming/online-compiler/>

olevalla kääntäjällä.

Solmu 1/2021

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, vanhempi yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenranta teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Painopaikka:

Painosalama Oy

Numeroon 2/2021 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 22.8.2021 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkalehti Solmun matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Eri aihepiireihin liittyviä matematiikan tehtäviä ratkomalla oppilaat huomaavat, että matematiikan osaamista tarvitaan monissa eri yhteyksissä. Matematiikan kumuloituva rakenne vaatii ennen matemaattisten työkalujen käyttöä aineen sisäistä (eli vertikaalista) eheyttämistä, vasta tämän jälkeen voidaan pyrkiä eri oppiaineiden väliseen (horisontaaliseen) eheyttämiseen. Tarvittavien matematiikan sisältöjen on siis oltava hallinnassa ennen niiden käyttöä. Opettajan ratkaistavaksi jää eri oppiaineiden erilainen etene- mistahti, esimerkiksi käsite mittakaava voi tulla esille maantiedossa eri luokka-asteella kuin matematiikassa.

Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia. Alla annetaan neljästä paketista esimerkkejä niiden sisältöistä. Tehtävät voi tulostaa Matematiikkalehti Solmun (matematiikkalehtisolmu.fi) Matematiikkadiplomi-sivulta ja pyytää vastaukset osoitteesta [juha.ruokolainen\(at\)yahoo.com](mailto:juha.ruokolainen(at)yahoo.com)

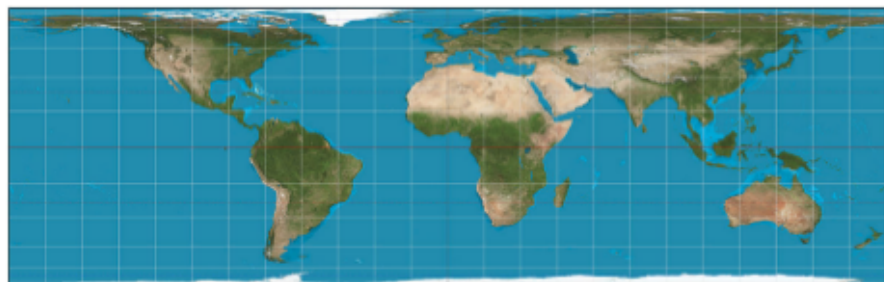
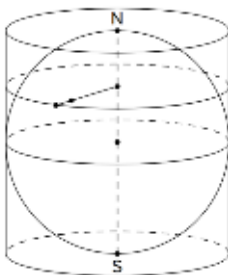
Koululle ei aiheudu muita kuin mahdollisia monistus/tulostuskustannuksia.

Tehtäväpaketit

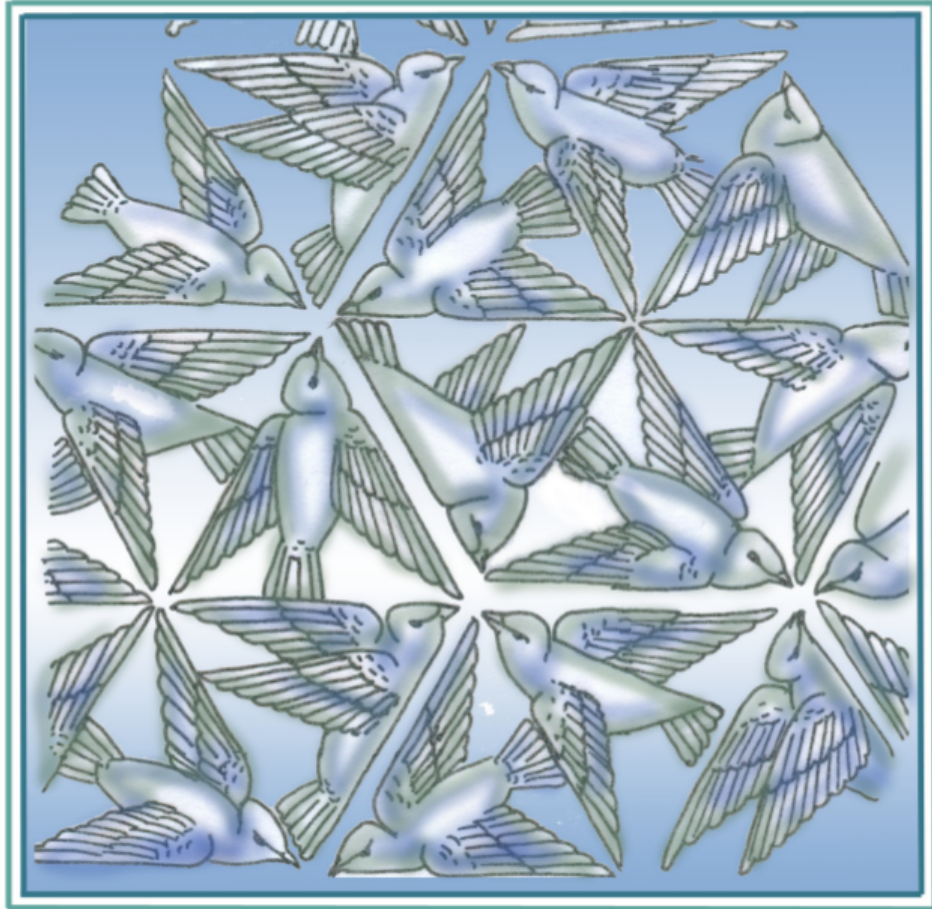
Peruskoulua, ehkä osittain myös lukiota, varten koottujen tehtäväpakettien aiheet ovat:

- **Maapallo** (Sisältöjä: maapallo, etäisyyksiä luonnossa ja kartalla, tasokartta, ihminen Aurinkoon ja vetyatomin välissä. Matemaattisia sisältöjä: suuruussuhteet, mittakaava, etäisyydet, myös pallolla, maapallon pyöriminen, projektio, suuret luvut.)
- **Suomen historia** (Sisältöjä: väkiluvun kehitys keskiajalta, kaupungit, kansakoulu, tytöt ja pojat opetuksessa, taiteilijoita, radioaktiivinen hajoaminen, Pisa-tulokset. Matemaattisia sisältöjä: ajan yksiköt, prosenttilaskenta ja prosenttipisteet, kaavioiden laatiminen ja tulkitseminen, lineaarinen approksimaatio, murtoluvut, päättely.)
- **Terveys ja ravinto** (Matemaattisia ym. sisältöjä: suhteet, prosentit, perusaineenvaihdunta, liikkuminen, painoindeksi, energian tarve, kalorit, ajankäyttö, lääkeannostus, alkoholi ja hormonit)
- **Talous** (Sisältöjä: kauppa- ja hinnanalennuslaskuja, remonttikustannuslaskuja, brutto- ja nettopalkka, verotus, korot, pörssi, valtion budjetti, luonnonvarojen tuottavuus eri EU-maissa)
- **Todennäköisyys**
- **Matematiikka ja taide** (2 tasoa)
- **Mittaaminen** (2 tasoa)
- **Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus**, jossa on eri vaihtoehtoja tutkivia tehtäviä.

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.



Kuva: Strebe (Oma teos) [CC BY-SA 3.0], lähde: Wikimedia Commons



 **SOLMU**
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi