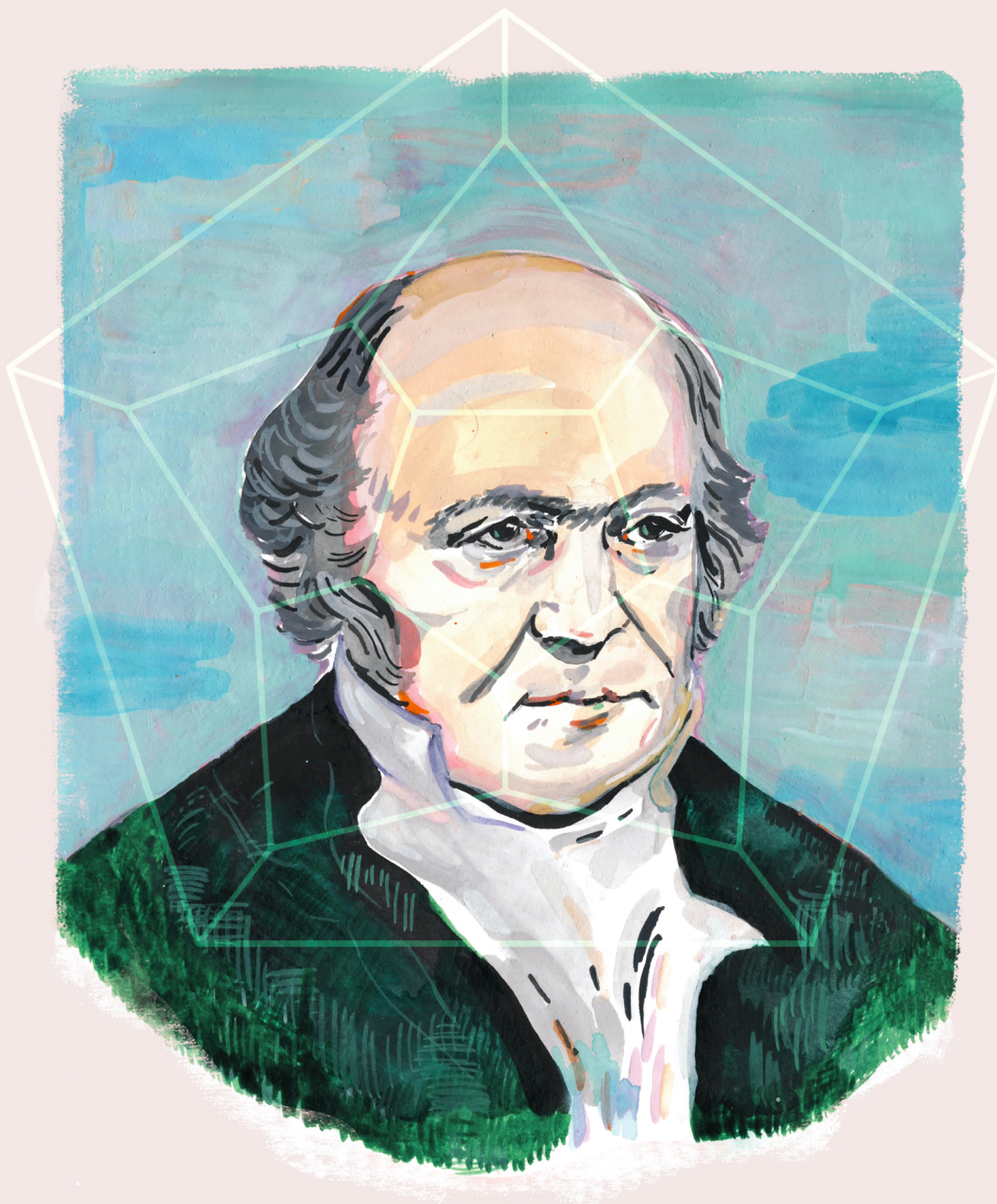


S&LMU

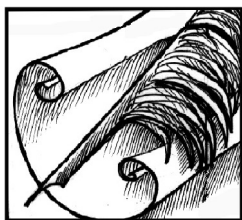
MATEMATIIKKALEHTI 3/2020

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Opeta niitä opiskelijoita, joita haluat opettaa (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)...	3
Hamiltonin kvaternioiden renessanssi? (Teuvo Laurinolli)	5
Vuoden 2020 virtuaaliset matematiikkaolympialaiset (Lauri Hallila)	8
Raja-arvo ei aina käyttäydy niin kuin luulisi (Simo K. Kivelä)	11
Solmun tehtäviä korona-ajankuluksi	14
Alkulukuja ja yhdistettyjä lukuja – ylioppilastehtävä yleistyksineen (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	16
Differentiaaliyhtälöiden globaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause (Eeli Tamminen)	18



Opeta niitä opiskelijoita, joita haluat opettaa

Pääkirjoitus

Olen lukenut Krantzini¹. Päähäni on iskostunut, että tulee opettaa niitä opiskelijoita, joita oikeasti on opettamassa, ei niitä joita haluaisi olla opettamassa. Ohje tuntuu hyvin järkeenkäyvältä: Jos vaikka haluaisin opettaa modulumuotojen jatkokurssia lukuteorian jatko-opiskelijoille, mutta opetan vaikkapa differentiaaliyhtälöiden alkeita kandiopiskelijoille, niin lopputulos tuskin on hyvä, jos oletan kovin paljon lukuteorian esitietoja.

Krantzismilla voi perustella myös paljon arkipäivän asioita: ”Ostin tällä kertaa firman XXX kahvia pakeitin enkä firman YYY kahvia, koska Krantz.” Toisin sanoen: olisin halunnut ostaa firman YYY kahvia, mutta sitä ei ollut kaupassa, joten oli pakko tyytyä firman XXX kahviin. On sillä myös väännetty rautalankaa lapselle, joka ei olisi halunnut laittaa tylsiä legginsijä jalkaan (kun hienot Frozen-legginsit olivat pyykissä): Laita jalkaan ne legginsit, jotka sinulla on puhtaana, älä niitä, jotka haluaisit laittaa ja jotka ovat pyykissä liikaisena.

Tällä periaatteella olen myös pyrkinyt rakentamaan kurssit. Tänä syksynä sain kuitenkin eteeni ensimmäisen kerran ikinä aivan valtavan kurssin, jonka tiesin olevan tarjolla paitsi matematiikan ja tietotekniikan opiskelijoille, myös hyvin monille sivuaineopiskelijoille sekä kaikelle kansalle avoimen yliopiston kautta. Ryhdyin miettimään mitä oikeasti tiedän opiskelijoista, joita opetan, ja totesin, että en tiedä riittävästi voidakseni tehdä mitään fiksuja johtopäätöksiä. Olisi suuri kiusaus

tehdä kurssista melko helppo, sillä silloinhan luultavasti varmistettaisiin, että kukaan tai juuri kukaan ei tipu kärryiltä. Huono puoli vain on, että silloin ei saavutettaisi niitä taitoja, jotka kurssilla pitäisi saavuttaa, eikä myöskään tarjoiltaisi sitä kuvaa matematiikan opinnoista, joka ainakin minusta vastaa todellisuutta.

Päätinkin siis yksinkertaisesti opettaa opiskelijoita, joita haluaisin opettaa: motivoituneita fukseja, jotka haluavat oppia matematiikkaa ja jotka ovat myös valmiita tekemään töitä, kunhan työ on mielekästä ja sopivasti mitoitettua ja kunhan apua, oivalluksia ja onnistumisen kokemuksia on luvassa. Oletus ei lopulta varmasti ole kovin pahasti pielessä paitsi että moni ei ollut fuksi, mutta se ei karakterisoinnin kannalta ollut kovin oleellista. Miksi kukaan tulisi matikan kurssille, jos ei haluaisi oppia matematiikkaa ja tehdä sen eteen töitä? Lopputulema: sain opetettua kaiken minkä halusinkin opettaa. Kokeista ja laskareista päätellen asia myös opittiin. Yli 500 ihmistä pääsi kurssin läpi ja moni heistä oli tehnyt kurssin aikana lähes kaiken. Suurin palkinto oli kuitenkin kurssipalaute. Noin 86 prosenttia palautetta antaneista piti kurssia hyvin onnistuneena tai melko onnistuneena. Yli 70 prosenttia kertoi tehneensä kurssin aikana töitä melko paljon tai hyvin paljon. Alle 5 prosenttia kertoi oppineensa hyvin vähän tai melko vähän. Tavoitteet siis toteutuivat hyvin: töitä tehtiin, mutta myös opittiin, ja kaiken huipuksi tämä oli ilmeisesti ihan mukavaa.

Ensin hämmästyin siitä miten moni piti kurssia onnis-

¹Steven G. Krantz: How to teach mathematics

tuneena ja miten moni kertoi tehneensä melko paljon tai hyvin paljon töitä – olin itse asiassa olettanut kurssin olevan hiukan kevyempi. Lopulta minun ei varmaan pitäisi olla hämmästynyt, koska kuitenkin moni myös kertoi oppineensa melko paljon tai hyvin paljon. Jos mietin palkitsevimpia kursseja, jotka itse olen opiskellut, ovat ne myös ne kaikkein työläimmät kurssit: Jutilan modulimuodot syksyllä 2002 (jolloin minulta puuttui joidenkin laskujeni mukaan 50 opintoviikkoa esitietoja) ja Mansneruksen immateriaalioikeuksien kurssi, jota käydessäni parempi rutiini lakitekstin lukemisesta ei olisi ollut haitaksi. Molemmilla kursseilla opin valtavasti ja molempien kunniallisen suorittamisen jälkeen koin saavuttaneeni jotain. Koko ajan ei ole välttämättä ollut hauskaa, mutta ne parhaat hetket olisivat jääneet kokematta, jos kurssit olisivat olleet vaatimattomam-

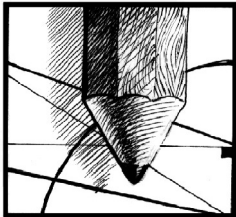
pia ja vähemmän vaativia.

Tästä kaikesta huolimatta on hirvittävän helppo vahingossa kurssia rakentaessa hiukan aliarvioida osallistujat. Tämä on tietyllä tavalla paradoksaalista, sillä tutkimusesitelmää pitäessä taas helposti yliarvioi yleisön esitiedot ja kyvyn omaksua uutta asiaa lyhyen esitelmän aikana (jos asia on minulle itsestäänselvää tutkittuani sitä kymmenen vuotta, niin kyllä kuulija sen varmasti oppii viidessä minuutissa).

Aion jatkossakin opettaa niitä opiskelijoita, joita haluan opettaa, ja luottaa siihen, että tämä opiskelijajoukko on sama kuin se, jota todella opetan.

Hyvää vuoden loppua ja alkavaa vuotta!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Hamiltonin kvaternioiden renessanssi?

Teuvo Laurinolli

Tieteenhistorian merkittävimpiin nimiin kuuluvan William Rowan Hamiltonin (1805–1865) poikkeuksellinen lahjakkuus tuli esille jo varhaislapsuudessa ilmiömäisenä kielten oppimisena. Luotettavana pidetyn St Andrews'n yliopiston toimittaman elämäkerran¹ mukaan Hamilton osasi jo viisivuotiaana äidinkieltänsä lisäksi kolmea vierasta kieltä, latinaa, kreikkaa ja hepreaa. Opettajana oli hänen setänsä, joka oli erinomainen pedagogi. Kieliä hän oppi myöhemmin lisää ja kerrotaan hänen elämänsä loppupuolella rentoutuneen luke-
malla persialaista runoutta alkukielellä.

Luvunlaskukin sujui Williamilta vaivattomasti, mutta hän haaveili runoilijan urasta. Matematiikka vei voiton, kun hän 12-vuotiaana hävisi päässälaskukisoissa Irlannissa vierailevalle amerikkalaiselle ihmelapselle Zerah Colburnille. Muutamassa vuodessa hän kävi läpi ranskankielisen Clairautin *Algebran* ja Newtonin *Principian* sekä Laplacen *Mecanique célesten*, josta hän löysi 17-vuotiaana virheen. Irlannin johtava luonnontieteilijä (Royal Astronomer) John Brinkley kommentoi nuoren Hamiltonin löydöstä: "This young man, I do not say will be, but is, the first mathematician of his age."

Hamiltonin yliopisto-opinnot alkoivat vauhdikkaasti Dublinin Trinity Collegessa 1824. Jo ensimmäisenä vuotena julkaistiin 19-vuotiaan Hamiltonin tutkielma *On caustics*, joka ilmestyi Irlannin tiedeakatemian sarjassa. Samoihin aikoihin Hamilton rakastui kiihkeästi tuttavaperheen tyttäreeseen Catherine Disneyhin. Ajan

tavan mukaisesti Hamilton pyysi Catherine'n kättä hänen vanhemmiltaan. Asiaa harkittuaan he antoivat kieltävän vastauksen, koska toinen kosija katsottiin vakavaraisemmaksi. Hamilton masentui ja suunnitteli itsemurhaa, mutta uppoutuminen runouteen palautti vähitellen hänen elämänhalunsa ja intohimonsa matematiikkaan. Runous auttoi häntä myöhemminkin vastoinkäymisten ja masennusten voittamiseen. Catherine ei kuitenkaan kadonnut hänen elämästään, vaikka Hamilton myöhemmin avioitui Helen Baylyn kanssa.

Trinity Collegen loppututkinnon molemmat osat (Sciences & Classics) valmistuivat 1826 korkeimmilla *optime*-arvosanoilla. Opintoihin kuulunut laaja tutkielma *Theory of Systems of Rays* herätti huomiota ja Hamilton nimitettiin heti Brinkleyn seuraajaksi kuninkaallisen tähtitieteilijän virkaan Dunsink-observatorioon, josta tuli hänen elinikäinen virka-asuntonsa. Samalla hänet nimitettiin Trinity Collegen astronomian professoriksi. Piispan virkaan siirtynyt Brinkley oli kuitenkin neuvonut Hamiltonia kieltäytymään observatorion johtajan virasta ja hän taisi olla oikeassa, koska Hamilton menetti pian mielenkiintonsa tähtitieteeseen ja omistautui kokonaan matematiikalle ja fysiikalle.

Hamiltonin laajasta matemaattisesta aktiivisuudesta erottuu kaksi ydinaluetta: Newtonin mekaniikan syventäminen sekä kompleksilukujen algebra ja sen yleistäminen. Edellisellä alueella hän jatkoi Lagrangen aiempia tutkimuksia määrittelemällä mekaanista syste-

¹<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>

miä kuvaavan funktion $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, jossa vektorit $\mathbf{q}$ ja $\mathbf{p}$ ovat hiukkasen paikkaa ja liikemäärää kuvaavia vektoreita ja t on aikamuuttuja. Tämä *Hamiltonin funktio*² toteuttaa yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt (Hamiltonin yhtälöt), jotka määräävät systeemin aikaevoluution. Hamiltonin 1830-luvulla kehittämien mekaniikan merkitys on ajan kuluessa kasvanut ja on keskeisessä asemassa myös nykyfysiikassa mukaan lukien kvanttimekaniikka ja kvanttikenttäteoria.

Kompleksiluvut oli haparoiden löydetty jo 1500–1600-luvuilla ja otettu hallintaan 1700-luvulla. Matemaatikot, heidän joukossaan Euler (1707–1783) ja Gauss (1777–1855), määrittivät ne binomeina $z = x + yi$, jotka voitiin hahmottaa myös muodossa $z = x \cdot 1 + y \cdot i$. Tässä x ja y ovat reaalilukuja, 1 on reaaliyksikkö ja i on imaginaariyksikkö, jonka neliö on -1 . Kompleksilukujen algebra toimi täsmälleen samoilla laskusäännöillä kuin reaalilukujen algebra. Kompleksilukujen ja xy -tason pisteiden (tai vektoreiden) vastaavuus oli tiedossa ja sitä oli tehokkaasti hyödynnetty. Gauss oli vuonna 1800 todistanut algebran peruslauseen, jonka mukaan *jokaisella polynomilla* on nollakohta kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$. Polynomien kertoimet saavat olla mitä tahansa reaalilukuja ja jopa mitä tahansa kompleksilukuja.

Hamilton saattoi kuitenkin olla ensimmäinen, joka riisui imaginaariyksiköltä mystisen auran määrittellessään kahden kompleksitason pisteen $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ yhteenlaskun ja kertolaskun proosallisesti asettamalla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja

$$z_1 z_2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

sekä nimeämällä sitten tason yksikköpisteet $(1, 0) = 1$ ja $(0, 1) = i$.

Kesytettyään kompleksiluvut tason pisteiksi Hamilton suuntasi katseensa korkeampiin ulottuvuuksiin. Jos 2-ulotteisen xy -tason pisteet saadaan toimimaan algebrana, miksi ei 3-ulotteisen xyz -avaruudenkin? Tästä aiheesta tulikin Hamiltonin loppuelämän *magnum opus*.

Lukualueen laajentaminen avaruuteenCOMPASTELI kertolaskuun. Hamilton ponnisteli vuosien ajan löytääkseen toimivan määritelmän avaruuspisteiden $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ja $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tulolle. Noina vuosina hänen lapsillaan oli tapana aamiaispöydässä tiedustella isältään: ”Well, Papa can you multiply triplets?” Läpimurto tapahtui maanantaina 16.10.1843, jolloin Hamilton oli vaimonsa kanssa kävelen matkalla tiedeakatemian kokoukseen³. Ollessaan ylittämässä Royal Canal-siltaa Hamilton oivalsi, että laajennus olikin tehtävä neliulotteiseen avaruuteen eli pisteille $q = (x, y, z, t)$,

jotka hän nimesi *kvaternioiksi*. Sittenmin on vakiintunut tavaksi kirjoittaa kvaternio Hamiltonin esimerkkiä noudattaen järjestykseen $q = (t, x, y, z)$ ja edelleen kompleksilukujen mallin mukaiseen muotoon

$$q = t + xi + yj + zk = t \cdot 1 + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k.$$

Tässä kvartetissa 1 on reaaliyksikkö eli skalaariyksikkö ja i, j, k ovat imaginaariyksiköitä, jotka voidaan ajatella xyz -avaruuskoordinaatiston akselien suuntaisiksi yksikkövektoreiksi. Kertoimet t, x, y, z ovat reaalilukuja. Kompleksilukualgebran tapaan muotoa $q = t + xi + yj + zk$ olevien kvaternioiden kertolasku määritellään tällaisten polynomien kertolaskuna sillä lisäehdolla, että

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Tämä oivallus työllisti Hamiltonin hänen elämänsä loppuun asti. Hän kehitti kvaternioiden algebraa ja analyysiä sekä muokkasi niistä käsitteellisiä työkaluja moniin fysiikan ja geometrian tarpeisiin. Mekaniikan lait ja Maxwellin yhtälöt kirjoitettiin kvaternioiden avulla. Nykyisen vektorialgebran ja -analyysin peruskäsitteet (mm. piste- ja ristitulo sekä nabla-operaattori) versoivat Hamiltonin käsissä kvaternioista erikoistapauksina. Nämä versot syrjäyttivät 19. vuosisadan lopulla kvaterniot fysiikan työkaluina. Vaikutusvaltaisten oppikirjojen tekijät (mm. Heaviside ja Gibbs) valitsivat vektoriformalismin yleisiä kvaternioita konkreettisempaan ja helpommin ymmärrettävään tapaan kuvata fysikaalisia suureita. Vähitellen kvaterniot väistyivät taka-alalle, vaikka ne Irlannissa pysyivät pitkään Hamiltonin jälkeenkin matematiikan yliopisto-opintojen pakollisena osana. Toisaalta kvaterniot inspiroivat jo 1800-luvulla monia muita algebrallisia laajennuksia, kuten Hermann Grassmannin (1809–1877) ja William Kingdon Cliffordin (1845–1879) kehittämät Grassmannin ja Cliffordin algebrat sekä ns. geometrinen algebra. Nämä ovat edelleenkin elinvoimaisia matematiikan aloja.

Hamilton käytti seitsemän viimeistä elinvuottaan 840-sivuisen pääteoksensa, Eukleideen geometrian tyyliin nimetyn, *Elements of quaternions* koostamiseen. Hän ei ehtinyt saada sitä valmiiksi ennen kuolemaansa vuonna 1865. Hänen poikansa William Edwin Hamilton toimitti kirjan painokuntoon ja kirjoitti sen esipuheen. Se ilmestyi 1866. Hamiltonin vaikeaselkoisen esitystavan vuoksi lukijakunta on jäänyt vähäiseksi.

Digitaalisen tekniikan ja tietokonegrafiikan aikana 1990-luvulla unohduksiin jääneet kvaterniot löydettiin uudelleen. Kävi ilmi, että kappaleiden liikettä avaruudessa tai sellaisen liikkeen projektiota kuvaruudulla voidaan ohjata/ohjelmoida kvaternioalgebran avulla.

²https://fi.m.wikipedia.org/wiki/Hamiltonin_mekaniikka

³Tapahtuman muistoksi Dublinissa järjestetään vuosittain lokakuun 16. päivänä Hamilton walk -kävely, joka suuntautuu samalle sillalle.

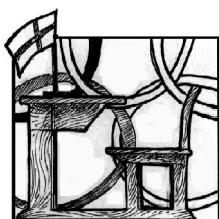
Hamilton oli muotoillut kvaternioiden avulla ns. *voileipäkaavan*, joka kuvaa avaruudessa tapahtuvaa kiertoliikettä laskennallisesti. Nykyisin kvaternioita käytetäänkin tietokoneohjelmiin integroituina software-komponentteina tuottamaan liikkuvaa 3D-grafiikkaa näytölle tai – konkreettisemmin – navigoimaan lentokoneita tai avaruusaluksia. Mainittakoon, että teoreettisessa fysiikassakin on löytynyt uutta käyttöä kvaternioille mm. alkeishiukkasten spin-ominaisuuksien ma-

temaattisessa mallintamisessa.

Solmu-lehden oppimateriaalikansiossa⁴ on sinne joulukuussa 2020 luovuttamani pdf-muotoinen kirjanen *Ensiaskeleet Hamiltonin kvaternioalgebraan*⁵. Siinä käydään läpi kompleksilukujen ja kvaternioiden algebran perusteet Hamiltonin voileipäkaavaan saakka. Esityksen ymmärtäminen edellyttää lukion ensimmäisen vuoden pitkän matematiikan tietoja. Tervetuloa Hamiltonin jalanjäljille!

⁴<https://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html>

⁵<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2020/Kvaterniot-TL-v1.pdf>



Vuoden 2020 virtuaaliset matematiikkaolympialaiset

Lauri Hallila

Kilpailun järjestelyt

Vuoden 2020 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset oli alunperin tarkoitus järjestää Pietarissa heinäkuussa. Koronan vuoksi kilpailuja siirrettiin syksylle siinä toivossa, että koronatilanne helpottaisi siihen mennessä. Kuten tässä vaiheessa on helppo arvata, näin ei tapahtunut. Keväällä virtuaalisesti järjestetty EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad) antoi kuitenkin aihetta uskoa, että myös Kansainväliset matematiikkaolympialaiset voitaisiin järjestää kussakin maassa erikseen, ja näin kilpailut päätettiin järjestää etänä.

Lupauduin Suomen joukkueenjohtajaksi ja ottamaan päävastuun kilpailun järjestelystä Suomessa. Olli Järvinen lupautui varajohtajakseni. Kilpailun järjestelyt vaativat majoituksen ja kilpailutilojen järjestämisen lisäksi webkameroiden asentamista ja Zoomin käyttöä, jotta kilpailun järjestäjät pystyisivät valvomaan kilpailua kussakin maassa etänä Pietarista. Lisäksi jokaiseen maahan järjestettiin ulkopuolinen tarkkailija valvomaan, että kaikki sujuu hyvässä järjestyksessä. Suomen valvojaksi valittiin Kaie Kubjas. Kaksi ensimmäistä valintaamme tekniseksi tueksi sairastuivat flunssaan juuri ennen kilpailuja, mutta Antti Laaksonen lupautui hommaan varsin lyhyellä varoitusajalla. Suomen kilpailijoiksi olimme valinneet seuraavat kuusi oppilasta: Juho Arala, Daniel Arone, Asla Heiskanen, Hermann Huhtamäki, Roope Salmi ja Sampo Siitonen.

Ennen kilpailuja tuli useita pieniä järjestelytehtäviä

lyhyellä varoitusajalla. Näistä haastavin oli valmistella lyhyt esittelyvideo avajaisseremoniaan. Pyysin kilpailijoita ja varajohtajaani lähettämään muutaman sekunnin videon itsestään kahden päivän sisällä. Osalta kilpailijoista, joilta en saanut videota, otin profiilikuvan ja pääsin ensimmäistä kertaa elämässäni harjoittelemaan videon editointia. Olisin kaivannut joihinkin asioihin vähän enemmän varoitusaikaa, mutta järjestelijöillä Pietarissa oli varmasti kädet täynnä töitä ja ongelmat olivat pieniä esimerkiksi verrattuna vuoden 2018 Pan-afrikkalaisiin matematiikkaolympialaisiin (PAMO), jolloin saavuttuani Nairobiin koordinaattoriksi sain kuulla, että kilpailut on peruttu odottamattomien ongelmien takia; kilpailut onnistuttiin kuitenkin järjestämään, mutta se on oma tarinansa.

Koska osa oppilaistamme oli jo valmistunut lukiosta keväällä ja heillä oli muita velvollisuuksia, pyrimme pitämään kilpailuun varatut päivät minimissä. Jotkut oppilaistamme joutuivatkin tekemään erityisjärjestelyjä päästäkseen osallistumaan kilpailuihin. Yleensä osallistumme ennen kilpailua yhteispohjoismaiseen valmennusleiriin Tanskassa. Tänä vuonna valmennusleiri peruttiin, mutta suurin osa oppilaistamme onnistui osallistumaan juuri ennen matematiikkaolympialaisia virtuaalisesti perinteiseen Viikinkien taisteluun, jossa oppilaat ratkovat tehtäviä, jotka ovat matematiikkaolympialaisten tasoa.

Kilpailupäivät olivat maanantaina 21.9. ja tiistaina 22.9. Järjestimme virallisen valvojan Kaien kanssa kaiken valmiiksi kilpailua varten, ja tekninen tukemme Antti tuli laittamaan Zoomin ja web-kamerat valmiiksi.

Kilpailijoille oli järjestetty eväitä kilpailun ajaksi. Järjestelyt onnistuivat hyvin, vaikka ratkaisujen skannaukseen menikin odotettua pitempi aika. Kilpailun jälkeen oli varattu tavallista enemmän päiviä koordinoitiin, koska se tehtiin etänä. Kilpailuja varten oli tehty matematiikkaolympialaisten sivuille uusia toimintoja, joiden kautta esim. kommunikointi koordinaattoreiden kanssa hoidettiin. Pääosin pisteiden koordinoitiin hoidettiin viesteillä, mutta tarvittaessa järjestettiin video puheluja. Osa toiminnoista, joita kilpailujen järjestämiseksi tehtiin, tulee mahdollisesti jäämään käyttöön tulevana vuosina.

Kilpailun tulokset

Kilpailujen ensimmäisen päivän jälkeen pistetilanne ei näyttänyt kovin hyvältä. Ensimmäiseen tehtävään oli muutama varteenotettava ratkaisuyritys, mutta pitkällisten tutkimusten jälkeen varajohtajani Olli tuli siihen tulokseen, että niistä vain yksi oikeasti toimii. Tehtävään kaksi tuli yksi oikea ratkaisu, ja tehtävästä kolme ei saatu yhtään pistettä. Kilpailun toinen päivä sujui kuitenkin huomattavasti paremmin, ja tehtävästä neljä tuli neljä täyttä ratkaisua ja yksi lähes täysi ratkaisu. Lisäksi tehtävän viisi ratkaisi kolme oppilasta. Yhteensä Suomi sai 81 pistettä ja pääsi sijalle 60. Asla Heiskanen sai hopeamitalin 29 pisteellä, Juho Arala pronssimitalin 16 pisteellä ja Hermann Huhtamäki, Roope Salmi ja Sampo Siitonen kunniamaininnat. Varajohtajani Ollin, joka sai kilpailijana vuonna 2019 prosentuaalisesti parhaan tuloksen ikinä Suomen osalta ja hopeamitalin, piti tarkistaa, saiko Asla häntä paremman tuloksen. Asla sai prosentuaalisesti laskettuna Suomen osalta kolmanneksi parhaan tuloksen tähän mennessä. Suomella on kyllä yksi kultamitalikin, mutta kyseinen tulos jää prosentuaalisesti laskettuna Ollin ja Aslan perään.

Lisäksi haluan mainita, että yksi oppilaistani, joita opeitin latvialaisen ystäväni Filips Jelisejevsin kanssa Ghanassa kesällä 2018, Roni Edwin, sai pronssimitalin tämän vuoden matematiikkaolympialaisissa 19 pisteellä. Ghana on osallistunut matematiikkaolympialaisiin vasta vuodesta 2014 lähtien ja tämä oli ensimmäinen vuosi, kun ghanalainen oppilas sai näistä kilpailuista mitalin. Lisäksi Ronin tulos oli paras tulos Saharan eteläpuolisessa Afrikassa. On hienoa nähdä kilpailujen osalta melko uuden maan kehittyvän taidoissaan.

Vuoden 2021 matematiikkaolympialaiset piti aluksi järjestää Yhdysvalloissa, mutta he joutuivat koronan vuoksi perumaan kilpailun isäntinä toimimisen. Venäjä lupasi järjestää myös ensi vuoden kilpailut, vaikka tällä hetkellä ei vielä ole tietoa, järjestetäänkö kilpailut Pietarissa paikan päällä, virtuaalisesti vai jonkinlaisena hybridiratkaisuna.

Kilpatehtävät

Kilpailun virtuaalisen luonteen vuoksi tehtävänvalintakomitea valitsi tehtävät normaalin joukkueenjohtajista koostuvan tuomariston sijasta. Tulosten perusteella voisi sanoa, että komitea onnistui hyvin tehtävässään, sillä tehtävien vaikeustaso on ollut sopiva. Kilpailussa on kumpanakin päivänä kolme tehtävää, joita on aikaa ratkoa neljä ja puoli tuntia.

Tehtävä 1. Tarkastellaan konveksia nelikulmiota $ABCD$. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä. Seuraavat suhteet pätevät:

$$\begin{aligned}\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA &= 1 : 2 : 3 \\ &= \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.\end{aligned}$$

Osoita, että seuraavat kolme suoraa kohtaavat samassa pisteessä: Kulmien $\angle ADP$ ja $\angle PCB$ sisäiset puolittajat ja janan AB keskinormaali.

Tehtävä 2. Reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat ehdot $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ja $a + b + c + d = 1$. Osoita, että

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Tehtävä 3. Meillä on $4n$ kiveä, joiden painot ovat $1, 2, 3, \dots, 4n$. Jokainen kivi on väritetty yhdellä n väristä ja kunkin värisiä kiviä on neljä kappaletta. Osoita, että voimme järjestää kivet kahteen kasaan siten, että kumpikin seuraavista kahdesta ehdosta toteutuu:

- Kumpikin kasa painaa yhtä paljon.
- Kummassakin kasassa on kaksi kiveä kutakin väriä.

Tehtävä 4. On annettu kokonaisluku $n > 1$. Vuoren rinteellä on n^2 asemaa, joista kaikki ovat eri korkeuksilla. Kumpikin kahdesta köysiratayhtiöstä, A ja B , operoi k :ta gondolia; jokainen gondoli mahdollistaa siirtymisen yhdeltä asemalta korkeammalla olevalle asemalle (ilman välipysähdyksiä). Yhtiön A k :lla gondolilla on k eri aloituspistettä ja k eri päätepistettä, ja gondoli, joka aloittaa korkeammalta, myös päättyy korkeammalle. Yhtiön B gondoleille pätee sama ehto. Sanomme, että kaksi asemaa ovat yhdistettyjä yhtiön toimesta, jos henkilö voi aloittaa alemmalla asemalta ja päättyä ylemmälle käyttämällä yhtä tai useampaa yhtiön gondolia (muuta siirtoja asemien välillä ei ole sallittu).

Määritä pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku k , jolle voidaan taata, että on olemassa kaksi asemaa, jotka ovat yhdistettyjä kummankin yhtiön toimesta.

Tehtävä 5. Pakassa on $n > 1$ korttia. Jokaiseen korttiin on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pakalla on sellainen ominaisuus, että kunkin korttiparin aritmeettinen keskiarvo on myös joidenkin yhden tai useamman kortin geometrinen keskiarvo.

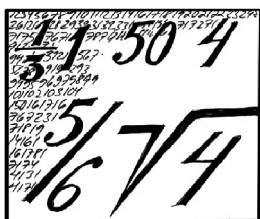
Mille luvuille n tästä seuraa, että luvut kaikissa korteissa ovat samoja?

Tehtävä 6. Osoita, että on olemassa positiivinen vakio c siten, että seuraava väite pitää paikkansa: Tarkastellaan kokonaislukua $n > 1$ ja sellaista tasolla olevaa n pisteen joukkoa S , että minkä tahansa kahden joukossa S olevan pisteen välinen etäisyys on vähintään 1. Tällöin on olemassa suora ℓ , joka jakaa joukon S siten, että etäisyys mistä tahansa pisteestä joukossa S

suoraan ℓ on vähintään $cn^{-1/3}$.

(Suora ℓ jakaa pistejoukon S , jos jokin jana, joka yhdistää kaksi joukon S pistettä, leikkaa suoran ℓ .)

Huomautus. Heikommasta tuloksesta, jossa $cn^{-1/3}$ korvataan termillä $cn^{-\alpha}$, voidaan antaa pisteitä riippuen vakion $\alpha > 1/3$ arvosta.



Raja-arvo ei aina käyttäydy niin kuin luulisi

Simo K. Kivelä

Funktion raja-arvo

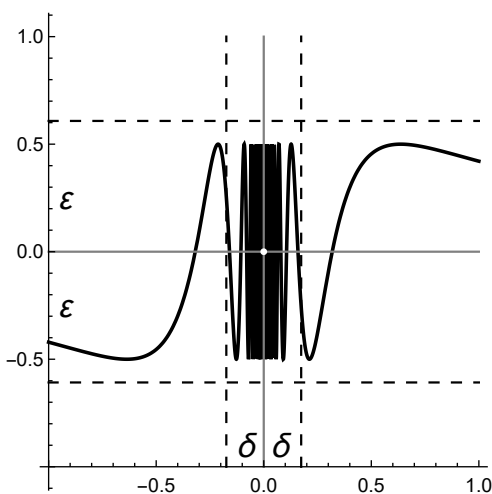
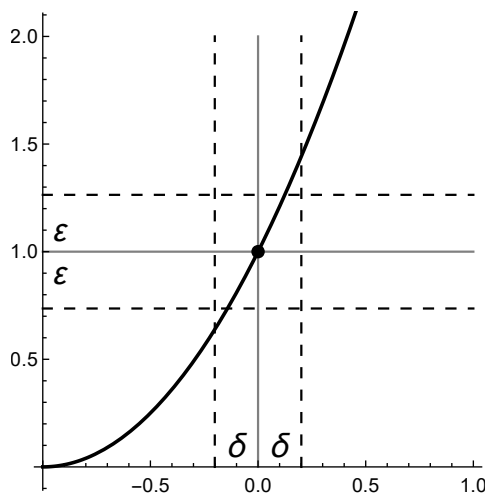
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

luonnehditaan usein sanomalla, että funktion arvot $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua b kuin halutaan, kunhan muuttujan x arvot viedään riittävän lähelle lukua a . Tavoitteena on luoda asiasta mielikuva, mutta varsinaiseksi määritelmäksi tämä ei oikein kelpaa.

Täsmällisyyteen pyrkivä määritelmä käyttää usean aloittelevan matematiikan opiskelijan kammoamia kreikkalaisia kirjaimia epsilon ja delta, ε ja δ . Matematiikan pitkään historiaan verrattuna määritelmä on nuori, 1800-luvulta. Kuvan piirtäminen auttaa määritelmän ymmärtämisessä eikä se lopulta ole kovin ihmeellinen, joskin edellyttää usein hieman uutta ajattelutapaa. Siis:

Funktion f raja-arvo pisteessä a on b , merkitään $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, jos jokaista positiivilukua ε kohden on olemassa positiiviluku δ siten, että $|f(x) - b| < \varepsilon$, kun $0 < |x - a| < \delta$.

Merkintä $0 < |x - a|$ on hieman hämäävä, koska itseisarvo ei kuitenkaan voi negatiivinen olla. Tätä ei olekaan tarkoitus korostaa, vaan ilmaista, että yhtäsuuruus ei tule kysymykseen, ts. ei saa olla $x = a$. Ei siis tarkastella lainkaan funktion f arvoa pisteessä a eikä sen edes tarvitse olla määritetty tässä pisteessä. (Tarkkaan ottaen määritelmään pitäisi lisätä, että huomioon otetaan vain ne pisteet x , joissa funktio on määritetty. Tätä ei kuitenkaan kannata liikaa miettiä pyrittäessä ymmärtämään määritelmän idea.)



Ylemmässä kuvassa on $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (musta piste). Vaakasuorat katkoviivat rajaavat alueen, jossa funktion arvot ovat enintään epsilonon etäisyydellä raja-arvosta 1. Pystysuorat katkoviivat alueen, jossa argumentti x on enintään deltan etäisyydellä tarkastelupisteestä 0. Kuvan mukainen delta ei kelpaa vastaamaan vaakasuorien katkoviivojen epsilona, mutta pienentämällä deltaa päästään tilanteeseen, jossa vastaavat funktion arvot ovat vaakasuorien katkoviivojen välissä. Näin käy, valitaanpa epsilon millaiseksi tahansa.

Alemmassa kuvassa tutkitaan, onko $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (valkoinen piste). Kuvan tilanteessa epsilona vastaava delta on löytynyt. Itse asiassa deltalle kävisi mikä tahansa arvo. Jokaiselle epsilonille pitäisi kuitenkin löytää jokin sitä vastaava delta, mutta tämä ei onnistu, jos epsilon on < 0.5 . Tämä merkitsee, että raja-arvo ei ole 0, eikä sitä itse asiassa ole olemassakaan.

Yhdistetyn funktion raja-arvo

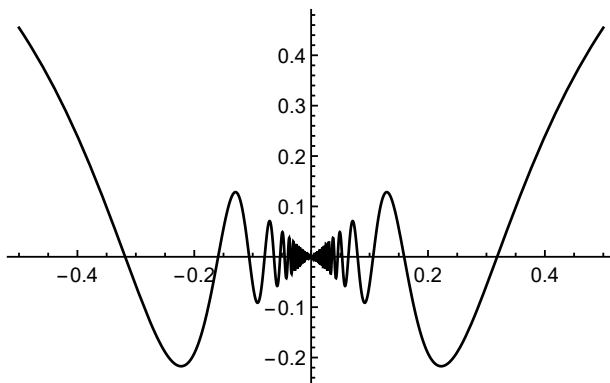
Alussa esitetty raja-arvon luonnehdinta antaa aiheen uskoa, että jos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c,$$

niin myös

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

Jos siis x lähestyy a :ta, niin $g(x)$ lähestyy b :tä ja tällöin $f(g(x))$ lähestyy c :tä. Tämä pitäisi tietenkin todistaa epsilon-delta-määritelmään perustuen eikä vain luottaa intuitioon. Jos taas lausuma ei olekaan oikea, sen kaatamiseen riittää yksi vastaesimerkki.



Olkoon g oheisen kuvan mukainen funktio, $g(x) = x \sin(1/x)$. Tämä ei ole määritelty origossa, jossa raja-arvoa tarkastellaan, mutta sen ei tarvitsekaan olla. Koska

$$|x \sin(1/x)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|,$$

on

$$|g(x) - 0| < \varepsilon, \text{ jos } 0 < |x - 0| < \varepsilon = \delta.$$

Epsilonia vastaava delta on siis sama kuin epsilon itse, ja raja-arvo origossa on 0.

Funktion f arvo origossa olkoon $f(0) = 1$, muutoin olkoon $f(x) = 0$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Millainen sitten on yhdistetty funktio $f(g(x))$? Se saa samoja arvoja kuin ulkofunktio f , ts. 0 ja 1. Jos $g(x) = 0$, arvo on 1, muutoin se on 0. Funktiolla g on äärettömän paljon nollakohtia, jotka kasautuvat origoon (kuvan mukaisesti; lukija laskekoon nollakohdat tarkemmin). Tällöin yhdistetty funktio saa jokaisella välillä $] - \delta, \delta[$ sekä arvoja 1 että arvoja 0. Näin ollen yhdistetyllä funktiolla ei ole raja-arvoa origossa eikä yhdistetyn funktion raja-arvoa koskeva otaksuma ainakaan tässä tapauksessa päde.

Voisi tietenkin ajatella, että otaksuma olisi voimassa siinä tapauksessa, että yhdistetyllä funktiolla on raja-arvo. Näinkään ei ole, mikä nähdään tarkastelemalla yhdistettyä funktiota $f \circ f$, ts. lauseketta $f(f(x))$. Jos nimittäin $x \neq 0$, on $f(x) = 0$ ja siis $f(f(x)) = 1$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = 1$.

Luonnolliselta tuntuva lausuma yhdistetyn funktion raja-arvosta ei siis näytä olevan totta ainakaan yleisesti. Itse asiassa se on kyllä melkein totta, mutta tarvitaan yksi lisäoletus: ulkofunktion pitää olla jatkuva. Tämän todistaminen jääköön harjoitustehtäväksi lukijalle. Vihjeen saa vaikkapa artikkelin lopussa mainittavista ranskankielisistä dokumenteista, joiden lukemisessa ei kovin paljoa ranskan taitoa tarvita. Matemaattinen notaatio on kansainvälistä.

Mitä Wikipedia sanoo

Suomenkielinen raja-arvoa käsittelevä Wikipedia-artikkeli esittää yhdistettyä funktiota koskevan lausuman totena. Englanninkielisen ja saksankielisen mukaan lausuma ei pidä paikkaansa ja vastaesimerkkikin esitetään. Ranskankielisen mukaan lausuma pätee.

Mistä tässä on kysymys? Eikö Wikipedia-artikkeleihin voi luottaa?

Lähdekritiikki on tietenkin aina paikallaan ja kaikki inhimillinen toiminta on virhealtista. Tässä on kuitenkin kyse hieman muustakin. Suomenkielisessä artikkelissa on yksinkertaisesti virhe. Englannin-, saksan- ja ranskankieliset ovat omassa kontekstissaan oikein. Englannin- ja saksankielisillä on nimittäin sama raja-arvon määritelmä kuin Suomessa käytetty (ja edellä esitetty), mutta Ranskassa on – ainakin aika yleisenä – tapana määritellä hieman toisin:

Funktion f raja-arvo pisteessä a on b , merkitään $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, jos jokaista positiivilukua ε kohden on olemassa positiiviluku δ siten, että $|f(x) - b| < \varepsilon$, kun $|x - a| < \delta$.

Erona on, että määrittelyehdon $|f(x) - b| < \varepsilon$ tulee päteä myös, jos $x = a$. Jos tulee olla $|f(a) - b| < \varepsilon$ millä tahansa positiiviluvulla ε , tulee välttämättä olla $f(a) = b$ (jos a kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon). Funktion f pitää siten olla jatkuva pisteessä a . (Jos f ei ole määritelty pisteessä a , sen määrittely voidaan laajentaa pisteeseen a asettamalla $f(a) = b$, jolloin saadaan jatkuva funktio.)

Ranskassa raja-arvon olemassaololta vaaditaan siis hieman enemmän, jolloin ehdot täyttäviä tapauksia on vähemmän ja näille yhdistettyjä funktioita koskeva tulos pätee.

Eikö matematiikka sitten olekaan universaalia, kaikkialla samanlaista? Ei tässä mielessä. Määritelmissä voi olla eroja. Periaatteessa tämä ei ole sen kummallisempaa, kuin että toisinaan pienimpänä luonnollisena lukuna pidetään ykköstä, toisinaan nollaa (kuten matemaattisten merkintöjen standardi tekee). Uutta kirjaa luettaessa onkin syytä katsoa, millaisia määritelmiä siinä käytetään. Ainakin kriittisissä tapauksissa, mitä ne sitten ovatkin.

Wikipedia-artikkelit

suomenkielinen:

https://fi.wikipedia.org/wiki/Funktion_raja-arvo

englanninkielinen:

https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function

saksankielinen:

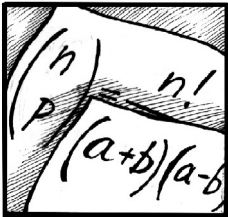
[https://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_\(Funktion\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_(Funktion))

ranskankieliset:

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_\(math%C3%A9matiques_%C3%A9l%C3%A9mentaires\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_(math%C3%A9matiques_%C3%A9l%C3%A9mentaires))

https://fr.wikipedia.org/wiki/Op%C3%A9rations_sur_les_limites

https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/Limites



Solmun tehtäviä korona-ajankuluksi

Tehtävät I

Nämä tehtävät sopivat lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille.

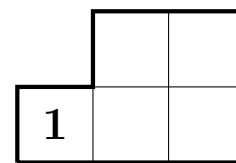
I.1. Kumpulan Pallo teki jalkapalloturnauksen neljässä ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajina olleet joukkueet tekivät Kumpulan Palloa vastaan pelatesaan yhteensä kaksi maalia. Voitosta saa kolme pistettä, tasapelistä saa yhden pisteen ja tappiosta ei saa yhtään pistettä. Kuinka monta pistettä Kumpulan Pallola on mahdollista olla pelattujen neljän pelin jälkeen?

I.2. Roope-robotti on suljettu huoneeseen, joka on ruudutettu tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi. Roope kulkee suoraan yhteen suuntaan, kunnes törmää seinään. Silloin hän kääntyy oikealle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos oikealla on seinä ja hän ei voi kääntyä oikealle, niin hän kääntyy vasemmalle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos hän ei voi kääntyä oikealle eikä vasemmalle, hän pysähtyy ja jää kyseiseen ruutuun.

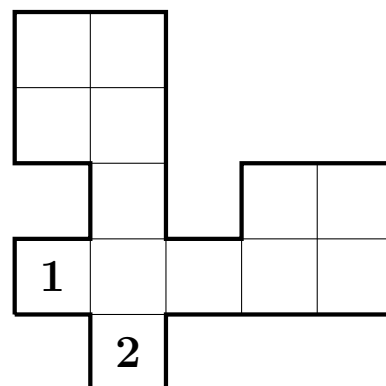
Kuvassa 1 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 hän kiertää koko huoneen ja päätyy takaisin ruutuun 1, johon pysähtyy. Kuvassa 2 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 tai ruudusta 2 hän päätyy takaisin lähtöruutuun ja pysähtyy siihen. Kuvassa 3 on huone, jossa Roopen lähtiessä ruudusta 1 hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen, ja lähtiessään ruudusta 2 hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen.

Piirrä huone, jossa on neljä aloitusruutua: Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 1, hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 2, hän päätyy ruutuun 3 ja pysähtyy siihen. Jos Roope

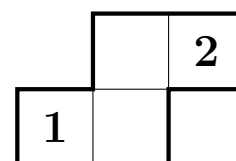
lähtee liikkeelle ruudusta 3, hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 4, hän päätyy takaisin ruutuun 4 ja pysähtyy siihen.



Kuva 1.

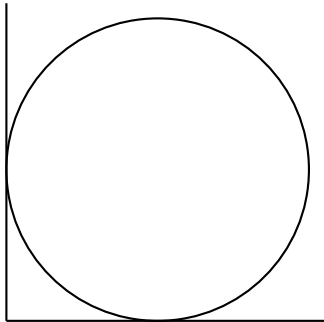


Kuva 2.

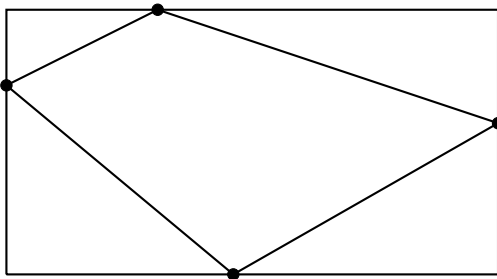


Kuva 3.

I.3. Pyöreä pöytä on huoneen kulmassa, katso kuva. Pöydän halkaisija on 170 cm. Pöydän reunassa oleva kohta on 10 cm etäisyydellä kuvassa vaakasuorassa olevasta seinästä. Laske kohdan etäisyys kuvassa pystysuorassa olevasta seinästä.



I.4. Suorakulmion jokaiselta sivulta valitaan yksi piste ja vierekkäisten sivujen pisteet yhdistetään toisiinsa janalla. Millä ehdolla muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta? Alla esimerkiksi kuva tilanteesta.

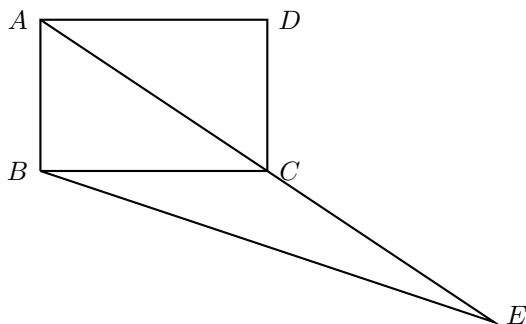


I.5. Korvaa lausekkeessa

$$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ 6 \circ 7 \circ 8 \circ 9 = 100$$

jokainen ympyrä $\circ$ jonkin peruslaskutoimituksen symbolilla niin, että yhtälö pätee. Sulkeitä ei saa käyttää.

I.6. Suorakulmion $ABCD$ sivun AB pituus on 2 ja sivun AD pituus on 3. Janat AC ja CE ovat yhtä pitkiä, katso kuva. Mikä on jana BE pituus?



I.7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 2.$$

I.8. Yhtiön vuoden 2019 tulot kasvoivat 25 % ja menot kasvoivat 15 % edellisvuoteen verrattuna. Yhtiön voitto (= tulot – menot) kasvoi 40 %. Kuinka suuri osuus yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019?

I.9. Kuusi korttia numeroidaan yhdestä kuuteen ja sekoitetaan. Kolme korttia nostetaan peräkkäin ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu kolmen luvun jono on kasvava?

Tehtävät II

Nämä tehtävät ovat lukion pitkän matematiikan oppilaille.

II.1. Reaaliluvulle x pätee $x + \frac{1}{x} = 5$. Määritä lukujen $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ tarkat arvot.

II.2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

II.3. Määritä peräkkäiset kokonaisluvut, joiden summa on 100.

II.4. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{3} \leq \frac{x + y}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

pätee kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y .

II.5. Heitetään kolikkoa 10 kertaa peräkkäin. Jos saadaan kruuna, niin kirjoitetaan paperille numero 2. Jos saadaan klaava, niin kirjoitetaan paperille numero 3. Numerot kirjoitetaan peräkkäin arpomisjärjestyksessä. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu 10-numeroinen luku on jaollinen luvulla (a) 3, (b) 4?

II.6. Millä vakion c arvoilla yhtälöllä

$$x^2 - 2 \left| x + \frac{1}{4} \right| + c = 0$$

on täsmälleen kolme ratkaisua?

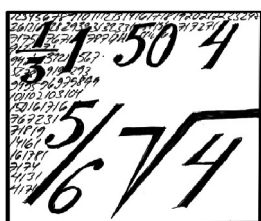
II.7. Mikä on luvun

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{n}$$

desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero (siis ensimmäinen numero pilkun jälkeen)?

Tehtävien ratkaisut julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa.

Lähde: KöMaL



Alkulukuja ja yhdistettyjä lukuja – ylioppilastehtävä yleistyksineen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Helsingin yliopisto

Tämän syksyn ylioppilaskokeessa tehtävässä 9 piti osoittaa, että on olemassa 1000 000 peräkkäistä yhdistettyä lukua, ja ohjeistukseksi annettiin hyödyntää lukua $1000\,001! + 2$:

Osoita lukua $1000\,001! + 2$ käyttämällä, että on olemassa miljoona peräkkäistä kokonaislukua, joista yksikään ei ole alkuluku.

Ratkaisu. Huomataan, että koska kertomassa $1000\,001!$ on tekijöinä kaikki positiiviset luvut $2, 3, \dots, 1000\,001$, on se jaollinen millä tahansa luvuista $2 \leq k \leq 1000\,001$. Siispä

$$k \mid (1000\,001! + k)$$

kaikilla $2 \leq k \leq 1000\,001$, eli luvut $1000\,001! + 2, 1000\,001! + 3, \dots, 1000\,001! + 1000\,001$ ovat miljoona peräkkäistä yhdistettyä lukua.

Vastaavasti voidaan itse asiassa löytää n peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole alkuluku millä tahansa positiivisella n . Jos $n = 1$, on tilanne kovin mielenkiinnoton. Yksittäisiä yhdistettyjä lukuja kyllä löytyy. Keskitytään siis tapaukseen, jossa $n \geq 2$. Tarkastellaan lukua $(n+1)! + k$, kun $2 \leq k \leq n+1$. Koska luvussa $(n+1)!$ on luku k tekijänä, on summa $(n+1)! + k$ kahden luvulla k jaollisen luvun summana jaollinen luvulla k .

Äärettömästi alkulukuja

Ehkäpä yllättävää, mutta melkein samasta lähtökohdasta voi myös todistaa, että alkulukuja on äärettömän paljon. Klassinen todistus alkulukujen määrän äärettömyydelle on seuraava: Tehdään vastaoletus, että alkulukuja onkin vain äärellinen määrä, ja alkuluvut ovat $p_1, p_2, \dots, p_k$. Nyt luku $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ on suurempi kuin yksikään listan alkuluvuista. Lisäksi se ei voi olla jaollinen millään listan alkuluvuista, sillä luku $p_1 p_2 \cdots p_k$ on jaollinen kaikilla listan alkuluvuista, ja jos myös luku $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ olisi jaollinen esimerkiksi alkuluvulla p_j , niin myös näiden lukujen erotus

$$(p_1 p_2 \cdots p_k + 1) - p_1 p_2 \cdots p_k = 1$$

olisi jaollinen sillä. Ykkönen ei tunnetusti ole jaollinen millään alkuluvulla, joten tästä tulee ristiriita. Luku $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ ei siis ole jaollinen millään listan alkuluvuista, ja on täten joko itse alkuluku tai jaollinen jollain alkuluvulla, joka ei ole listalla. On siis todistettu, että alkulukuja on ääretön määrä.

Jos nyt oletettaisiinkin, että kaikki alkuluvut ovat korkeintaan luvun n suuruisia, niin tarkastelemalla lukua $n! + 1$ saataisiin vastaava ristiriita: Jos jokin alkuluku $p \leq n$ jakaisi luvun $n! + 1$, niin koska se jakaa myös luvun $n!$, niin sen pitäisi jakaa myös näiden lukujen erotus $n! + 1 - n! = 1$. Tämä ei ole mahdollista. Siispä joko

luku $n! + 1$ on alkuluku tai jaollinen jollain alkuluvulla, joka on suurempi kuin n .

Kumpi tahansa skenaario on itse asiassa mahdollinen. Tämä nähdään hyvin pienillä erikoistapauksilla:

$$4! + 1 = 25 = 5 \cdot 5$$

ja

$$3! + 1 = 7,$$

joka on alkuluku.

Tulosten tehokkuus

Käytännössä olemme todistaneet, että jos n on alkuluku, niin viimeistään luvun $n! + 1$ on oltava alkuluku sekä että jos halutaan löytää n peräkkäistä yhdistettyä lukua, niin viimeistään nämä löytyvät lukujen $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + (n+1)$ joukosta.

Ensimmäinen näistä tuloksista on auttamatta tehoton. Tämän toteamiseksi riittää vedota Bertrandin postulaattiin, jonka mukaan luvun n ja $2n$ välillä on aina alkuluku, kun $n \geq 2$. Tulos ei välttämättä ole lukijalle tuttu, mutta sille on itse asiassa olemassa (ja helposti verkosta löydettävissä) varsin alkeellinen ja lyhyt todistus, joka ensisijaisesti nojautuu lähinnä binomikertoimien suuruusluokkatarkasteluihin. Melko vähällä vaivalla (tosin huomattavasti suuremmalla kuin tämän ylioppilaskoetehtävän ratkaisun vaatimalla) saadaan valtavasti parempi tulos.

Peräkkäisten yhdistettyjen lukujen kanssa ollaan ehkäpä hieman mielekkäämmässä suuruusluokassa. Alkulukulauseen mukaan nimittäin tiedetään, että korkeintaan luvun n suuruisia alkulukuja on suurin piirtein

$\frac{n}{\ln(n)}$ kappaletta, kun n on suuri. Tämä siis tarkoittaa sitä, että lukuun n mennessä luvuista keskimäärin joka $\ln(n)$. luku on alkuluku, eli suomeksi sanottuna, keskimäärin $\ln(n)$ lukua peräkkäin on jotain muuta kuin alkulukuja, ja sitten tulee alkuluku. Tämä ei tietenkään ole koko totuus. Ensinnäkin alkuluvut keskimäärin harventuvat. Toisekseen, alkuluvut eivät ole säännöllisesti tasaisin välein. Kuitenkin kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla tämä tarkoittaa sitä, että noin lukuun n mennessä on ollut peräkkäiset noin $\ln n$ lukua (intuitiivisesti kyse on siitä, että jos alkuluvut ovat jossain harvakseltaan, niin jossain niitä pitää olla tiheästi, jotta niitä voi olla riittävästi annetussa joukossa), joista yksikään ei ole ollut alkuluku, eli noin lukuun e^n mennessä on ollut peräkkäiset noin n lukua, joista yksikään ei ole ollut alkuluku.

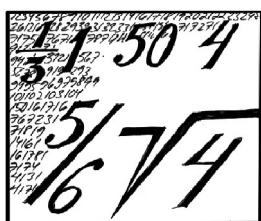
Kertoman suuruusluokka ei välttämättä ole aivan ilmeinen. Tämän arvioinnissa auttaa kuitenkin ns. Stirlingin kaava. Sen perusteella

$$(n+1)! \approx \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)},$$

joka voidaan kirjoittaa eksponenttifunktion avulla muotoon

$$= e^{(n+1) \ln(n+1) - n - 1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi(n+1))}.$$

Tämä luku (joka on listan alkupiste) on toki huomattavasti suurempi kuin e^n . Silti heitto on tässä paljon järkevämpi. Aiemmassa menttiin lineaarisesta kertoman suuruusluokkaan, nyt *vain* eksponentiaalisesta kertoman suuruusluokkaan. Voitto tämäkin.



Differentiaaliyhtälöiden globaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Eeli Tamminen

eeli.tamminen@helsinki.fi

Johdanto

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseet (OY-lauseet) ovat differentiaaliyhtälöiden teorian perustavimpia tuloksia. Nimensä mukaisesti ne takaavat eri differentiaaliyhtälöille – ja erityisesti alkuarvotehtäville – niiden ratkaisun olemassaolon ja sen, että muita ratkaisuja ei ole olemassa, eli saadun ratkaisun yksikäsitteisyyden.

Differentiaaliyhtälöt ovat yhtälöitä, joissa muuttujan sijaan on jonkin ratkaistavan funktion $y(x)$ derivaattoja $y'(x)$, $y''(x)$ jne. Esimerkiksi

$$3y'(x) + x^2 = y(x) + 2x$$

on ensimmäisen kertaluvun (eli siinä on vain ensimmäinen derivaatta) differentiaaliyhtälö. Alkuarvotehtäväksi kutsutaan differentiaaliyhtälöä, jonka lisäksi on annettu ratkaistavan funktion arvo joissain pisteessä, kuten esimerkiksi $y(1) = -\frac{1}{3}$.

OY-lauseita on erilaisille differentiaaliyhtälöille sekä differentiaaliyhtälösystemeille. Tässä artikkelissa rajoitutaan tarkastelemaan ensimmäisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtäviä, eli yhtälöitä muotoa

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ ja } y(x_0) = y_0. \quad (*)$$

OY-lauseita voidaan ajatella olevan kahta eri tyyppiä: globaali ja lokaali. Lokaali OY-lause koskee differenti-

aaliyhtälön ratkaisua jollain reaalivälillä $I \subset \mathbb{R}$. Tämän vastine koko reaalivälille $\mathbb{R}$ on globaali OY-lause.

Lähteessä [1] on esitetty yksityiskohtaisesti lokaalin OY-lauseen todistus ja pääkohdiltaan globaalin tapauksen todistus. Tässä artikkelissa esitetään yksityiskohtaisesti globaalin OY-lauseen todistus. Lauseen lokaali vastine oletetaan tunnetuksi. Tämän todistus on rakenteltaan samanlainen kuin globaalin tapauksen. Seuraavaksi on vielä esitetty lokaali OY-lause:

Lause 1. *Olkoon $(x_0, y_0) \in E \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon funktio $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja toteuttakoon se lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta.*

Tällöin on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että alkuarvotehtävällä $()$ on ratkaisu $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ välillä $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.*

Olkoon y_2 myös alkuarvotehtävän ratkaisu. Ratkaisuille y_1 ja y_2 pätee $(x, y_k(x)) \in E$, missä $k = 1, 2$. Nyt $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in I_1 \cap I_2$.

Esitietoja

Ennen globaalin OY-lauseen todistusta esitetään vielä joitain hyödyllisiä aputuloksia.

Määritelmä 1. Olkoon $H \subset \mathbb{R}^2$. Sanotaan, että funktio $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ on *tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen*, jos on olemassa sellainen $M \geq 0$, että kaikilla $(x, y_1), (x, y_2) \in H$ on voimassa

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|(x, y_1) - (x, y_2)|.$$

Määritelmä 2. Olkoon $g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Olkoon funktiot $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{N}$, jatkuvia ja $x_0 \in I$. *Picardin iteroinniksi*¹ kutsutaan jonoa integraaleja

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0, \\ f_1(x) &= \int_{x_0}^x g(t, f_0(t)) dt + f_0, \\ &\vdots \\ f_{n+1}(x) &= \int_{x_0}^x g(t, f_n(t)) dt + f_0, \end{aligned}$$

missä $(x, f_n(x)) \in E \times \mathbb{R}$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1. Olkoon väli $I \subset \mathbb{R}$ ja $a_n \geq 0$ sellaisia, että $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Olkoot funktiot $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, sellaisia, että kaikilla $x \in I$ pätee $|u_{n+1} - u_n| \leq a_n$. Tällöin funktiojono (u_n) suppenee tasaisesti² kohti funktiota $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja kaikilla $x \in I$ on voimassa

$$u(x) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)).$$

Todistus. Olkoon $x \in I$ ja $\varepsilon > 0$. Funktiojonon $(u_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jäsenille on voimassa

$$u_n(x) := u_1(x) + \sum_{k=1}^n (u_{k+1}(x) - u_k(x)),$$

kun $n \geq 2$.

Olkoon $n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $n > m$. Nyt

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_m(x)| &= \left| \sum_{k=m}^{n-1} u_{k+1}(x) - u_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} a_k \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} a_k \\ &< \infty. \end{aligned}$$

¹Tämä on eräs numeerisen integroinnin menetelmä.

²Toisin sanoen on voimassa $\sup_{x \in I} |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Vertaa pisteittäiseen suppenemiseen, jossa kaikilla $x \in I$ pätee $|u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Huomaa, että tasainen $\implies$ pisteittäinen suppeneminen, mutta pisteittäinen $\not\implies$ tasainen suppeneminen.

Koska edellinen summa on äärellinen, löytyy sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Nyt

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_k < \varepsilon,$$

eli jono $(u_n(x))$ on Cauchy-jono. Tällöin se suppenee, eli on olemassa rajafunktio $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$. Erityisesti tämä funktio u on, kuten lemmassa määritelty.

Lisäksi kaikilla $n_\varepsilon \geq n$ pätee

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |u_{k-1}(x) - u_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_i \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis suppeneminen on tasaista. $\square$

Globaali OY-lause

Lause 2. Olkoon $[a, b] \subset I$ kompakti ja $I \subset \mathbb{R}$ jokin (mahdollisesti rajoittamaton) väli. Olkoon funktio $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja suorakaiteessa $[a, b] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Olkoon $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotehtävällä (*) on ratkaisu $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että kaikki välin I osaväleillä annetut ratkaisut ovat sen rajoittumia.

Ennen globaalin OY-lauseen varsinaista todistusta tehdään muutamia valmisteluja. Olkoon alkuarvotehtävällä (*) ratkaisu $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nyt analyysin peruslauseella funktiolle y' saadaan

$$\int_c^x y'(t) dt = y(x) - y(c),$$

missä $c \in \mathbb{R}$. Valitaan $c = x_0$. Lisäksi derivaatta y' saadaan ratkaistua (sopivasta) differentiaaliyhtälöstä

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Nyt

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + y(x_0). \quad (1)$$

Derivoimalla ylläoleva integraaliyhtälö saadaan johdettua alkuarvotehtävän (*) kaava, jossa $y(x_0) = y_0$.

Olkoon $[a, b] \subset I$ suljettu väli. Merkitään $K := [a, b] \times \mathbb{R}$. Selvästi alkuarvotehtävän ehdolle $y(x_0) = y_0$ pätee $(x_0, y_0) \in K$. Funktion f normille pätee:

$$\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x, y_0)| > 0, \text{ kun } (x_0, y_0) \in K. \quad (2)$$

Muulloin $f(x) = 0$, kaikilla $x \in [a, b]$. Alkuarvotehtävällä (*) olisi tällöin ratkaisu $y(x) = y_0$, kaikilla $x \in [a, b]$.

Määritelmästä 2 saadaan yhtälölle (1) Picardin iteraatio. Siis

$$y_0(x) = y_0 \text{ ja } y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + y_0,$$

missä funktiot y_n ovat jatkuvia ja $(x_0, y_n(x_0)) \in K$.

Näytetään aluksi, että funktiolle f saadaan Picardin iteraatio: Lauseen 2 määrittelystä tiedetään, että f on jatkuva. Nyt $\int_{x_0}^x f(t, y_n(t))$ on jatkuva, jos y_n on jatkuva. Koska $y_n \rightarrow y$ tasaisesti ja y on jatkuva, niin funktio y_n on jatkuva. [2, s. 249]

Määritelmästä tiedetään, että $x_0 \in [a, b]$ ja $y_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Tällöin $(x_0, y_n(x_0)) \in [a, b] \times \mathbb{R} = K$.

Koska kuvaus $f(x, y)$ on tasaisesti Lipschitz-jatkuva suorakaiteessa K , on sillä Lipschitz-vakio $M \geq 0$. Kuten edellä todettu: Picardin iteraation funktiot y_n sijaitsevat suorakaiteessa K . Tällöin

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}, \quad (3)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [a, b]$.

Sijoitetaan $n = 0$ kaavaan (3), jolloin saadaan arvioksi $|y_1(x) - y_0| \leq \|f\| |x - x_0|$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(x))| dt \\ &\leq \|f\| |x - x_0|. \end{aligned}$$

Siis arvio pätee, kun $n = 0$.

Olkoon $n = m + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} &|y_{(m+1)+1}(x) - y_{m+1}(x)| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{m+1}(x)) - f(t, y_m(x))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x M |y_{m+1}(t) - y_m(t)| dt \\ &= M \int_{x_0}^x |y_{m+1}(t) - y_m(t)| dt. \end{aligned}$$

Toinen ylöspäin arvioiminen nojaa tietoon, että funktio f on Lipschitz. Kun oletetaan, että arvio (3) pätee, kun $n = m$, niin saadaan

$$\begin{aligned} &|y_{(m+1)+1}(x) - y_{m+1}(x)| \\ &\leq M \int_{x_0}^x \frac{M^m \|f\|}{(m+1)!} |t - x_0|^{(m+1)+1} dt \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+1)!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^{m+2} dt \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+1)!} \cdot \frac{(x - x_0) |x - x_0|^{m+1}}{m+2} \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+2)!} |x - x_0|^{m+2}. \end{aligned}$$

Siis kaava (3) on tosi.

Huomataan, että kaikilla $x, x_0 \in [a, b]$ on voimassa $|x - x_0| \leq b - a$. Tämän tiedon ja arvion (3) nojalla saadaan

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} := a_n.$$

Nyt majorantille a_n pätee

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \\ &= \|f\| \left(-M^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{n!} (b-a)^n \right) \\ &= -\frac{\|f\|}{M} + \frac{\|f\|}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} (b-a)^n \\ &= \frac{\|f\|}{M} (e^{M(b-a)} - 1) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus saadaan hyödyntämällä eksponenttifunktion sarjakehitelmää

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nyt voimme soveltaa Lemmaa 1. Siis välillä $[a, b]$ on voimassa

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x)). \quad (4)$$

Funktio y on rajafunktiona jatkuva, sillä funktiot y_n ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen $(x, y(x)) \in K$, kun $x \in [a, b]$.

Varsinainen todistus

Nyt olemme valmiit todistamaan globaalin OY-lauseen. Osoitetaan aluksi ratkaisun olemassaolo. Siis täytyy näyttää, että funktio (4) toteuttaa yhtälön (1).

Olemassaolon todistus. Olkoon y funktio, kuten kohdassa (4). Näytetään, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad (5)$$

kaikilla $x \in I$.

Raja-arvon määritelmällä ja Lipschitz-jatkuvuudella saadaan

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x (t, y_n(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \\ & \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))| dt \\ & \leq \int_{x_0}^x M |y_n(t) - y(t)| dt. \end{aligned}$$

Koska $y_n \rightarrow y$ tasaisesti välillä $[a, b]$, on voimassa $\max_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Nyt hyödyntämällä tätä

$$\begin{aligned} M \int_{x_0}^x |y_n(t) - y(t)| dt & \leq M(x - x_0) \max_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| \\ & \leq M(b - a) \max_{t \in I} |y_n(t) - y(t)| \\ & \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Siis yhtälö (5) on tosi. Tällöin kaikilla $x \in [a, b]$ Picardin iteraatiosta saatu ratkaisu

$$\begin{aligned} y(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right) \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

on alkuarvotehtävän (*) ratkaisu $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Olkoon $[a_n, b_n] \subset I$, missä $n \in \mathbb{N}$, nouseva jono välejä siten, että

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Jos I on suljettu, niin jokin väli $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, sisältää välin I reunan. Jos I on avoin, niin jonon (a_n) on oltava aidosti vähenevä tai (b_n) on oltava aidosti kasvava³. Aiemman nojalla tiedämme, että ratkaisu $y := y_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa.

Olkoon $x_0 \in I$. Erityisesti $x_0 \in [a_n, b_n]$, jollain $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 1 lokaaliin yksikäsitteisyyteen⁴ vedoten ratkaisulla y on olemassa derivaatta välin I sisäpisteessä x_0 tai toispuoleinen derivaatta, jos x_0 on välin I päätepiste. Tällöin funktio y on alkuarvotehtävän (*) ratkaisu koko välillä $I \subset \mathbb{R}$. $\square$

Todistetaan seuraavaksi ratkaisun yksikäsitteisyys.

Yksikäsitteisyyden todistus. Olkoon $y_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$, missä $i \in \{1, 2\}$, kumpikin alkuarvotehtävän ratkaisuja, joille on voimassa $\{(x, y_i(x)) \mid x \in I_i\} \subset K$, $i \in \{1, 2\}$. Pitää näyttää, että nämä kaksi ratkaisua ovat samat, eli arvio (6).

Vastaoletus: olkoon $x \in I_1 \cap I_2$ sellainen, että $y_1(x) \neq y_2(x)$. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $x < x_0$. Nyt on olemassa

$$x_1 = \sup\{x \in I_1 \cap I_2 \mid y_1(x) \neq y_2(x) \text{ ja } x < x_0\},$$

sillä tämä joukko on oletuksien nojalla epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu.

Näytetään, että funktioiden y_1 ja y_2 kuvaajat yhtyvät jossain pisteen x_0 ympäristössä.⁵

Olkoon $\delta > 0$ ja $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I_1 \cap I_2$. Koska funktiot y_1 ja y_2 ovat jatkuvia, niin kaikilla $x \in J$ on voimassa $(x, y_i(x)) \in K$.

Olkoon $x_0 \leq x < x_0 + \delta$. Vastaavasti voidaan osoittaa tilanne $x_0 - \delta < x \leq x_0$. Funktioiden y_1 ja y_2 erotukselle on olemassa arvio

$$0 \leq |y_2(x) - y_1(x)| \leq \frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}, \quad (6)$$

missä $q := \delta \|f\|$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in J$.

Kun $n = 0$, niin

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| & \leq M \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \\ & \leq M \int_{x_0}^x 2q dt \\ & = M \cdot 2q(x - x_0) \\ & \leq \frac{2qM^{0+1}}{(0+1)!} (b-a)^{0+1}. \end{aligned}$$

Siis arvio on tosi, kun $n = 0$. Oletetaan, että arvio (6) on tosi, kun $n = m$. Kun $n = m + 1$ saadaan

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| & \leq M \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \\ & \leq M \int_{x_0}^x \frac{2qM^{m+1}}{(m+1)!} |x - x_0|^{m+1} dt \\ & = \frac{2qM^{(m+1)} + 1}{(m+1)!} \int_{x_0}^x |x - x_0|^{m+1} dt \\ & = \frac{2qM^{(m+1)+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{(m+1)+1} \Big|_{x_0}^x |t - x_0|^{(m+1)+1} \\ & = \frac{2qM^{(m+2)}}{(m+2)!} |x - x_0|^{m+2} \\ & \leq \frac{2qM^{(m+2)}}{(m+2)!} (b-a)^{m+2}, \end{aligned}$$

³Esimerkiksi olkoon $I = (0, 1]$. Määritellään $a_n = (n+1)^{-1}$ ja $b_n = 1$. Nyt $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(n+1)^{-1}, 1]$.

⁴Tämän todistus vastaa globaalin yksikäsitteisyyden todistusta.

⁵Tämä vastaa lokaalin OY-lauseen yksikäsitteisyyden todistamista.

mikä todistaa arvion (6).

Edelleen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = 2qe^{M(b-a)} < \infty,$$

jolloin $\frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \rightarrow 0$, eli $|y_2(x) - y_1(x)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Siis $y_1(x) = y_2(x)$, kun $x \in J$.

Siis kaikilla $x \in]x_1, x_0]$ pätee $y_1(x) = y_2(x)$. Vastaa-
vasti voidaan todistaa, kun $x \in [x_0, x_1[$, eli $x_0 < x$.⁶

Lisäksi funktiot y_1 ja y_2 ovat jatkuvia. Tällöin $y_1(x_1) = y_2(x_1)$, mikä on ristiriita. Siis kaikilla $x \in I_1 \cap I_2$ pätee $y := y_1(x) = y_2(x)$. $\square$

Kaksi esimerkkiä

On hyvä muistaa, että kaikilla differentiaaliyhtälöillä ei välttämättä ole yksikäsitteistä ratkaisua (jos ratkaisu ylipäänsä on olemassa!). Tästä esimerkkinä on alkuarvotehtävä

$$y'(x) = 3y(x)^{\frac{2}{3}} \text{ ja } y(0) = 0.$$

Selvästi funktio $f(x, y) := 3y^{\frac{2}{3}}$ on jatkuva, mutta se ei ole Lipschitz-jatkuva kohdassa $x = 0$.

Esitetään vielä tapaus, jossa globaali OY-lause pätee. Olkoon ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y'(x) + x^2 y(x) = \frac{3}{x^4 + \pi},$$

jolle $y(2) = \pi$. Kyseessä on alkuarvotehtävä.

Olkoon suorakaide $K := [-c, c] \times \mathbb{R}$. Funktio

$$g(x, y) := \frac{3}{x^4 + \pi} - x^2 y$$

on muuttujan y suhteen tasaisesti Lipschitz-jatkuva suorakaiteessa K , sillä

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| = x^2 |y_1 - y_2| \leq c^2 |y_1 - y_2|.$$

Alkuarvotehtävä täyttää siis Lauseen (2) ehdot. Tällöin alkuarvotehtävällä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $y(2) = \pi$. Suorakaiteen K määrittelystä väliksi I saadaan koko reaaliväli $\mathbb{R}$.

Viitteet

- [1] Gyllenberg, Mats; Lamberg, Lasse; Ola, Petri; Piironen, Petteri ja Häsä, Jokke. *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, luentomoniste. Helsingin yliopisto, 2016.
- [2] Harjulehto, Petteri; Klén, Riku ja Koskenoja, Mika. *Analyysiä reaaliluvuilla*. Unigrafia Oy: Helsinki, 2017.

⁶Tämä on esitetty lähteessä [1].

Solmu 3/2020

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Nääänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenranta teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

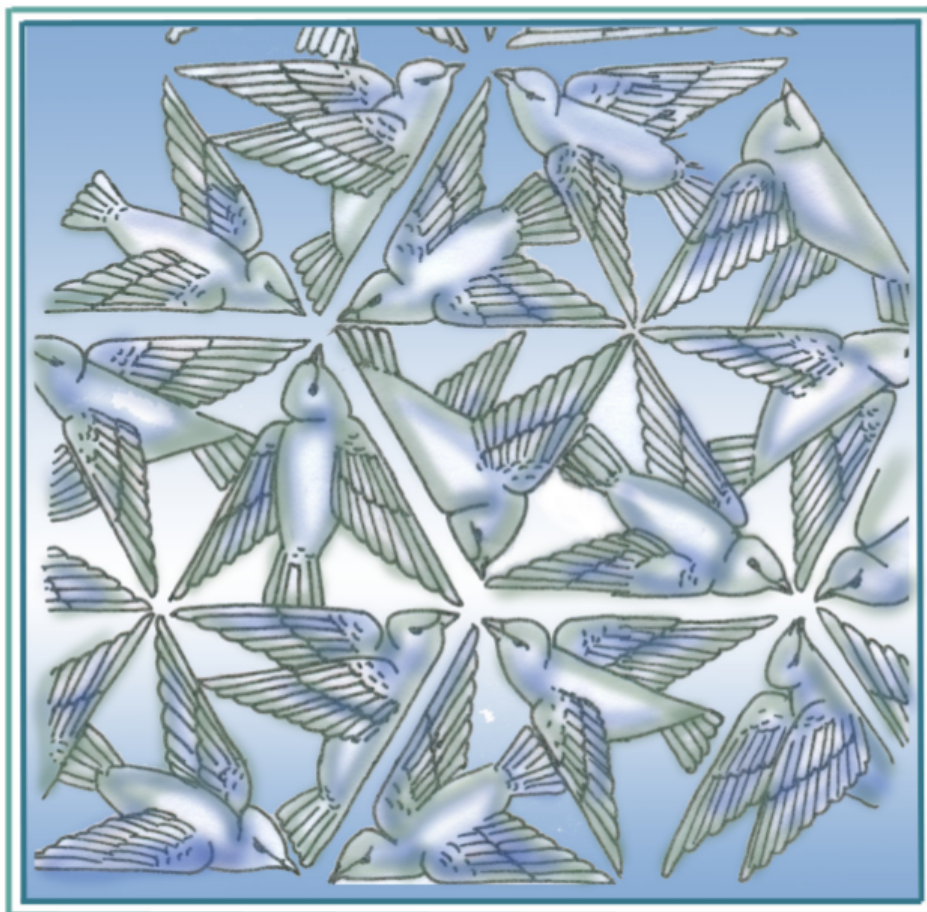
Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Numeroon 1/2021 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.1.2021 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi