

Solmun tehtäviä korona-ajankuluksi

Tehtävät I

Nämä tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

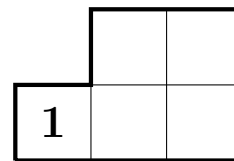
I.1. Kumpulan Pallo teki jalkapalloturnauksen neljäs-ä ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajina olleet joukkueet tekivät Kumpulan Palloa vastaan pelatesaan yhteensä kaksi maalia. Voitosta saa kolme pistettä, tasapelistä saa yhden pisteen ja tappiosta ei saa yhtään pistettä. Kuinka monta pistettä Kumpulan Pallola on mahdollista olla pelattujen neljän pelin jälkeen?

I.2. Roope-robotti on suljettu huoneeseen, joka on ruudutettu tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi. Roope kulkee suoraan yhteen suuntaan, kunnes törmää seinään. Silloin hän kääntyy oikealle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos oikealla on seinä ja hän ei voi kääntyä oikealle, niin hän kääntyy vasemmalle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos hän ei voi kääntyä oikealle eikä vasemmalle, hän pysähtyy ja jää kyseiseen ruutuun.

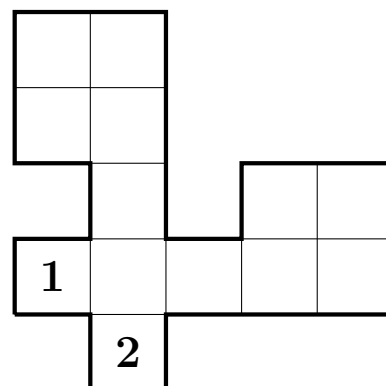
Kuvassa 1 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 hän kiertää koko huoneen ja päätyy takaisin ruutuun 1, johon pysähtyy. Kuvassa 2 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 tai ruudusta 2 hän päätyy takaisin lähtöruutuun ja pysähtyy siihen. Kuvassa 3 on huone, jossa Roopen lähtiessä ruudusta 1 hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen, ja lähtiessään ruudusta 2 hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen.

Piirrä huone, jossa on neljä aloitusruutua: Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 1, hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 2, hän päätyy ruutuun 3 ja pysähtyy siihen. Jos Roope

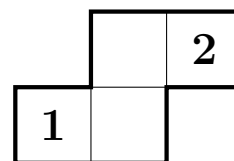
lähtee liikkeelle ruudusta 3, hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 4, hän päätyy takaisin ruutuun 4 ja pysähtyy siihen.



Kuva 1.

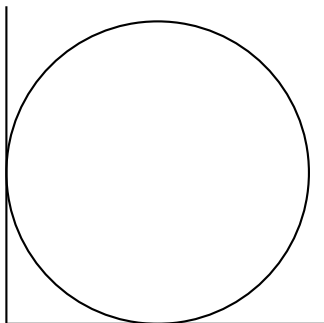


Kuva 2.

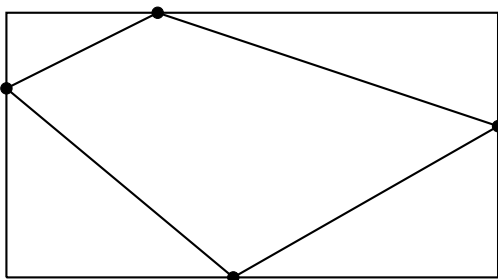


Kuva 3.

I.3. Pyöreä pöytä on huoneen kulmassa, katso kuva. Pöydän halkaisija on 170 cm. Pöydän reunassa oleva kohta on 10 cm etäisyydellä kuvassa vaakasuorassa olevasta seinästä. Laske kohdan etäisyys kuvassa pystysuorassa olevasta seinästä.



I.4. Suorakulmion jokaiselta sivulta valitaan yksi piste ja vierekkäisten sivujen pisteet yhdistetään toisiinsa janalla. Millä ehdolla muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta? Alla esimerkkikuva tilanteesta.

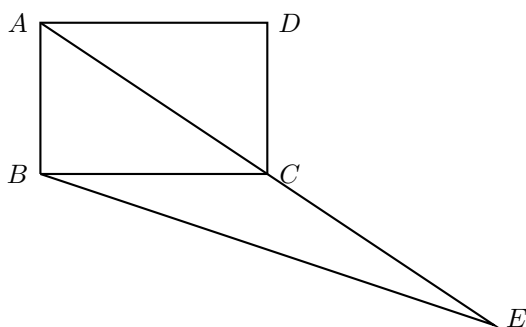


I.5. Korvaa lausekkeessa

$$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ 6 \circ 7 \circ 8 \circ 9 = 100$$

jokainen ympyrä \circ jonkin peruslaskutoimituksen symbolilla niin, että yhtälö pätee. Sulkeitä ei saa käyttää.

I.6. Suorakulmion $ABCD$ sivun AB pituus on 2 ja sivun AD pituus on 3. Janat AC ja CE ovat yhtä pitkiä, katso kuva. Mikä on jana BE pituus?



I.7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 2.$$

I.8. Yhtiön vuoden 2019 tulot kasvoivat 25 % ja menot kasvoivat 15 % edellisvuoteen verrattuna. Yhtiön voitto (= tulot – menot) kasvoi 40 %. Kuinka suuri osuus yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019?

I.9. Kuusi korttia numeroidaan yhdestä kuuteen ja sekoitetaan. Kolme korttia nostetaan peräkkäin ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu kolmen luvun jono on kasvava?

Tehtävät II

Nämä tehtävät ovat lukion pitkän matematiikan oppilaille.

II.1. Reaaliluvulle x pätee $x + \frac{1}{x} = 5$. Määritä lukujen $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ tarkat arvot.

II.2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

II.3. Määritä peräkkäiset kokonaisluvut, joiden summa on 100.

II.4. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{3} \leq \frac{x + y}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

pätee kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y .

II.5. Heitetään kolikkoa 10 kertaa peräkkäin. Jos saadaan kruuna, niin kirjoitetaan paperille numero 2. Jos saadaan klaava, niin kirjoitetaan paperille numero 3. Numerot kirjoitetaan peräkkäin arpomisjärjestyksessä. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu 10-numeroinen luku on jaollinen luvulla (a) 3, (b) 4?

II.6. Millä vakion c arvoilla yhtälöllä

$$x^2 - 2 \left| x + \frac{1}{4} \right| + c = 0$$

on täsmälleen kolme ratkaisua?

II.7. Mikä on luvun

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{n}$$

desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero (siis ensimmäinen numero pilkun jälkeen)?

Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL