SOLMU

MATEMATIIKKALEHTI 2/2020

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys

Pääkirjoitus: Absoluuttisia totuuksia ja kaikkea muuta (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) 3
Suorakulmaisista kolmioista ja matemaatikkojen kommunikaatiosta (Tuomas Korppi) 5
Arkhimedeen vakio, Neperin luku ja imaginaariyksikkö (Markku Halmetoja) 9
Lyhintä reittiä pitkin suurimpaan kulmaan – matkakertomus (Jaska Poranen) 14
EGMO 2020 – haastavia tehtäviä kotoa käsin (Idaliina Kuusisto, Ulrika Kaara, Veera Nurmela, Anni Tapionlinna) 21

Absoluuttisia totuuksia ja kaikkea muuta

Pääkirjoitus

Pyöräilin yhtenä päivänä kotiin tarhalta hyvin vihaisen nelivuotiaan kanssa. Yritin saada hänet jotenkin unohtamaan vihaisuutensa, joten yritin harrastaa jonkinlaista small talkia. Ohitsemme meni pari pientä koiraa. Tiesin lapsen pitävän koirista, joten jotain sanoakseni kysyin: ”Oliko söpöjä pieniä koiria?” Vastaus oli hyvin vihainen. Minulle kerrottiin, että minun ei pitäisi tuollaista kysyä, ja että tuollaista ei saa kysyä, koska pienet koirat ovat aina söpöjä.

Minulle matemaatikkona on tässä nelivuotiaan ehdottomuudessa sekä jotain hyvin tuttua että jotain hyvin vierasta. Automaattisesti oletan päivittäin esimerkiksi, että $1 + 1 = 2$ sitä sen enempää miettimättä. Lisäksi oletan, että yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa, ja että muut kuin yhdensuuntaiset suorat leikkaavat tasan kerran. Nämä jälkimmäiset oletuksethan tulevat geometrian aksioomista, jotka itse asiassa voi hyvinkin kyseenalaistaa. Esimerkiksi pallopinnalla yhdensuuntaiset suorat leikkaavat äärettömyydessä.

Todistettuihin tuloksiin voi periaatteessa suhtautua hyvinkin ehdottomasti. Toisaalta taas niistäkin löytyy joskus virheitä. Tunnettu tapaus on Wilesin todistus Fermat'n suurelle lauseelle. Todistuksesta löytyi virhe melko pian sen julkistamisen jälkeen. Tässä ei ole mitään ihmeellistä, sillä virheet ovat lopulta hyvin yleisiä, ja usein virheet voidaan korjata hyvin helposti. Tämä virhe oli pahempi, mutta loppu oli silti onnellinen: virhe oli korjattavissa ja todistus säästyi.

Toisinaan taas todistuksista löytyy virheitä huomattavan paljon niiden julkaisemisen ja yleisen hyväksymisen jälkeen. Toisinaan nämä virheelliset väitteet todistuksineen ovat päässeet myös oppikirjoihin. Tämä ei missään nimessä tarkoita sitä, että jokaisen kirjan jokaiseen väitteeseen ja jokaiseen todistukseen pitäisi suhtautua suurella epäilyksellä, vaan lähinnä sitä, että erehtyminen todellakin on inhimillistä, ja vaikka kuinka yritettäisiin virheitä välttää, joskus niitä sattuu ja joskus, vielä harvemmin, niitä ei huomata kovin nopeasti.

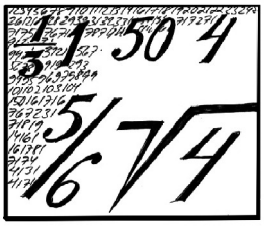
Mielenkiintoinen oma kategoriansa ovat tulokset, joihin uskotaan, mutta joita ei ole saatu todistettua. Eräs kuuluisa esimerkki on Riemannin hypoteesi. Alunperin Riemann väitti tietyn funktion kaikkien epätriviaalien nollakohtien olevan suoralla $\Re z = \frac{1}{2}$ yrittäessään hahmotella, miten alkulukulause voitaisiin todistaa. Tämän väitteen oli tarkoitus olla lemma kohti alkulukulauseen todistusta. Alkulukulauseelle kyllä löytyi todistus ja useitakin sellaisia, mutta tämä alunperin lemmaksi tarkoitettu väite jäi avoimeksi. Tämän väitteen merkitys on tosin paljon suurempi kuin vain jonkin yksittäisen väitteen tai lemman. Jos nimittäin Riemannin hypoteesi on tosi, niin siitä seuraa ominaisuuksia esimerkiksi alkuluvuille. Melko monta artikkelia onkin kirjoitettu ikään kuin ehdollisesti: Jos Riemannin hypoteesi on tosi, niin voidaan todistaa... Osa näistä tuloksista on myöhemmin todistettu olettamatta Riemannin hypoteesia, toiset taas ovat peräti yhtäpitäviä Riemannin hypoteesin kanssa. Tällaisten artikkelien suuri lukumäärä kuitenkin kertoo kahdesta asiasta: Riemannin hypoteesi on tehokas oletus, jonka avulla saa tuloksia, joista ei voisi unelmoidakaan muuten. Lisäksi sen hy-

vin yleisesti uskotaan olevan tosi – muuten tällaisilla artikkeleilla olisi kovin vähän annettavaa. Epäilyksiä tietysti on: Esimerkiksi Aleksandar Ivić on kirjoittanut artikkelin syistä epäillä Riemannin hypoteesia.

Riemannin zeta-funktion avulla voi muodostaa Hardyn funktion. Hardyn funktiolla on mielenkiintoinen ominaisuus: Riemannin hypoteesi on yhtäpitävä sen kanssa, että Hardyn funktion kaikki lokaalit minimit ovat negatiivisia ja lokaalit maksimit positiivisia. Aikoinaan analyyttisen lukuteorian kurssilla katsoimme Hardyn funktion kuvaajaa, ja kurssia luennoinut Matti Jutila kertoi, miten eri tavoin tähän voi suhtautua: Kun jotkut minimit ovat kovin lähellä x-akselia ja jotkut maksimit samoin, niin tästä voi tehdä arvauksia eri suuntiin: joko tulkita tilanteen niin, että kun funktiolla oli jo läheltä piti -tilanne, eli melkein maksimi meni negatiiviseksi tai minimi positiiviseksi, niin pakko tämän on joskus mennä pieleen ja hypoteesin olla väärä. Vaihtoehtoisesti voi ajatella, että kun funktio tästäkin läheltä piti -tilanteesta selvisi, niin eiköhän se selviä lopustakin. Tämä on epäilemättä joku analyyttisen lukuteoreetikon versio puolityhjän ja puolitäyden lasin dilemmasta.

Mukavaa syksyn jatkoa!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Suorakulmaisista kolmioista ja matemaatikkojen kommunikaatiosta

Tuomas Korppi

Johdanto

Pari päivää sitten lähetin eräälle matematiikka-aiheiselle keskustelupalstalle viestin

> Tää rupes vaivaamaan, ja olen väsynyt enkä jaksa miettiä, joten kysyn täällä: Voidaanko jokaista suorakulmaista kolmiota approksimoida mielivaltaisen tarkasti suorakulmaisella kolmiolla, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja?

Kun mieleen tulee matemaattinen probleema, oikea lähestymistapa on tietysti yrittää ratkaista sitä itse eikä kysellä netissä. Olin kuitenkin lihassäryn takia nukkunut edellisenä yönä kokonaista kaksi tuntia, enkä ollut matematiikantekokunnossa. Niinpä päätin fuskata hiukan.

Ratkaisukin probleemaan ilmestyi palstalle parin tunnin kuluessa. Tässä kirjoitelmassa käymme ensin läpi sen, mitä kysymykseni tarkoittaa ja miksi se on mielenkiintoinen. Sen jälkeen annamme palstalle tulleen ratkaisun ja käymme sen huolella läpi.

Pythagoraan kolmikot

Kuten lukija varmaan tietää, on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 3 ja 4, ja jonka hypotenuusan pituus on 5. Tämä on kuitenkin poikkeuksellinen suorakulmainen kolmio. Yleensä, kun kateettien pituudet ovat kokonaislukuja, hypotenuusan pituus ei ole kokonaisluku, eikä se yleensä ole edes rationaaliluku. Jos esimerkiksi kummankin kateetin pituus on 1, on hypotenuusan pituus $\sqrt{2}$.

Kolmikoilla (a, b, c), missä a, b ja c ovat kokonaislukuja ja suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet, onkin oma nimi: Pythagoraan kolmikot. Näitä kolmikkoja luonnehtii se, että $a^2 + b^2 = c^2$. Kun palstalle lähettämäni kysymys tuli mieleeni, muistin, että Pythagoraan kolmikoita on ääretön määrä, mutta en muistanut niistä mitään muuta.

Aloinkin siis miettiä, mitä kaikkia suorakulmaisen kolmion muotoja voidaan Pythagoraan kolmikoilla toteuttaa. On selvää, ettei jokaiselle suorakulmaiselle kolmiolle löydy yhdenmuotoista kolmiota, jonka sivujen pituudet tulevat Pythagoraan kolmikosta (kerrottaessa esim. $1, 1$ ja $\sqrt{2}$ millä tahansa positiivisella luvulla eivät kaikki kolme tuloa voi olla yhtaikaa kokonaislukuja), mutta päästäisiinkö lähelle mitä tahansa muotoa?

Voidaan myös miettiä rationaalisia pythagoraan kolmikoita, siis kolmikoita $(\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f})$ missä $(\frac{a}{d})^2+(\frac{b}{e})^2 = (\frac{c}{f})^2$. Heti huomataan, että tällaisia kolmikoita on yhtä helppo tai vaikea löytää kuin Pythagoraan kokonaislukukolmikoita. Jos esim. edellä mainitun kolmikon jokainen jäsen kerrotaan luvulla def, saadaan Pythagoraan kokonaislukukolmikko. Toisaalta jokaisesta Pythagoraan kokonaislukukolmikosta (a, b, c) saadaan rationaalisia

Pythagoraan kolmikoita kertomalla jokainen jäsen samalla rationaaliluvulla.

Tällainen jokaisen kolmikon jäsenen kertominen samalla luvulla muuttaa toki kolmikkoa vastaavan kolmion kokoa, mutta ei sen muotoa: Kerrottua kolmikkoa vastaava kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäistä kolmikkoa vastaavan kolmion kanssa.

Rationaaliluvut

Rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa. Tämä tarkoittaa sitä, että jos on annettu reaaliluvut x ja y, $x < y$, on olemassa rationaaliluku q, jolle $x < q < y$. Jos x on positiivinen, luku q löydetään esimerkiksi valitsemalla $n \in \mathbb{N}$, jolle $10^{-n} < y - x$, ja sen jälkeen valitsemalla q:ksi y:n kokonaisosa ja $n + 1$ ensimmäistä desimaalia (ja jos tämä $q = y$, vähennetään siitä vielä pikkuriikkinen rationaaliluku). Jos x on negatiivinen, q löydetään samankaltaisella menetelmällä, jonka lukija saa itse keksiä.

Tämä tarkoittaa sitä, että jos reaaliluku x on annettu, löytyy kuinka läheltä x:ää tahansa rationaalilukuja, eli reaalilukuja voidaan approksimoida rationaaliluvuilla niin tarkasti kuin halutaan.

Joten mieleeni tuli, pätisikö sama suorakulmaisille kolmioillekin. Tietysti suorakulmaisen kolmion kateettien approksimoiminen rationaalipituisilla kateeteilla on helppoa, mutta tällöin hypotenuusasta yleensä tulee irrationaalipituinen. Jotta se saataisiin rationaalipituiseksi, tarvitaan Pythagoraan kolmikoita.

Mielivaltainen tarkkuus

Alkuperäisessä kysymyksessäni puhun mielivaltaisesta tarkkuudesta. Matemaatikot käyttävät usein sanaa ”mielivaltainen” puhuessaan toisilleen epämuodollisesti. ”Homma onnistuu mielivaltaisella x” tarkoittaa samaa kuin ”Homma onnistuu, olipa x mikä tahansa.”

Näin kysymykseni voidaan ilmaista hiukan täsmällisemmin:

> Olkoon A suorakulmainen kolmio ja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Onko välttämättä olemassa suorakulmainen kolmio B, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja ja joka approksimoi A:ta ϵ-tarkkuudella?

Ja ϵ-tarkkuudella approksimointi tarkoittaa tietysti seuraavaa: Kolmio DEF approksimoi kolmiota ABC tarkkuudella ϵ, jos A:n ja D:n etäisyys on alle ϵ, B:n ja E:n etäisyys on alle ϵ, sekä C:n ja F:n etäisyys on alle ϵ.

Ratkaisu

Pari tuntia kysymyksen lähettämisestä Sampo Tiensuu lähettikin palstalle seuraavan ratkaisun.

> Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja m>n, niin a=m^2-n^2, b=2mn ja c=m^2+n^2 muodostavat pythagoraan kolmikon.
>
> Luvut, jotka ovat muotoa x=m/n ovat tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa. Nyt kolmion kateettien suhde voidaan kirjoittaa a/b = (1/2)*(m/n-n/m) = (1/2)*(x-1/x). Koska x-1/x on jatkuva ja saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot, kun x on positiivinen reaaliluku, niin myös kateettien suhteet ovat positiivisten reaalilukujen joukossa tiheässä.
>
> Tämän perusteella sanoisin, että voi approksimoida.

Kun matemaatikot kommunikoivat keskenään netissä, he eivät aina viitsi kirjoittaa julkaisukelpoista tekstiä. He luottavat siihen, että lukija osaa täydentää yksityiskohdat mielessään. Seuraavaksi käymmekin läpi, kuinka yllä olevista ideoista saadaan koottua julkaisukelpoinen ratkaisu.

(Tiensuulle oli myös käynyt pieni fiba. Luvut muotoa m/n, $m > n$, eivät ole tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa vaan ykköstä suurempien reaalilukujen joukossa. Osaava lukija pystyy kuitenkin paikkaamaan fiban lukiessaan ratkaisua, koska oikeasti $(1/2)(x-1/x)$ saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot, kun x käy läpi kaikki ykköstä suuremmat reaalilukuarvot. Ratkaisu on siis periaatteeltaan oikein fibasta huolimatta.)

Laskut

Ensin ratkaisussa väitetään, että olivatpa m, n mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, joille $m > n$, niin $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ on Pythagoraan kolmikko. Tämä on tietysti helppo todeta laskemalla

$$\begin{aligned}(m^2-n^2)^2+(2mn)^2 &= m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2\\ &= m^4+2m^2n^2+n^4\\ &= (m^2+n^2)^2.\end{aligned}$$

Eli kyseessä tosiaan on Pythagoraan kolmikko.

Seuraavaksi väitetään, että jos edellä kateetteja merkitään $a = m^2 - n^2$ ja $b = 2mn$, kateettien pituuksien suhde voidaan kirjoittaa $a/b = (1/2)(m/n - n/m)$. Tämäkin voidaan todentaa laskemalla

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2-n^2}{2mn} = \frac{m^2}{2mn} - \frac{n^2}{2mn} = \frac{m}{2n} - \frac{n}{2m}.$$

Nyt siis tiedetään, että jos m ja n ovat mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, missä $m > n$, niin $(1/2)(\frac{m}{n} - \frac{n}{m})$ on erään Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituuksien suhde. Seuraavaksi alamme pohtimaan, mitä arvoja tämä lauseke voi saada.

Funktio f

Merkitään $f\colon]1,\infty[\to]0,\infty[$, $f(x) = (1/2)(x - 1/x)$. Heti nähdään, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ja $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Koska jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä, vedämme näistä rajaarvotarkasteluista sen johtopäätöksen, että f on surjektio.

Edellisessä luvussa totesimme, että jos m ja n ovat mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, missä $m > n$, niin $f(m/n) = (1/2)(\frac{m}{n} - \frac{n}{m})$ on erään Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituksien suhde.

Kun m ja n saavat edellä kaikki mahdolliset arvonsa, m/n käy läpi kaikki ykköstä suuremmat rationaaliarvot. Jotta saisimme tietää, mitä arvoja lauseke $f(m/n)$ saa, meidän on siis määritettävä arvot $f(q)$, missä q on ykköstä suurempi rationaaliluku.

Tiheys

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $A =]a,\infty[$. Sanomme, että joukko $C \subset A$ on tiheässä välillä A jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, on olemassa $c \in C$, jolle $x < c < y$.

Edellä läpikäydyn nojalla tiedämme, että ykköstä suuremmat rationaaliluvut ovat tiheässä välillä $]1,\infty[$.

Tarvitsemme myös seuraavaa teoreemaa:

Teoreema 1. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $A =]a,\infty[$ ja $B =]b,\infty[$. Olkoon $g\colon A \to B$ jatkuva surjektio ja $C \subset A$ tiheässä välillä A. Tällöin kuvajoukko gC on tiheässä välillä B.*

Jotta jatkuville funktioille voisi todistaa teoreemoja matemaattisen täsmällisesti, tarvitaan matemaattisen täsmällinen määritelmä jatkuvuudelle. Sellainen voidaan antaa (nk. δ–ϵ-määritelmä), mutta emme tässä siihen mene, joten teoreema jää uskon varaan. Teoreema on kuitenkin huomattavan uskottava siitä intuitiosta käsin, että jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä. Jatkuvuuden δ–ϵ-määritelmän tuntevia lukijoita kehotamme todistamaan teoreeman itse, se ei ole vaikeaa.

Teoreeman nojalla siis arvot $f(m/n)$ ovat tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa. Mutta arvot $f(m/n)$ ovat Pythagoraan kokonaislukukolmikoiden kateettien pituuksien suhteita. Tämä tarkoittaa sitä, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja, $x < y$, aina on olemassa Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituuksien suhde q, jolle $x < q < y$, olivatpa x ja y kuinka lähellä toisiaan.

Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kaikenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita ei voida toteuttaa Pythagoraan kokonaislukukolmikoilla, mielivaltaisen lähelle mitä tahansa muotoa päästään.

Alkuperäisen kysymyksen vastaus

Nyt siis vastaamme alkuperäiseen kysymykseen (tai sen täsmällisempään muotoiluun)

> Olkoon A suorakulmainen kolmio ja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Onko välttämättä olemassa suorakulmainen kolmio B, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja ja joka approksimoi A:ta ϵ-tarkkuudella?

ja vastauksemme on ”Kyllä.”

Olkoon siis A suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat x ja y, ja olkoon $\epsilon > 0$.

Valitaan ensin rationaaliluku $q > 0$, jolle $x - \epsilon < q < x + \epsilon$. Tämä voidaan tehdä, koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa.

Nyt väliltä $](y-\epsilon)/q, (y+\epsilon)/q[$ valitaan luku $s > 0$, joka on jonkun Pythagoraan kokonaislukukolmikon (a, b, c) kateettien pituuksien suhde. Tällainen s voidaan valita edellisen luvun tulosten perusteella, ja s on rationaaliluku, koska $s = b/a$.

Tutkitaan nyt suorakulmaista kolmiota B, jonka kateettien pituudet ovat q ja sq. Tämä kolmio on yhdenmuotoinen suorakulmaisen kolmion kanssa, jonka kateettien pituudet ovat a ja b, ja jonka hypotenuusan pituus on c. Niinpä kolmion B hypotenuusan pituus on qc/a, eli rationaaliluku. Lisäksi $x - \epsilon < q < x + \epsilon$ luvun q valinnan perusteella, ja $y - \epsilon < sq < y + \epsilon$. Näin ollen kolmio B on vaadittu approksimaatio.

Lopuksi

Olen huomannut, että matematiikanopettajat ovat yleensä hanakampia vaatimaan ilmaisulta täsmällisyyttä kuin varsinaiset matemaatikot. Esimerkiksi kun ilmoitimme pituuksia suullisesti ala-asteen matematiikantunnilla, opettaja huomautti aina, jos oppilas ei ilmoittanut mittayksikköä numeroarvon perään, vaikka mittayksikkö olisi ollut asiayhteydestä itsestäänselvä.

Toki julkaistessaan artikkeleita oikeissa tieteellisissä julkaisuissa ja vastaavissa yhteyksissä matemaatikotkin käyttävät täsmällistä ilmaisua, mutta matemaatikoiden kahvipöytäkeskustelut voivat olla hyvinkin epä-

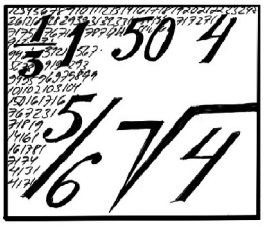
muodollisia, vaikka puhuttaisiin matematiikasta. Esimerkiksi tässä tapauksessa Tiensuu ymmärsi vallan hyvin, mitä minä ajoin kysymykselläni takaa, ja minä ymmärsin vallan hyvin, mitä Tiensuu ajoi ratkaisullaan takaa.

Mitä taas tässä kirjoitelmassa todistettuun tulokseen tulee, ainakin itselleni oli hiukan yllättävää tajuta, että rationaalisia Pythagoraan kolmikoita on noin runsaasti. Jos käsitekoneistoa kehitetään hiukan lisää, voidaan nimittäin tämän kirjoitelman tulokset muotoilla teoreemaksi, että rationaaliset Pythagoraan kolmikot ovat tiheässä kaikkien reaalisten Pythagoraan kolmikkojen joukossa.

Kysymykset siitä, ovatko jonkuntyyppiset oliot tiheässä jossain laajemmassa oliojoukossa, ovat merkittäviä ihan tutkimustason matematiikassakin. Merkittäviä ovat myös kysymykset siitä, voidaanko jokaista jonkun laajemman oliojoukon jäsentä approksimoida mielivaltaisella tarkkuudella jonkun suppeamman oliojoukon jäsenillä. Itse asiassa nämä kaksi kysymystä ovat hyvin usein saman kolikon kaksi eri puolta. Suomessakin on tehty tällaisia kysymyksiä koskevaa tutkimusta ihan kansainvälisellä tutkimustasolla.

Pähkinöitä

1. Osoita, että ei ole positiivista reaalilukua a, jolle sekä $a \cdot 1$ että $a \cdot \sqrt{2}$ ovat rationaalilukuja. (Voit olettaa tunnetuksi, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.)
2. Anna tarkka perustelu sille, että jos $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, niin on olemassa rationaaliluku q, jolle $x < q < y$.
3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että A on tiheä, jos kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on olemassa $a \in A$, jolle $x < a < y$. Sanomme, että jokaista reaalilukua voi approksimaatioida mielivaltaisella tarkkuudella A:n alkioilla, jos kaikilla $x, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle a:n ja x:n etäisyys on alle ϵ. Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:
   - A on tiheä.
   - Jokaista reaalilukua voi approksimoida mielivaltaisella tarkkuudella A:n alkioilla.
4. Kun konstruoimme kolmion B, teimme sen niin, että sen kateettien pituudet approksimoivat A:n kateettien pituuksia. Kun määrittelimme ϵ-approksimaation, puhuimme kolmioiden kärkipisteiden etäisyyksistä. Osoita, että konstruoimamme B voidaan asettaa kolmion A päälle niin, että se toteuttaa määritelmän, jossa puhuimme kärkipisteiden etäisyyksistä.
5. Jos tunnet jatkuvuuden δ–ϵ-määritelmän, todista Teoreema 1.



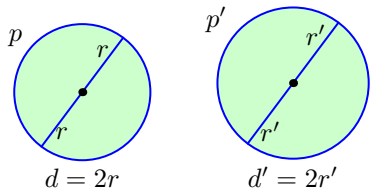
Arkhimedeen vakio, Neperin luku ja imaginaariyksikkö

Markku Halmetoja

Arkhimedes, π ja ympyrän pinta-ala

Sanaristikoissa kysytään toisinaan *Arkhimedeen vakioita*. Tällöin nelikirjaimiseen kohtaan tulee kirjoittaa *piit*, vaikka kyseessä on yksikäsitteisesti määrätty luku. Ristikoiden laatijoilla ei ehkä ole asiasta ymmärrystä tai he joutuvat tekemään kompromisseja ristikon rakenteen monimutkaisuuden takia. Piin likiarvoja tunnettiin jo kauan ennen Arkhimedesta muinaisessa Babyloniassa, Egyptissä, Kiinassa ja Intiassa, mutta hän kehitti menetelmän, jonka avulla se voidaan periaatteessa laskea mielivaltaisen tarkasti. Arkhimedes todisti myös jo aiemmin tunnetun ympyrän pinta-alan kaavan. Seuraavassa on lyhyt esitys näihin asioihin johtavista ajatuksista, joiden tulisi nykyisinkin olla alkeisopetuksen perustana.

Pii voidaan nykytietämyksen mukaan määritellä usealla eri tavalla, mutta alkuperäinen ja elementaarinen tapa perustuu ympyröiden yhdenmuotoisuuteen. Kahdessa ympyrässä vastinpituuksia ovat esimerkiksi halkaisijat $d = 2r$ ja $d' = 2r'$ sekä kehien pituudet p ja p'. Voidaan ajatella, että toinen ympyrä on toisen karttakuva mittakaavassa k. Tällöin



$$\frac{d'}{d} = k \quad \text{ja} \quad \frac{p'}{p} = k,$$

mistä seuraa

$$\frac{d'}{d} = \frac{p'}{p}, \quad \text{ja edelleen} \quad \frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}.$$

Kehän pituuden suhde halkaisijaan yhdessä ympyrässä on siis sama kuin tämä suhde toisessa ympyrässä, joten se on kaikissa ympyröissä sama. Se merkitään 1700-luvulla käyttöön vakiintuneella kreikkalaisella π-kirjaimella. Saamme yhtälön $\frac{p}{d} = \pi$ eli $p = \pi d$, ja koska $d = 2r$, on ympyrän kehän pituus eli *piiri* $p = 2\pi r$.

Noin 2200 vuotta sitten Arkhimedes laski yksikköympyrän ($r = 1$) sisään ja ympäri piirrettyjen säännöllisten 96-kulmioiden sivujen pituudet. Niiden avulla hän pystyi esittämään arvion $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Sisään piirretyn 96-kulmion sivuun päästään seuraavasti: puolitetaan 6-kulmion sivuja vastaavat kaaret ja muodostetaan 6-kulmion kärkien ja puolituspisteiden avulla säännöllinen 12-kulmio. Näin jatkamalla saadaan 24-, 48- ja lopulta 96-kulmio. Jokaisessa vaiheessa on laskettava syntyneen monikulmion sivun pituus. Piin alalikiarvo saadaan kertomalla 96-kulmion sivun pituus luvulla 48. Arkhimedeen laskentaurakka oli valtaisa, sillä hänen käytettävissään ei ollut nykyaikaista matemaattista notaatiota ja laskut oli tehtävä käsin kreikkalaisella numerojärjestelmällä, jossa ei tunnettu nollaa.

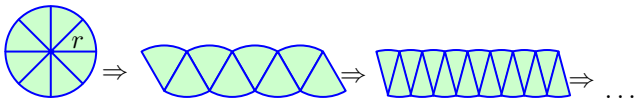
Nykyisellä notaatiolla ja numerojärjestelmällä Arkhimedeen ajatus on helppo toteuttaa: Pythagoraan

lauseen avulla nähdään, että jos yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituus on a_n, niin säännöllisen $2n$-kulmion sivun pituus

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}.$$

Tällöin $\pi \approx n \cdot a_{2n}$, sillä yksikköympyrän kehän puolikkaan pituus on π. Lähtien säännöllisen kuusikulmion sivusta $a_6 = 1$ voidaan tämän palautuskaavan avulla teoriassa edetä kuinka pitkälle tahansa ja saadaan kasvava jono alati tarkentuvia π:n alalikiarvoja. Palautuskaavan voi ohjelmoida nykyaikaiseen laskimeen tai taulukkolaskentaohjelmaan, jolloin saadaan π:lle laskimen tai ohjelmiston kapasiteetin mukainen likiarvo. Koulumatematiikassa yleisesti käytetty likiarvo on $\pi \approx 3{,}14$.

Arkhimedes määritti ympyrän pinta-alan ajattelemalla sen parillisiksi määriksi sektoreita. Kokoamalla ne palapeleiksi kuvasarjan



mukaisesti saadaan sitä tarkemmin suorakulmio, mitä pienempiin sektoreihin ympyrä jaetaan. Suorakulmion korkeus on r ja kanta puolet ympyrän kehästä. Kehän puolikas on πr, joten ympyrän pinta-ala $A_\circ = \pi r^2$.

Matemaattinen analyysi ja π

Matemaattisen analyysin kehittyminen 1600-luvulta alkaen paljasti aluksi oudoilta vaikuttaneita yhteyksiä π:n ja päättymättömien summien eli *sarjojen* ja tulojen välillä. G. Leibniz todisti vuonna 1676, että

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Tulos on ihmeellinen. Mitä tekemistä vasemman puolen vuorottelevalla murtolukusummalla voi olla ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen kanssa! Vähintään yhtä hämmästyttävä on J. Wallisin pari vuosikymmentä aikaisemmin todistama tulokaava

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\left(1 + \frac{1}{2k}\right).$$

Mm. kuuluisa matemaatikko C. Huygens oli uskonut tuloksen oikeaksi vasta suorittamiensa likiarvolaskelmien jälkeen. Vuonna 1734 L. Euler onnistui ratkaisemaan pitkään avoinna olleen *Baselin ongelman*: Laskettava päättymätön summa

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Matemaattisen yhteisön ihmetykseksi tulos osoittautui olevan $\frac{1}{6}\pi^2$.

Nähdyt sarjat ja Wallisin tulo suppenevat liian hitaasti π:n monidesimaalisen likiarvon määrittämiseen. Desimaalien vakavampi laskeminen alkoi J. Machinin vuonna 1706 todistamasta kaavasta

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239}.$$

Arkustangentin sarjakehitelmän

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

avulla siitä saadaan varsin tehokas työkalu π:n laskemiseen. Machin itse laski sen avulla π:n sata ensimmäistä desimaalia. Hänen päivistään algoritmit ovat kehittyneet ja nyttemmin (maaliskuu 2019) π on laskettu noin 31,4 biljoonan desimaalin tarkkuudella, mikä on aivan käsittämätön määrä numeroita. Laskeminen suoritetaan hajauttamalla työ usealle tietokoneelle, jotka häärivät luppoaikansa π:n kimpussa.

Vuonna 1768 sveitsiläinen matemaatikko J. H. Lambert todisti π:n *irrationaaliluvuksi*, eli sitä ei voi esittää kahden kokonaisluvun suhteena. Vuonna 1882 saksalainen matemaatikko C. L. F. von Lindemann todisti π:n *transkendenttiluvuksi*, eli että se ei ole minkään kokonaiskertoimisen polynomiyhtälön juuri. Samalla paljastui ratkeamattomaksi antiikin aikainen ongelma ympyrän neliöimisestä harppi-viivoitin-konstruktiona. (Kokonaiskertoimisten polynomiyhtälöiden juuria sanotaan *algebrallisiksi luvuiksi*. Ne voivat olla rationaalisia tai irrationaalisia. Esimerkiksi yhtälön $2 - x^2 = 0$ juuret $\pm\sqrt{2}$ ovat irrationaalisia. Ainoastaan algebrallisia lukuja voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivoitinta.) π:n "tarkka" arvo ei ole saavutettavissa millään algoritmilla. Desimaalien laskemisella kehitetään lähinnä ohjelmointitaitoja.

Neperin luku

Matemaattisten totuuksien kauneuskilpailussa kärkijoukkoon sijoittuisi C. F. Gaussin vuonna 1809 julkaisema *Gaussin integraali*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Se sisältää π:n lisäksi toisenkin matematiikan ihmeistä, nimittäin *Neperin luvun* e. Se on π:n ohella yksi matematiikan tärkeimmistä luvuista. Tutustumme siihen tutkimalla ns. *jatkuvaa koronkorkoa*. Ajatellaan ensin, että pankkitilille sijoitettu rahasumma K_0 kasvaa korkoa p % vuodessa ja korko lisätään tilille vuoden kuluttua säästämisen alkamisesta. Tällöin tilillä oleva summa

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Jos korko lisätään tilille puolivuosittain, niin saldo on vuoden kuluttua

$$K_2 = K_0\Big(1 + \frac{p/2}{100}\Big)^2 = K_0\Big(1 + \frac{p}{200}\Big)^2,$$

sillä puolen vuoden korkoprosentti on $\frac{p}{2}$ %. Jos korko lisätäänkin n kertaa vuoden aikana, niin yhden korkokauden pituus on $\frac{1}{n}$ vuotta ja sen ajan korkoprosentti on $\frac{p}{n}$ %. Tällöin tilillä vuoden kuluttua oleva summa

$$K_n = K_0\Big(1 + \frac{p}{100n}\Big)^n = K_0\Big(\big(1 + \frac{1}{\frac{100n}{p}}\big)^{\frac{100n}{p}}\Big)^{\frac{p}{100}}.$$

Merkitään $a = \frac{100n}{p}$, joten

$$K_n = K_0\Big(\big(1 + \frac{1}{a}\big)^a\Big)^{\frac{p}{100}}.$$

Entä jos korkokausien määrän annetaan kasvaa hyvin suureksi, jopa äärettömän suureksi? Tällöin korkokauden korkoprosentti vastaavasti pienenee ja lähestyy nollaa. Jos n kasvaa äärettömän suureksi, merkitään $n \to \infty$, niin myös $a \to \infty$. Saldon kannalta on siis ratkaisevaa, mitä tällöin tapahtuu luvulle

$$\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^a.$$

Voisi kuvitella, että kun potenssiin korotettava lähestyy lukua 1, niin raja-arvokin olisi yksi. Tällöin saldo olisi vuoden kuluttua ennallaan, mikä olisi outoa. Toisaalta voisi ajatella, että kun ykköstä suuremmalta näyttävä luku korotetaan äärettömän suureen potenssiin, niin tuloksena olisi äärettömän suuri luku. Tilillä siis olisi äärettömän suuri rahasumma, mikä sekään ei tunnu mahdolliselta. Voidaankin osoittaa, että kyseisellä potenssilla on äärellinen raja-arvo, kun $a \to \infty$. Raja-arvo on Neperin luku $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$. Jatkuvan koronkoron tapauksessa korko siis valuu tilille kuin vesi kraanasta ja vuoden kuluttua saldo on

$$K_\infty = K_0 \mathrm{e}^{\frac{p}{100}}.$$

Jos $p = 2$, niin $K_1 = 1{,}02K_0$ ja $K_\infty = K_0\mathrm{e}^{0{,}02} \approx 1{,}0202K_0$.

Lausekkeen

$$\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^a$$

raja-arvo pysyy samana riippumatta siitä, liukuuko a kohti ääretöntä reaaliakselia pitkin vai loikkiiko se sinne kokonaislukuaskelin. Se pysyy samana myös, vaikka a menisi kohti negatiivisen puolen ääretöntä. Siis

$$\begin{aligned}\mathrm{e} &= \lim_{a\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^a = \lim_{a\to-\infty}\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^a \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \lim_{n\to-\infty}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \approx 2{,}71828.\end{aligned}$$

Kun $(1 + \frac{1}{n})^n$ kerrotaan auki binomilausetta soveltaen, saadaan tulokseksi lauseke, jonka raja-arvo on myös e; tämä raja-arvo on

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Sarja suppenee nopeasti, joten e:n desimaaleja on helppo laskea sen avulla. Euler todisti e:n irrationaaliseksi jo 1700-luvulla ja C. Hermite todisti sen transkendenttiseksi vuonna 1873.

Imaginaariyksikkö ja kompleksiluvut

Toisen asteen polynomiyhtälöön johtavia tehtäviä osattiin ratkaista jo muinaisessa Babyloniassa ja Kreikassa. Antiikin matemaatikot olivat kiinnostuneita ainoastaan yhtälöiden positiivisista juurista. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat keksittiin 1400-luvun lopulla Italiassa. Algebrallisesti muotoiltujen ratkaisukaavojen myötä negatiivisetkin juuret tulivat siedetyiksi. Havaittiin myös, ettei kaikilla yhtälöillä ole ratkaisua. Yhtälön $1 + z^2 = 0$ juuret olisivat muodollisesti $z = \pm\sqrt{-1}$, mutta ainoastaan ei-negatiivisilla luvuilla on neliöjuuri. Jos kuitenkin oletettaisiin, että on olemassa tavanomaisia laskusääntöjä noudattava luku i, jonka neliö on -1, niin koituisiko siitä ristiriitoja aiemmin tunnettujen tosiasioiden kanssa? (Merkintä "i" vakiintui käyttöön vasta 1700-luvulla.) Ongelmia ei havaittu, vaan i:llä oli pikemminkin matematiikkaa rikastuttava vaikutus: esimerkiksi yhtälölle $1 + z^3 = 0$ löydettiin ilmeisen juuren lisäksi kaksi muutakin juurta. Lukuja $z = a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja, pidettiin kuitenkin kuvitteellisina ja niitä kutsuttiin *imaginaariluvuiksi.* Myöhemmin i-symbolin vakiintumisen myötä sitä alettiin kutsua *imaginaariyksiköksi* ja lukuja $z = a + bi$ *kompleksiluvuiksi.* Niiden yhteen- ja kertolasku sujuivat normaaliin tapaan: jos $z = a + bi$ ja $w = c + di$, niin

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i \quad \text{ja} \\ zw &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Kompleksiluvut vakiintuivat matemaattiseen analyysiin jo 1600-luvun loppupuolella, vaikka ei tunnettu matemaattista objektia, jonka neliö olisi -1. Ongelma ratkesi lopullisesti vasta vuonna 1833, kun irlantilainen matemaatikko W.R. Hamilton määritteli luvun $z = a+bi$ järjestetyksi reaalilukupariksi $z = (a, b)$. Hän määritteli yhteen- ja kertolaskut yllä olevan mukaisesti

$$\begin{aligned} z + w &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{ja} \\ zw &= (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

ja samasti muotoa $(x, 0)$ olevat luvut reaalilukujen kanssa: $(x, 0) \cong x$. Se oli perusteltua, sillä laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned} (u, 0) + (v, 0) &= (u + v, 0) \cong u + v \quad \text{ja} \\ (u, 0)(v, 0) &= (uv, 0) \cong uv. \end{aligned}$$

Erityisesti

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) \cong -1,$$

joten $i = (0,1)$. Yhtälön $1 + z^2 = 0$ ratkaisuksi löytyi siis konkreettinen matemaattinen objekti! Kompleksiluvuilla laskettaessa on edelleen kätevämpää käyttää merkintää $z = x + yi$.

Kompleksilukuja oli jo ennen Hamiltonia esitetty (x, y)-tason pisteinä, jolloin kyseinen taso nimettiin *kompleksitasoksi.* Luvun $z = x+yi$ *reaali-osa* $\mathrm{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z) = y$. Tason x-akselia kutsutaan *reaaliakseliksi* ja y-akselia *imaginaariakseliksi.* Luvun $z = x + yi$ *itseisarvo* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja z:n *liittoluku* $\bar{z} = x - yi$. Selvästi

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Imaginaariyksikön potensseilla on neljän sykli: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i$, $\ldots$. Graafisesti luku $z = x + yi$ esitetään origosta pisteeseen (x, y) piirrettynä vektorina. Liittoluku $\bar{z} = x - yi$ on z:n peilikuva reaaliakselin suhteen.

Eulerin kaavat

Arkhimedeen monikulmioita lukuunottamatta edellä nähdyt π:n laskemisen mahdollistavat menetelmät perustuvat pääosin trigonometriaan. Antiikin aikana ja myöhemmin keskiajalla sitä käytettiin lähinnä tähtitieteen laskuissa, navigoinnissa, arkkitehtuurissa sekä kaivosteknologiassa tunnelien suuntia määritettäessä. Trigonometrisia funktioita ei varsinaisesti tunnettu, vaan erityisesti sinin arvoja taulukoitiin vaivalloisia laskelmia tehden. Vasta 1600-luvulla matemaattisen analyysin kehittyessä huomattiin, että trigonometrisilla funktioilla on itsenäistäkin arvoa. Samalla havaittiin, että muinaisesta Babyloniasta peräisin oleva tapa kulman suuruuden mittaamiseksi asteilla on liian kömpelö analyysin tarpeisiin. Parempi tapa on asettaa yksikköympyrän keskipiste kulman kärkeen ja ilmaista kulman suuruus sen kylkien väliin jäävän kaaren pituutena. Tällöin esimerkiksi oikokulman suuruus on π ja täyden kulman 2π. Kosini ja sini määriteltiin origokeskisen yksikköympyrän kehäpisteen koordinaatteina, jolloin ne havaittiin koko reaalilukualueessa määritellyiksi rajoitetuiksi, jaksollisiksi funktioiksi; kummankin perusjakso on 2π. Funktioiden arvojen ja π:n desimaalien laskemista edesauttoi ratkaisevasti se, että ne opittiin kehittämään potenssisarjoiksi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Myös e-kantaisen eksponenttifunktion sarjakehitelmä

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

oli tunnettu. Euler havaitsi 1700-luvun puolivälissä, että sillä ja trigonometristen funktioiden sarjoilla on paljon yhteisiä piirteitä. Hän tuli sijoittaneeksi siihen imaginaariluvun $x = i\varphi$ ja tulos oli ällistyttävä:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi^5)}{5!} + \ldots \\ &= \big(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\big) + i\big(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\big) \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi.\end{aligned}$$

Vaihtamalla φ vastaluvukseen saadaan

$$\mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Yhtälöitä

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{ja} \quad \mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

kutsutaankin *Eulerin kaavoiksi.* Luultavasti Eulerin ajatusta siivitti myös A. de Moivre'n muutamaa vuosikymmentä aikaisemmin löytämä yhteys kompleksilukujen ja trigonometristen funktioiden välillä: *Kaikilla* $n \in \mathbb{Z}$ *ja* $\varphi \in \mathbb{R}$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Eulerin kaavojen avulla eksponenttifunktio voitiin määritellä myös kompleksiluvuille:

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y).$$

Kun yhtälöön $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ sijoitetaan $\varphi = \pi$, saadaan tulokseksi monien mielestä matematiikan kaunein ja merkillisin yhtälö:

$$1 + \mathrm{e}^{i\pi} = 0.$$

Kauaskantoisempi tulos saadaan sijoittamalla siihen $\varphi = 2\pi$, sillä yhtälön $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$ avulla nähdään eksponenttifunktio $f(z) = \mathrm{e}^z$ jaksolliseksi:

$$f(z + 2\pi i) = \mathrm{e}^{z+2\pi i} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi i} = \mathrm{e}^z = f(z).$$

Reaalilukualueella eksponenttifunktio on aidosti kasvava, mutta kompleksilukualueella se on jaksollinen ja sen perusjakso on $2\pi i$.

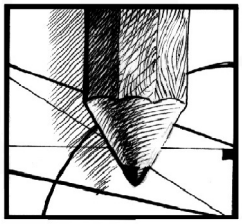
Selvästi $|\mathrm{e}^{i\varphi}| = 1$, ja kun φ saa kaikki arvot välillä $[0, 2\pi[$, niin $\mathrm{e}^{i\varphi}$ piirtää origokeskisen yksikköympyrän. Jos reaalimuuttuja t esittää aikaa ja vakio ω kulmanopeutta (yksikköinä s ja s^{-1}), niin luku $z(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$ kiertää yksikköympyrän kehää mainitulla kulmanopeudella. Ilmiöllä on käyttöä mm. sähkötekniikassa ja fysiikassa yleisemminkin. Itse asiassa tässä kirjoituksessa ohuesti kuvattu π-e-i-matematiikan kehitys antiikin ajoista 1800-luvulle oli välttämätön edellytys esimerkiksi sähkön ja magnetismin matemaattiselle mallintamiselle, mikä tapahtui 1800-luvun puolen välin tietämissä.

Lähteitä ja selityksiä

Kirjoituksessa olevat faktat on poimittu St. Andrews'in yliopiston matematiikan historiasivustolta `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/` sekä Matti Lehtisen kirjasta "Matematiikan nimiä" (Eukleides-kirjat[1], Oulu 2020). Ne on liimattu yhteen kirjoittajan omilla hajanaisilla muistikuvilla elämän varrella luetuiksi tulleista matematiikkaa ja sen historiaa käsittelevistä teoksista ja artikkeleista. Kirjoittaja on yksin vastuussa mahdollisista virheistä ja epätarkkuuksista. Tekstissä esitetyt tulokset voidaan todistaa nykyaikaisen matemaattisen analyysin edellyttämällä tarkkuudella.

Korjattu 2.11.2020 sivun 10 lause "Ainoastaan algebralliset luvut voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivoitinta" muotoon "Ainoastaan algebrallisia lukuja voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivoitinta".

[1] `www.eukleideskirjat.fi`



Lyhintä reittiä pitkin suurimpaan kulmaan – matkakertomus

Jaska Poranen

Johdanto

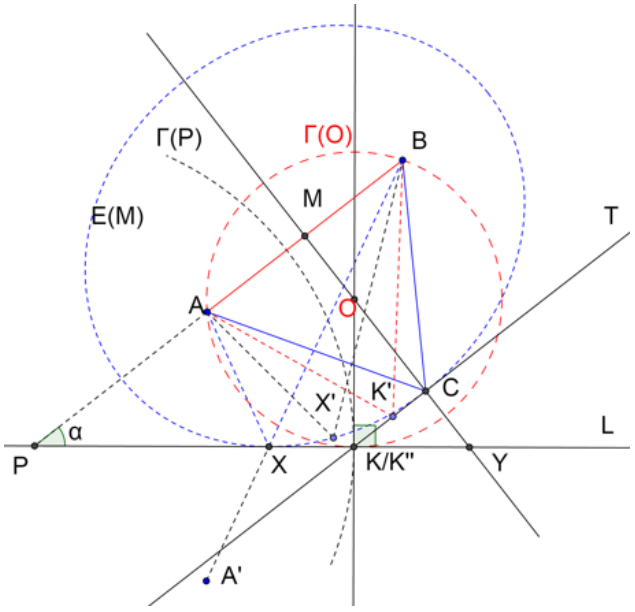
Matemaattisen ongelmanratkaisuperinteen perushahmon G. Polyan (1887–1985) teoksesta (1973, 122–123) löytyy seuraava kysymys (suomennos kirjoittajan):

Olkoot annettuina kaksi pistettä ja suora, kaikki samassa tasossa, ja molemmat pisteet samalla puolella suoraa. Etsi annetulta suoralta piste, josta annettujen pisteiden määräämä jana näkyy suurimmassa mahdollisessa kulmassa.

Hieman myöhemmin (emt., 142–144) mainitaan toinen ongelma, joka lienee monille lukijoille tutumpi (suomennos kirjoittajan):

Olkoot annettuina kaksi pistettä ja suora, kaikki samassa tasossa, ja molemmat pisteet samalla puolella suoraa. Etsi annetulta suoralta piste, josta annettuihin pisteisiin määritettyjen etäisyyksien summa on pienin mahdollinen.

Yllä esitetty ensimmäinen kysymys (merkitään q_1) oli kirjoittajalle entuudestaan tuntematon; toinen kysymys (merkitään q_2) oli puolestaan jo melko tuttu. Kirjoittaja oli miettinyt ns. prosessinäkökulmaa matematiikkaan (ks. esim. Pehkonen 1999) ja sen mahdollista merkitystä kouluopetuksessa ja opettajainkoulutuksessa. Selventääkseen tätä asiaa kirjoittaja päätti ottaa tutkittavakseen jonkin aidon kysymyksen, jonka ratkaisemisesta hänellä ei ollut etukäteen mitään käsitystä – ja kirjoittaa siitä.



Kuva 1. Kysymys Q: Hypoteesi ongelmien q_1 ja q_2 eli pisteiden K ja X välisestä eräästä konstruktiivisesta yhteydestä.

G. Polya kuvaa teoksessaan (1973, 143) kysymyksiä q_1 ja q_2 vielä siten, että niissä molemmissa on sama lähtötilanne ja että itse tuntemattomat ovat saman tyyppiset: annetulta suoralta etsitään tietyn ääriarvon toteuttavaa pistettä; ääriarvojen luonteet ovat

vain erilaiset: ensimmäisessä (q_1) etsitään maksimikulmaa, toisessa (q_2) minimisummaa. Kirjoittajan havaintojen mukaan Polya ei sano näistä kysymyksistä *yhdessä* tämän enempää. Näin kirjoittajalle syntyi ajatus "omasta ongelmasta" (merkitään Q), jossa pyritään selvittämään, onko näiden kysymysten (q_1, q_2) välillä jokin syvempi yhteys. Hän oletti, että tuon mahdollisen yhteyden olemassaolo – tai ei-olemassaolo – olisi aika nopeasti selvitettävissä. Näin ei kuitenkaan käynyt: kirjoittaja oli kuin olikin löytänyt (ainakin itselleen) aidon ongelman, joka vaivasi häntä pitkään. Tämän prosessin kuvailu johti kirjoitukseen (Poranen, 2020), jossa päädytään kuvan 1 hypoteesiin kysymyksestä Q eli kysymyksien q_1 ja q_2 välisestä suhteesta.

Yllä (Kuva 1) suoralla L oleva piste X on kysymyksen q_2 minimisumman $AX + XB$ piste, ts. murtoviiva AXB on lyhin mahdollinen reitti pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B. Piste X voidaan määrittää yksinkertaisesti peilaamalla ensin piste A suoran L suhteen pisteeksi A' ja tarkastelemalla sitten suorien $A'B$ ja L leikkauspistettä. Suoran L piste K on puolestaan ongelman q_1 vaatima piste, ts. siitä pisteestä jana AB näkyy suoralta L suurimmassa mahdollisessa kulmassa. Tämäkin piste on geometrisesti konstruoitavissa.

Voidaan nimittäin ensinnäkin osoittaa, että sen on oltava pisteiden A ja B kautta kulkevan ympyrän $\Gamma(O)$ (Kuva 1) ja suoran L (ainoa) yhteinen piste. Tämän jälkeen ympyrän sekanttilauseen perusteella saadaan yhtälö $PA \cdot PB = (PK)^2$, missä piste P on suorien AB ja L leikkauspiste. Tällöin jana PK saadaan edelleen janojen PA ja PB geometrisena, konstruoitavissa olevana keskiarvona – kuvassa 1 ympyränkaaren $\Gamma(P)$ säteenä.

Menettelyihin, joilla pisteet X ja K löydetään, ei näytä sisältyvän mitään vihjettä näiden pisteiden mahdollisesta keskinäisestä yhteydestä. Sellainen kuitenkin vaikuttaa loppujen lopuksi löytyvän siten, että helposti määritettävissä olevan pisteen X avulla saadaan konstruoitua myös piste K. Tätä hakuprosessia – ja sen mahdollista yleisempää merkitystä – on kuvattu ja analysoitu edellä mainitussa kirjoituksessani (2020). Siinä jouduin tyytymään keksimääni lupaavaan hypoteettiseen yhteyteen (Kuva 1) pisteiden X ja K välillä, jota pystyin perustelemaan vain "laadullisesti" seuraavaan tapaan.

Konstruoidaan ellipsi (Kuvassa 1 $E(M)$), jonka polttopisteet ovat A ja B ja jonka polttosäteiden vakiosumma $= AX + XB$ (= minimimatka pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B). Erityisesti siis tämä ellipsi $E(M)$ kulkee pisteen X kautta. Luonnollisesti jana AB näkyy tästä suoran L pisteestä eräässä kulmassa BXA, mutta piste K = piste X vain, jos $AB \parallel L$, jolloin piste K (ja piste X) voidaan konstruoida suoraan janan AB keskinormaalin ja suoran L leikkauspisteenä. Suora L on tietysti myös ellipsin $E(M)$ tangentti kohdassa X.

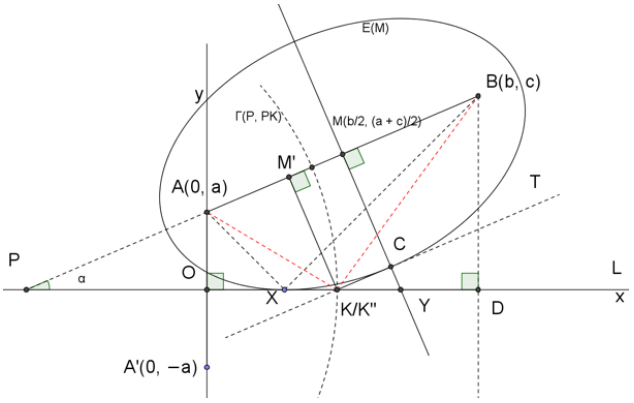
Olkoon sitten X' ellipsin "liikkuva piste". Kulma $BX'A$ kasvaa, kun piste X' liikkuu ellipsillä pisteestä X kohti janan AB keskinormaalia MY. Pisteestä C, joka on ellipsin $E(M)$ ja keskinormaalin MY kahdesta leikkauspisteestä suoraa L lähempänä oleva piste, näkyy jana AB ellipsiltä $E(M)$ suurimmassa mahdollisessa kulmassa. Tämän kulman BCA kyljet ovat yhtä suuret siten, että $BC = AC = (AX + XB)/2$.

Konstruoidaan edelleen pisteestä C suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora T. Valitaan myös tältä suoralta "liikkuva piste" K' ja kuljetaan suoraa T pitkin kohti suoraa L. Tällöin kulma $BK'A$ pienenee. Olkoon suoran T ja suoran L leikkauspiste K''. Hypoteesi (ks. Kuva 1) kuuluu nyt siten, että piste K = piste K''. Mainitussa kirjoituksessani (Poranen, 2020) en pystynyt todistamaan tätä, mutta siihen ryhdyn seuraavassa.

Seuraavassa jo alussa mainittujen pisteitä A ja B sekä suoraa L koskevien perusoletusten lisäksi oletetaan ensin, että piste A on lähempänä suoraa L kuin piste B ja että näiden pisteiden määräämä suora ei leikkaa suoraa L kohtisuorasti (vrt. Kuva 1, Kuva 2), mikä ei rajoita yleisyyttä. Erikoistapaukset $AB \perp L$ ja $AB \parallel L$ käsitellään tämän jälkeen erikseen.

Hypoteesin todistus analyyttisen geometrian avulla

Otetaan käyttöön suorakulmainen xy-koordinaatisto siten, että piste $A = A(0, a)$, $B = B(b, c)$ ja suora $L = x$-akseli, ja missä edelleen a, b ja c ovat positiivisia lukuja, $a < c$ (Kuva 2).



Kuva 2. Ellipsin $E(M)$ välittämä yhteys pisteiden X ja K välille: osoitetaan, että $M'K = MC$.

Käyttämällä joitakin analyyttisen geometrian alkeistietoja, Pythagoraan lausetta, ympyrän sekanttilausetta sekä eräiden kolmioiden yhdenmuotoisuutta saadaan melko helposti seuraavia tuloksia (vrt. Kuva 2):

1. Suoran AB yhtälö: $y = ((c - a)/b) \cdot x + a$.
2. $P = (ab/(a - c), 0)$; $PO = ab/(c - a)$.

3. $PA = \frac{a}{c-a}\sqrt{(c-a)^2+b^2}$.
4. $PD = PO + OD = bc/(c-a)$.
5. $PB = \frac{c}{c-a}\sqrt{(c-a)^2+b^2}$.
6. $PK = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})}$.
7. $OK = PK - PO = PK - \frac{ab}{c-a} = \sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - ab/(c-a)$.
8. $K = (OK, 0)$.
9. $X = (ab/(a+c), 0)$.
10. $Y = ((c^2+b^2-a^2)/2b, 0)$.
11. $AX + XB = \sqrt{(a+c)^2+b^2}$ ($= d$, merkitään).
12. Määritellään ellipsi $E(M)$ yhtälöllä

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2} = d,$$

ts. sen polttopisteet ovat A ja B, sen pisteiden (x, y) etäisyyksien summa pisteistä A ja $B = d$, se kulkee pisteen X kautta ja symmetrian takia sillä on myös piste C, missä $AC = BC = d/2$.
13. $AB = \sqrt{(c-a)^2+b^2}$; $AM = AB/2$; $M = (b/2; (c+a)/2)$.
14. $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \ldots = \sqrt{ac}$ (= lukujen a ja c geometrinen keskiarvo).

Yhtälö (1) on yhtä pitävä sen ns. yleisen muodon kanssa:

$$(c-a)\cdot x - by + ab = 0,$$

ja voimme soveltaa nyt kaavaa

$$e = (|Ax_0 + By_0 + C|)/\sqrt{A^2+B^2} \qquad \text{(a)}$$

pisteen etäisyydelle suorasta laskeaksemme pisteen K etäisyyden suorasta AB (x_0 = pisteen K x-koordinaatti, $y_0 = 0$). Merkitään vielä e' = kaavan (a) jaettava, e'' = kaavan (a) jakaja. Tällöin ensinnäkin

$$e' = |(c-a)\cdot\left[\sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - \frac{ab}{c-a}\right] - 0 + ab|$$

$$= |\sqrt{ac}\cdot\sqrt{(c-a)^2(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - ab + ab|$$

$$= |\sqrt{ac}\cdot\sqrt{(c-a)^2+b^2}| = \sqrt{ac}\cdot\sqrt{(c-a)^2+b^2};$$

toiseksi

$$e'' = \sqrt{(c-a)^2+b^2}.$$

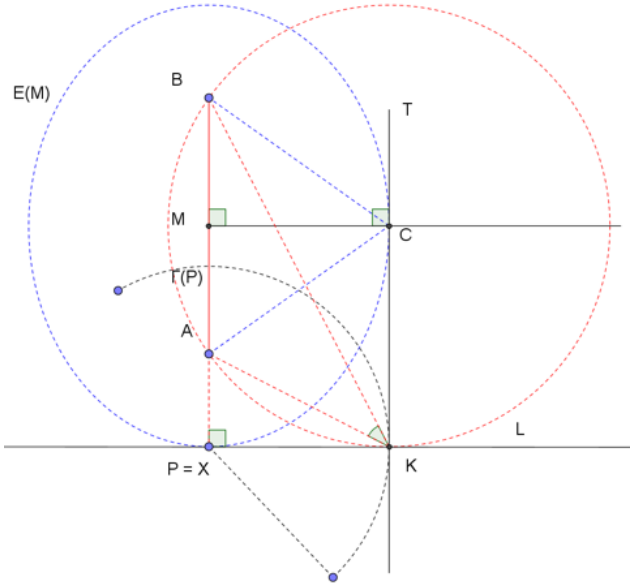
Näin

$$e = e'/e'' = M'K = \sqrt{ac} = MC.$$

Yhteenvetoa yllä olevasta: On siis osoitettu, että pisteestä P käsin konstruoitavissa olevan suoran L maksimikulmapisteen K etäisyys suorasta AB on MC. Toisaalta pisteen C kautta kulkeva suora T (Kuva 2) on konstruoitu siten, että se on yhdensuuntainen suoran AB kanssa. Näin jokaisen sen pisteen etäisyys suorasta AB on MC. Erityisesti siis suorien T ja L leikkauspisteen K'' etäisyys suorasta AB on MC. On siis oltava $K = K''$, joten piste K saadaan näinkin selville – ja tässä menettelyssä on minimimatkan pisteellä X olennainen rooli.

Erikoistapaukset $AB \perp L$ ja $AB \parallel L$

Edellä suoritettu todistus analyyttisen geometrian avulla edellytti, että suora AB ei ole kohtisuorassa suoraan L nähden. Tarkastellaan tätä tilannetta ilman analyyttista geometriaa seuraavassa (Kuva 3).

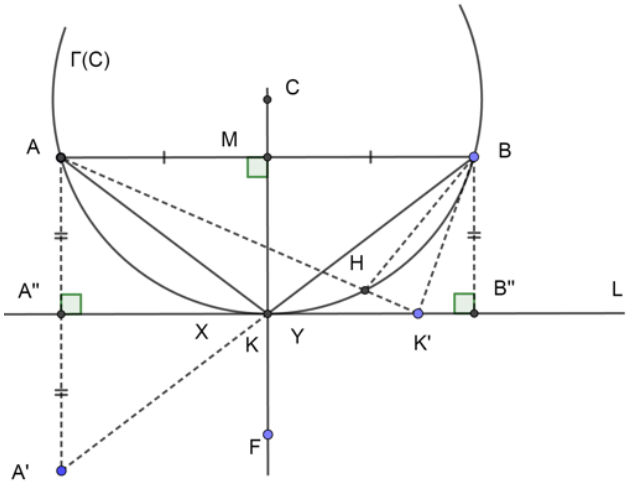


Kuva 3. Tapaus $AB \perp L$.

Tapauksessa $AB \perp L$ on lyhin reitti AXB selvästi $= AP + PA + AB = 2AP + AB$, missä piste $P = X$ = suorien AB ja L leikkauspiste (Kuva 3). Näin AC ($= BC$) $= AP + AB/2$, ja $(MC)^2 = (AC)^2 - (AB/2)^2$, ts. $(MC)^2 = PA(PA+AB) = PA \cdot PB$, joten MC = janojen PA ja PB geometrinen keskiarvo. Toisaalta myös PK on näiden janojen geometrinen keskiarvo, joten $PK = MC$. Pisteen C kautta kulkeva suora $T \parallel AB$, joten se leikkaa suoran L kohdassa K.

Yllä olevassa tilanteessa (Kuva 3) jana AB näkyy suurimmassa kulmassa suoralta L pisteestä K, missä PK = janojen PA ja PB geometrinen keskiarvo. Toisaalta tämä piste K saadaan siis myös suoraan pisteen X avulla hyödyntämällä sen merkitystä lyhimmän reitin pisteenä janan AB pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B.

Tarkastellaan toiseksi tapausta $AB \parallel L$ (Kuva 4):



Kuva 4. Jos jana $AB \parallel L$, niin $X = Y = K$.

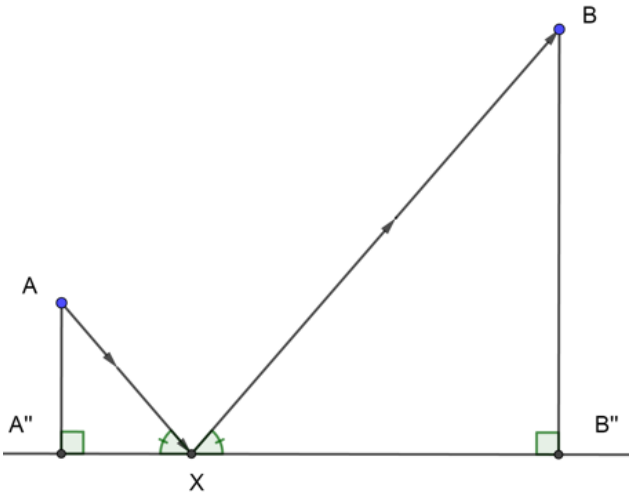
Olkoon siis $AB \parallel L$. Tutkitaan tilannetta tässäkin ilman analyyttista geometriaa. Piirretään janalle AB keskinormaali MF, olkoon sen ja suoran L leikkauspiste $= Y$ (Kuva 4). Osoitetaan ensin, että tällöin lyhimmän matkan piste $X = Y$. Peilataan piste A suoran L suhteen ja olkoon näin saatu piste A'. Tällöin lyhimmän matkan piste X on suorien $A'B$ ja L leikkauspiste (Kuva 4). Olkoon edelleen janan AA' ja suoran L leikkauspiste $= A''$ ja vastaavasti piste $B'' =$ pisteen B kohtisuora projektiopiste suoralla L. Ristikulmina ovat kulmat $A''XA'$ ja $B''XB$ yhtä suuret. Kolmiot AXA'' ja $A'XA''$ ovat yhtenevät (sks), joten yhtenevien kolmioiden vastinosina kulmat AXA'' ja $A'XA''$ ovat yhtä suuret. Siis kulma $AXA'' =$ kulma BXB'', joten kolmiot AXA'' ja BXB'' ovat yhtenevät (skk); yhtenevien kolmioiden vastinsivuina $AX = BX$, mistä edelleen seuraa, että piste $X =$ keskinormaalin MF piste Y.

Osoitetaan toiseksi, että myös maksimikulman piste $K = Y$. Konstruoidaan ympyrä $\Gamma(C)$, joka kulkee pisteiden A, Y ja B kautta. Jana (ympyrän $\Gamma(C)$ jänne) AB näkyy tältä ympyrältä pisteessä Y kulmassa BYA ja tunnetusti edelleen samassa kulmassa jokaisesta sen janan AB alapuolella olevasta ympyrän pisteestä. Erityisesti suoran L piste $Y =$ maksimikulmapiste K. Olkoon nimittäin K' jokin toinen suoran L piste ja piste H suoran $K'A$ ja ympyrän $\Gamma(C)$ leikkauspiste (Kuva 4). Nyt kolmion $BK'H$ kulman $K'HB$ vieruskulma BHA on suurempi kuin kulma $BK'H$ (vrt. esim. Lehtinen, Merikoski, & Tossavainen, 2007, 29). Koska kulma $BHA =$ kulma BYA, on piste $Y =$ maksimikulmapiste K.

Kouluun kenties sopivia havaintoja

Lyhimmän matkan ongelma (q_2) sopii monin tavoin käsiteltäväksi eri kouluasteilla. On esimerkiksi helppo osoittaa, oikeastaan jo alakoulun tiedoilla, että tällöin "tulokulma" = "lähtökulma". Kuvan 1 merkintöjä käyttäen kulma $AXP =$ kulma YXB. *Fermat'n periaatteen* (yhden niistä) mukaan valo käyttää kahden pisteen välillä reittiä, johon kuluu mahdollisimman vähän aikaa. Yhdistämällä edellä mainitut asiat (menemättä tässä sen syvemmälle optiikkaan) saataneen yksi *perustelu* paljon käytetylle valo-opin heijastuslaille: valon lähtökulma = tulokulma. Jos esimerkiksi halutaan pisteestä A osoitetun laservalon heijastuvan "peilisuoralta L" pisteeseen B, on valosäde lähetettävä kohtaan X. Valo kulkee siis tällöin paitsi lyhintä reittiä AXB pitkin, niin myös siten, että sen lähtökulma = tulokulma.

Tästä saataisiin yksinkertainen koulusovellus esimerkiksi jonkin seinän tms. korkeuden $B''B$ määrittämiseksi. Laitetaan laserosoitin jonkin lattiaan nähden kohtisuoran ja lattiassa kiinni olevan mittakepin $A''A$ päähän. Kokeillaan, mihin kohtaan (X) lattiaan pitää asettaa peili siten, että valo heijastuu siitä katonrajaan. Koska nyt valon heijastuskulma = tulokulma, ovat suorakulmaiset kolmiot $AA''X$ ja $BB''X$ yhdenmuotoiset (kk). Mitataan lattiassa olevat matkat $A''X$ ja $B''X$ ja ratkaistaan verranto $AA''/A''X = BB''/B''X$ janan pituuden BB'' suhteen. Samalla saa ratkaisunsa eräs ääriarvotehtävä (Kuva 5):

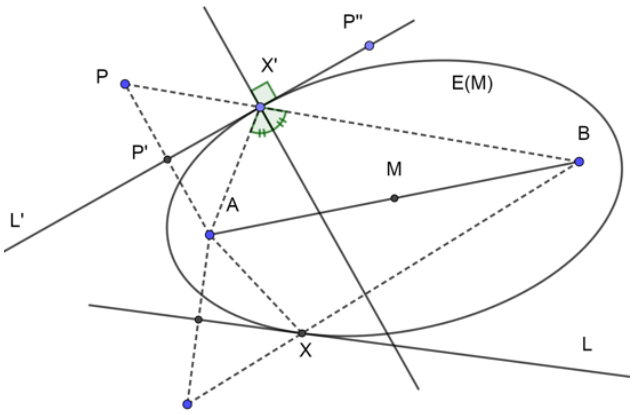


Kuva 5. Korkeuden $B''B$ määritys laserosoittimen avulla hakemalla ensin kokeellisesti peilin paikka X.

Olkoon sitten kääntäen piste X' suoralla L sellainen, että tulokulma siihen pisteestä $A =$ lähtökulma siitä pisteeseen B. Tällöin on edelleen helppo osoittaa, että pisteen X' on oltava lyhimmän matkan piste X. Monissa peleissä syötetään hyvillä kimmoisuusominaisuuksilla varustettua pelivälinettä (jääkiekkoa, biljardipalloa, koripalloa tms.) massiivisen, tasaisen seinämän tai lattian kautta esimerkiksi toiselle pelaajalle. Tällöinkin ilmeisesti sovelletaan tulokulman ja lähtökulman yhtä suuruuden lainalaisuutta – ja samalla myös minimimatkan periaatetta. Tältä pohjalta on vaivatonta ideoida

ja toteuttaa kaikille kouluasteille sopivia pelillisiä ääriarvotehtäviä ongelman q_2 hengessä.

Jo aiemmin todettiin, että suora L on ellipsin $E(M)$ tangentti, joka sivuaa ellipsiä kohdassa X (Kuva 1). Kuvaa 1 tarkastelemalla nähdään helposti, että ellipsin normaali pisteessä X puolittaa polttosäteiden XA ja XB välisen kulman. Tämä seikka liittyy oleellisesti siihen, että piste X on suoralla L oleva minimimatkapiste. Olkoon X' jokin toinen ellipsin $E(M)$ piste. Piirretään polttosäteiden $X'A$ ja $X'B$ välisen kulman puolittaja ja konstruoidaan tälle normaali eli ellipsin tangentti L' kohtaan X'. Tällöin nähdään, että "tulokulma" $P'X'A$ = "lähtökulma" $BX'P''$ (Kuva 6), joten X' on myös (suoraan L') liittyvä minimimatkapiste. Voidaan myös edelleen peilata piste A suoran L' suhteen pisteeksi P. Tällöin kulmat $P'X'A$ ja $PX'P'$ ovat yhtä suuret; näin myös kulma $PX'P'$ = kulma $BX'P''$, joten piste X' on todella suoralla PB (Kuva 6).



Kuva 6. Kulma $P'X'A$ = kulma $BX'P''$, joten myös ellipsin $E(M)$ mielivaltainen piste X' on minimimatkapiste (ellipsin siihen pisteeseen asetettuun tangenttiin L' liittyen).

Siis ilmeisesti jokainen ellipsin $E(M)$ piste X' voidaan tulkita myös minimimatkapisteeksi, mistä seuraa muun muassa erikoinen "peliominaisuus": jos vaikkapa jääkiekkoa pelattaisiin ellipsin muotoisessa kaukalossa, niin syöttö pisteestä A kaukalon seinämän kautta menisi *aina* perille toiselle pelaajalle, mikäli hän olisi kohdassa B.

Jo alakoulussa voisi ellipsiä ainakin *muotona* tutkia toiminnallisesti Kuvan 1 pohjalta siten, että ensin laitetaan kaksi pistettä (A ja B) sopivalle alustalle ja niiden alapuolelle jokin suora (L); sitten peilataan piste A suoran L suhteen pisteeksi A' ja mitataan narulla tms. pisteiden A' ja B välinen matka; tämän jälkeen kiinnitetään mittanarun toinen pää kohtaan A, toinen kohtaan B, kiristetään naru mielivaltaisesta kohdasta jollakin sopivalla piirtämisvälineellä – ja kireys säilyttämällä piirretään koko ellipsi. Luonnollisesti pisteiden A ja B sekä suoran L keskinäisiä suhteita voitaisiin muunnella loputtomiin. Näin saatujen kokemuksien tutkimista olisi helppo jatkaa *Geogebraa* käyttäen. Muotona ellipsi esiintyy jo alakoulussa esimerkiksi joissakin geometrian kuvioissa sekä tietysti aurinkokuntamme mallituksessa, joten sen alustava tarkastelu – ilman raskaanpuoleista laskennollista välineistöä – sopisi hyvin myös sinne. Toisaalta mikään ei estä hyödyntämästä laajemmin tässä kirjoituksessa ellipsiin liitettyjä asioita.

Maksimikulman kohdalla G. Polya (1973) mainitsee sotilaalliset sovellukset ampumasektoriin yms. liittyen. Mutta mahdollinen lukija voinee keksiä itse runsaasti rauhanomaisempia käyttömahdollisuuksia. *Solmun* ongelmapalstoilla (3/2016 & 1/2017) oli esimerkiksi taannoin jalkapalloon ja maksimikulmaan liittyviä kysymyksiä.

Huomionarvoista voisi olla myös *geometrisen keskiarvo* sekä sen geometrinen konstruointi; sehän putkahtaa esiin useassa kohdassa tässäkin kirjoituksessa. Samoin tuiki tavallisen tasakylkisen kolmion voi hahmottaa ääriarvotehtävänäkin, jopa kahdella tavalla: jos kolmion kanta sekä kahden muun sivun pituuksien summa on kiinnitetty, niin juuri tasakylkisessä kolmiossa kanta näkyy kolmion kärjestä suurimmassa mahdollisessa kulmassa (vrt. esim. Kuva 1; samoin tämä muoto maksimoi kolmion pinta-alan).

Ääriarvotehtäviä on tapana tutkia koulussa vasta differentiaalilaskennan keinoin. Tällöin yksinkertaisetkin kysymykset voivat "teknistyä" liikaa ja samalla estää niiden monipuolisen ymmärtämisen. Tässä kirjoituksessa käsitelty lyhimmän matkan (q_2) ongelma sopisi hyvin myös ääriarvotehtäväksi, kun on käsitelty ensin juurifunktioita ja niiden derivoimista. Mutta tällöin parempi ymmärrys asiasta voitaisiin saavuttaa käsittelemällä rinnalla myös tuon ongelman geometrista tulkintaa ja ratkaisua. Differentiaalilaskennan ääriarvotehtävänä kysymys maksimikulmasta (q_1) olisi luultavasti vaativa. Mutta ainakin toiminnallisesti voidaan tässä kirjoituksessa esitetty yhteys pisteiden X ja K välillä käydä läpi millä tahansa kouluasteella.

Kysymyksien q_1 ja q_2 käsittelyä on mahdollista monin tavoin muunnella, esimerkiksi tutkivan opiskelun ja "ilmiöoppimisen" mielessä. Suoran L voisi korvata esimerkiksi ympyränkaarella tms. Lyhimmän matkan ongelmaa voisi olla kiintoisaa edelleen yleistää vaikkapa *Fermat'n pisteen* hakemiseen kolmion sisältä. Tämä on tutkittavissa tyylikkäästi geometrisesti, jolloin ratkaisua voisi ensin hakea kokeellisesti *Geogebran* avulla. Kenties hieman yllättävästi Fermat'n piste löytyy myös tekemällä melko yksinkertainen koe saippualiuoksella – tai peräti punnitsemalla (ks. esim. Park, & Flores, 2015); näissä järjestelyissä luonto ratkaisee näyttävästi matemaattisesti melko vaativan ääriarvotehtävän. Toisena monitasoisena kysymyksenä mainittakoon ns. *Fagnanon ongelma*: Millä teräväkulmaisen kolmion

sisään piirretyllä kolmiolla (jonka kärjet ovat kolmion sivuilla) on pienin piiri (ks. esim. Lehtinen ym., 2007, 95). Lyhin matka sinänsä, samoin kulma, ovat luonnollisesti mukana lukuisissa muissakin yhteyksissä, myös arkisissa.

Lopuksi ...

Matematiikan kouluopettajalla Suomessa on oltava varsin runsaasti tieteensä opintoja, mikä ilman muuta on erinomainen asia. Opettaminen koulussa vaatii silti opettajalta muutakin. Jollakin konstilla ainakin osa oppilaista pitäisi saada kiinnostumaan ja sitoutumaan opiskeluun pintaoppimista syvällisemmin. Olennaista tässä lienee kunnolliset ajattelukokemukset; oppilaiden olisi päästävä joskus aidosti myös *tekemään* matematiikkaa, *osallistumaan* sen käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien muodostamiseen tavanomaisemman valmiiden oppisisältöjen omaksumisen ohella. Opettajilla olisi tässä asiassa epäilemättä keskeinen rooli: heidän olisi kyettävä ideoimaan ja toteuttamaan aktiviteetteja, joiden kautta edellä sanottua voitaisiin toteuttaa. Tämä saattaa vaatia aluksi omien ajatustottumusten avartamista, ja kenties uskaltautumista myös jonkinlaisille epämukavuusalueille. Kirjoitukseni (2020) on yksi kertomus tämän tyyppisestä seikkailusta tuntemattomaan maastoon.

Pyrin siinä ikään kuin kantapään kautta perehtymään ns. prosessinäkökulmaan matematiikassa. Didaktiikan piirissä tätä puolta on haluttu nostaa esiin juuri syvempien oppimistuloksien aikaansaamiseksi. (Tämä ei tarkoita millään muotoa matematiikan muiden puolien väheksymistä.) Tällöin ei etukäteen ole tiedossa, mitä voi tulla eteen ja mitä tietoja voidaan tarvita. On myös mahdollista, että silloin pitää luoda jotakin uutta tai sattumoisin tullaan luoneeksi jotain sellaista – suhteessa omaan tuttuun tietorakenteeseen – jotta asiat etenisivät. Jotakin tällaista todella tapahtui tässä vaatimattomassa "prosessissani" (2020). Mutta ennen kaikkea tähän liittyi merkillinen sitoutuminen, joka taisi ainakin osittain johtua siitä, että koin käsittelemäni kysymyksen omakseni. Yhtä poikkeusta lukuun ottamatta en alussa mainitussa kirjoituksessani pyytänyt keneltäkään apua, enkä myöskään käyttänyt Googlea tms., koska siten olisin sotkenut tämän vaellukseni mielenmaisemat. Tällainen menettely on nähdäkseni lähellä myös didaktiikan piirissä esiintuotua *kehitykselliistä lähestymistä* (vrt. esim. Haapasalo & Kadijevich, 2000; 2004). Tavanomaisempaan opetukseen koulussa, yliopistossa jne. voidaan silloin viitata käsitteellä *koulutuksellinen lähestyminen*. Mahdollinen lukija voinee havainnollistaa näiden lähestymisien eroja esimerkiksi vertailemalla tässä nyt käsillä olevassa kirjoituksessa esitettyjä todistuksia, niiden "pelkistettyjä tarinoita" – ja ihan lopun vielä paljon pelkistetympää hienoa todistusta – ja muuta samaa asiaa koskevaa, enemmän laadullista ja havainnollista järkeilyä, jota käsiteltiin tämän kirjoituksen alkupuolella (vrt. Kuva 1).

Kokemukseni valossa rohkenen suositella opettajille omien avoimien kysymyksien asettamista ja tutkimista, ainakin joskus. Tätä kautta paljastuu niin oman ajattelun avaruus kuin ahtauskin. Ainoastaan mielikuvitus voi rajoittaa kysymysten valintaa, ja maailma kyllä vastaa niihin, ennemmin tai myöhemmin. Tällaisten kokemuksien kautta oppisisällöille ja yleisemmin matemaattisille toimintatavoille saadaan luotua merkityksellisyyttä, jonka myötä myös sitkeä työnteko ja ajattelu sekä monet muut matemaattiset hyveet olisivat luonnollisia ja laajasti hyödyllisiksi koettuja asioita. Yksi kiintoisa konkreettinen sivuvaikutus prosessinäkökulmasta on se, että opettaja huomaa pystyvänsä kehittämään itse luontevasti uusia toiminnallisia työtapoja, harjoitustehtäviä sekä jopa uusia matemaattisia väitteitä.

... Tai ei ihan vielä

Matematiikan professori emeritus Jorma Merikoski esitti hypoteesille Q (vrt. Kuva 1) lyhyen todistuksen. (Kävimme asian tiimoilta aikoinaan kirjeenvaihtoa; tämän kirjoittajan "puolustukseksi" voitaneen sanoa, ettei hänkään ilmeisesti todistusta esittämälleni hypoteesille noin vain keksinyt, vaan se vaati hiukan työtä myös häneltä; myös itse kysymys eli hypoteesi Q, vrt. Kuva 1, oli hänellekin entuudestaan tuntematon.) Siinä ei ensimmäiseksi kiinnitetä pistettä X lyhimmän matkan pisteenä, vaan annetaan sen olla alussa suoran L mielivaltainen piste. Suoran L piste K on sitten se piste, joka saadaan kuvion 1 mukaisella konstruktiolla pisteestä X keskinormaalin MY pisteen C kautta (suorien T ja L leikkauspisteenä). Olkoot sitten X_1 ja X_2 suoran L pisteitä, ja olkoot K_1 ja K_2 vastaavat konstruktiolla saadut suoran L pisteet, joita vastaavat konstruktion mukaiset keskinormaalin MY pisteet C_1 ja C_2. Jos nyt $X_1A + X_1B < X_2A + X_2B$, niin $C_1M < C_2M$, mistä seuraa edelleen, että piste K_2 on pisteen K_1 oikealla puolella. Tällöin kulma $BK_2A <$ kulma BK_1A , joten K_2 ei ole maksimikulmapiste. Jos siis X ei ole minimimatkapiste, niin K ei ole maksimikulmapiste, sillä pienentämällä summaa $XA + XB$ saadaan suurempi kulma BXA. Maksimikulmapiste on olemassa. Näin se saadaan valitsemalla pisteeksi X minimimatkapiste – ja vain siten.

Lähteet

Haapasalo, L. & Kadijevich, Dj. (2000). Two types of Mathematical Knowledge and Their Relation. Journal für Mathematikdidaktik 21 (2), 139–157.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, Räsänen-Kupari-Ahonen-Malinen (toim.). Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä.

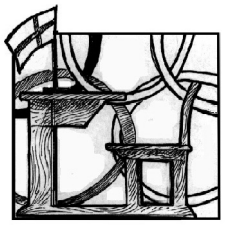
Lehtinen, M., Merikoski, J., & Tossavainen, T. (2007). Johdatus tasogeometriaan. WSOY Oppimateriaalit Oy.

Park, J., & Flores, A. (2015). Fermat's point from five perspectives. International Journal of Mathematical Education 46(3).

Pehkonen, E. (1999). Professorien matematiikkakäsityksistä. Kasvatus 30 (2), 120–127.

Polya, G. (1973). Induction and Analogy in Mathematics. Volume I of Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Poranen, J. (2020). On the process aspect in mathematics through genuine problem-solving. Teoksessa Subject Teacher Education in Transition. Educating Teachers for the Future. Edited by Ropo, E., & Jaatinen, R. Tampere University Press. ISBN 978-952-359-016-8 (PDF).



EGMO 2020 – haastavia tehtäviä kotoa käsin

Idaliina Kuusisto, Ulrika Kaara, Veera Nurmela, Anni Tapionlinna

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin vuonna 2020 tilanteesta johtuen etäkilpailuina. Kilpailuihin kuitenkin osallistui 204 tyttöä 53 eri maasta! Tänä vuonna tehtävät olivat kenties edellisten vuosien tehtäviin verrattuna vaikeampia.

Kilpailut olivat hieno kokemus myös kotoa käsin osallistuttuna. Perinteisesti kilpailuissa oli avajaiset, yhteisiä aktiviteetteja ja loppuseremonia. Pääsimme esimerkiksi kokemaan ekskursiona virtuaalisesti Keukenhofin tulppaanipellot.

Kun EGMO:n kaltainen tapahtuma järjestetään etänä, on haasteena tutustuminen muiden maiden kilpailijoihin. Muihin matematiikasta kiinnostuneisiin tutustuminen on tärkeä osa kilpailua. Kilpailun järjestäjät tekivät kuitenkin hyvää työtä etäaktiviteettien järjestämisessä. Monet kilpailijat kirjoittivat mielenkiinnonkohteistaan ja vaihtoivat yhteystietoja sille tarkoitetulla alustalla keskustellakseen kaukaistenkin kanssakilpailijoiden kanssa. Suomen joukkue oli yhteydessä esimerkiksi Latviaan ja Costa Ricaan.

Kaikki tehtävät olivat haastavia, mutta ne olivat hyvää mietittävää. Tehtävät olivat viime vuosien tehtäviin verrattuina hieman vaikeampia, mikä näkyi kilpailijoiden pisteissä. Kisat tehtiin kotoa käsin ja tämä herätti erilaisia ajatuksia. Kilpailutilanne tuntui hyvin tavalliselta, kun tehtäviä teki kotona. Toisaalta kotona kilpailuihin valmistautuessa täytyi olla itse tarkempi, että oikeanlaisen ”kisatunnelman” sai päälle.

Suomi oli osallistuneista Pohjoismaista paras ja 42. kaikkiaan 53 joukkueen joukossa. Lisäksi Suomi oli 30. osallistuneista 39 Euroopan maasta. Suhteutettuna osallistuneiden maiden kokonaismäärään nämä olivat parhaat tulokset vuoden 2014 jälkeen.

Tehtäviä

Tehtävä 1

Positiiviset kokonaisluvut a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} täyttävät ehdon $2 \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ kaikilla $n = 0$, 1, 2, …, 3028. Todista, että ainakin yksi luvuista a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} on jaollinen luvulla 2^{2020}.

Esimerkkiratkaisu

Todistetaan induktiolla seuraava väite: Jos kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_{3n}$ täyttävät ehdon $2 \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$, niin a_n on jaollinen luvulla 2^{2n}.

Alkuaskel: Yhtälöstä $2a_3 = a_2 + 4a_1$ seuraa, että a_2 on parillinen. Niinpä yhtälöstä $2a_2 = a_1 + 4$ seuraa, että a_1 on jaollinen neljällä ($4 = 2^2 \cdot 1$).

Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee luvulle $n = k - 1$. Tutkitaan tehtävän ehdot täyttäviä lukuja a_0, a_1, …, a_{3k}. Kun sovelletaan induktio-oletusta sekvensseihin $(a_0, a_1, \ldots, a_{3k-3})$, $(a_1, a_2, \ldots, a_{3k-2})$,

$(a_2, a_3, \ldots, a_{3k-1})$ ja $(a_3, a_4, \ldots, a_{3k})$, huomataan, että a_{k-1}, a_k, a_{k+1} ja a_{k+2} ovat kaikki jaollisia luvulla 2^{2k-2}. Nyt samalla tavalla kuin alkuaskeleessa, yhtälö $2 \cdot \frac{a_{k+2}}{2^{2k-2}} = \frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}} + 4 \cdot \frac{a_k}{2^{2k-2}}$ johtaa siihen, että $\frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}}$ on jaollinen kahdella ja siksi yhtälö $2 \cdot \frac{a_{k+1}}{2^{2k-2}} = \frac{a_k}{2^{2k-2}} + 4 \cdot \frac{a_{k-1}}{2^{2k-2}}$ johtaa siihen, että $\frac{a_k}{2^{2k-2}}$ on jaollinen neljällä. Siten a_k on jaollinen luvulla 2^{2k} ja induktioväite on todistettu. Tällöin a_{1010} on jaollinen luvulla $2^{2 \cdot 1010} = 2^{2020}$, joten tehtävä on ratkaistu.

Tehtävä 4

Sanotaan, että lukujen $1, 2, \ldots, m$ permutaatio on tuore, jos ei ole olemassa positiivista kokonaislukua $k < m$, jolle permutaation k ensimmäistä jäsentä ovat $1, 2, \ldots, k$ jossakin järjestyksessä. Olkoon f_m kokonaislukujen $1, 2, \ldots, m$ tuoreiden permutaatioiden lukumäärä. Todista, että $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ kaikilla $n \geq 3$.

Esimerkiksi, jos $m = 4$, niin permutaatio $(3, 1, 4, 2)$ on tuore, kun taas permutaatio $(2, 3, 1, 4)$ ei ole.

Esimerkkivastaus

Olettaen, että $n > 3$, konstruoidaan f_{n-1} erilaista tuoretta permutaatiota. Tutkitaan tuoreita permutaatioita luvuista $1, 3, 4, \ldots, n$, siis luku 2 on poistettu. Permutaatiot ovat muotoa $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ missä $x_1 \neq 1$ ja $\{x_1, \ldots, x_k\} \neq \{1, 3, \ldots, k+1\}$. Tällaisia permutaatioita on täsmälleen f_{n-1}. Kun permutaatioon lisätään luku 2 ennen mitä tahansa lukua tai viimeiseksi, saadaan seuraavat permutaatiot:

$$(2, x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, (x_1, \ldots, x_{i-1}, 2, x_i), \\ \ldots, (x_1, \ldots, x_{n-1}, 2).$$

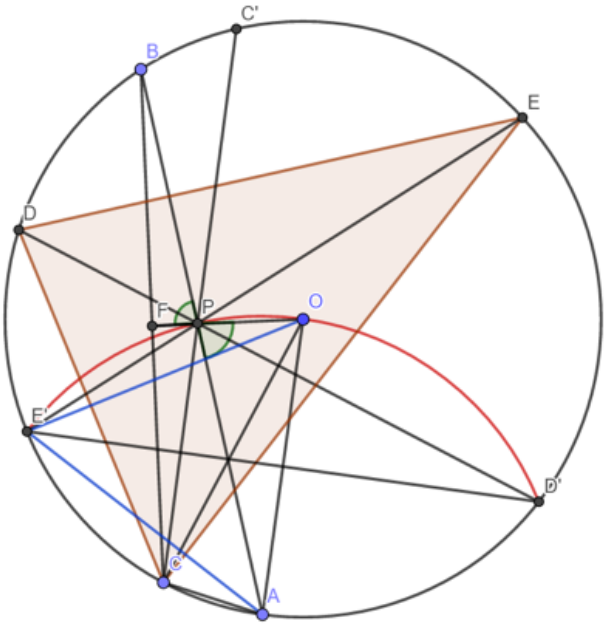
Todistetaan, että kaikki nämä permutaatiot ovat tuoreita: Tehdään vastaoletus ja oletetaan jonkin permutaatioista olevan epätuore. Siis jollekin $1 \leq k \leq n-1$ ensimmäiset k jäsentä ovat $1, \ldots, k$. Jos $k = 1$, ensimmäinen jäsen on 1. Ensimmäinen jäsen on kuitenkin joko 2 tai $x_1 \neq 1$, joten se ei ole mahdollista. Jos $k \geq 2$, ensimmäiset k jäsentä ovat 2 ja $x_1, \ldots, x_{k-1}$, jolloin $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} = \{1, 3, \ldots, k\}$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ on tuore. Niinpä permutaatiot ovat tuoreita. Koska mahdollisia paikkoja luvun 2 lisäämiselle on $n - 1 + 1 = n$, saadaan $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Tehtävä 5

Olkoon ABC kolmio, jolle $\angle BCA > 90°$. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ säde on R. Janalla AB on sisäpiste P, jolle $PB = PC$ ja janan PA pituus on R. Janan PB keskinormaali leikkaa ympyrän Γ pisteissä D ja E. Todista, että P on kolmion CDE sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Ratkaisu

Piirretään ensiksi kuva hahmottamaan tilannetta.



Piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste, jos se on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siis todistetaan, että piste P on kolmion CDE kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Riittää todistaa, että P on kahdella kolmion CDE kulman kulmanpuolittajalla. Todistetaan siis, että $\angle CEP = \angle DEP$ ja $\angle PDC = \angle EPC$.

Olkoot pisteet C', D' ja E' janojen CP, DP ja EP leikkauspisteet kolmion ABC ympärysympyrän kanssa, tässä järjestyksessä.

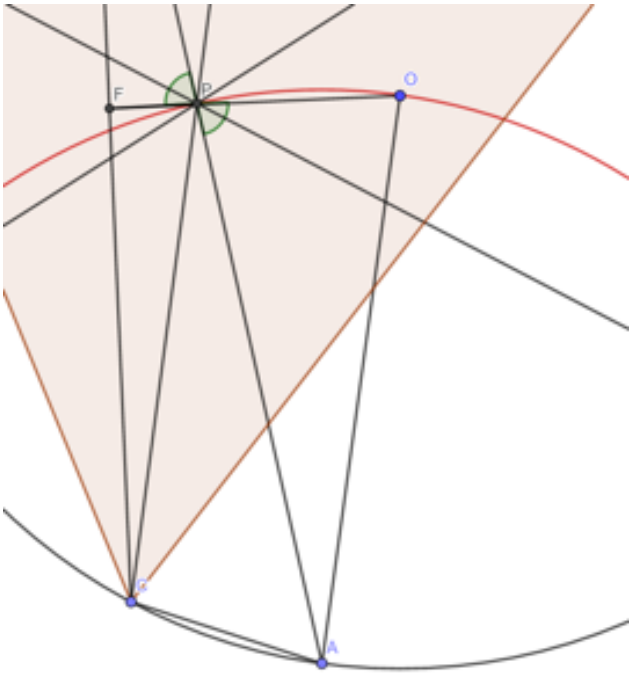
D ja E ovat janan PB keskinormaalilla. Tästä seuraten $BE = EP$ ja $PD = BD$. Kolmiot EPB ja DPB ovat siis tasakylkisiä. $ADBD'$ on jännenelikulmio. Tästä saadaan, että kolmiot APD' ja DPB ovat yhdenmuotoisia. Täten myös APD' on tasakylkinen. Siis $AD' = AP$. Vastaavasti $AE'BE$ on jännenelikulmio, mistä seuraten kolmiot APE' ja EPB ovat yhdenmuotoiset. Myös APE' on tällöin tasakylkinen. Siis $AP = AE'$. Yhdistettynä $AD' = AP = AE'$. Tiedetysti $AP = AO = R$. Siis $AD' = AP = AE' = AO = R$. Täten pisteet D', O, P ja E' ovat samalla ympyrällä, jonka keskipisteenä on A.

O ja E' ovat ympyrällä, jonka keskipiste on A. A ja E' ovat ympyrällä, jonka keskipiste on O. Saadaan

$$OE' = AO = AE'.$$

Siis kolmio $OE'A$ on tasasivuinen. Vastaavasti kolmio OAD' on tasasivuinen. $\angle OAE' = \angle AOE' = \angle D'OA = \angle D'AO = 60°$.

Piirretään tasakylkiselle kolmiolle CPB korkeusjana kulmasta P. Olkoon korkeusjanan kantapiste F. Siis $\angle PFC = 90°$. F on siis sivun BC keskipiste. Myös kolmio OBC on tasakylkinen, joten F on myös tämän kolmion korkeusjanan kantapiste. F, P ja O ovat samalla suoralla.



$PB = PC$. Siis myös $\angle BPF = \angle CPF$.

$$\angle CPF = \angle BPF = \angle APO = \angle POA$$
$$\angle OAP = 180° - 2\angle APO = 180° - 2\angle CPF$$
$$\angle CPA = 180° - \angle CPF - \angle APO = 180° - 2\angle CPF$$

Koska $\angle CPA = \angle PAO$, ovat CP ja OA yhdensuuntaiset.

Suorakulmaisesta kolmiosta BPF saadaan $\angle BPF = 90° - \angle FBP = 90° - \angle CBA$.

Kehäkulmalauseella $\angle COA = 2\angle CBA = 2(90° - \angle BPF) = 2(90° - \angle CPF) = 180° - 2\angle CPF$.

Edelliseen yhdistettynä on siis $\angle COA = \angle CPA = \angle OAP$. $CPOA$ on tästä seuraten jännenelikulmio ja puolisuunnikas, jonka sivut CP ja OA ovat yhdensuuntaiset.

Lasketaan nyt kulmat $\angle CEP$, $\angle DEP$, $\angle PDC$ ja $\angle EPC$. E', P, O ja D' ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalausetta käyttäen

$$\begin{aligned}\angle CEP &= \angle CEE' = \frac{1}{2}\angle COE' \\ &= \frac{1}{2}(\angle AOE' - \angle COA) = \frac{1}{2}(60° - \angle OAP), \\ \angle DEP &= DEE' = \angle DD'E' = \angle PD'E' = \frac{1}{2}\angle PAE' \\ &= \frac{1}{2}(\angle OAE' - \angle OAP) = \frac{1}{2}(60° - \angle OAP).\end{aligned}$$

Siis $\angle CEP = \angle DEP$. P on kulmanpuolittajalla EE'. Vastaavasti

$$\begin{aligned}\angle CDP &= CDD' = \frac{1}{2}COD' = \frac{1}{2}(D'OA + COA) \\ &= \frac{1}{2}(60° + COA) = \frac{1}{2}(60° + OAP), \\ \angle EDP &= EDD' = EE'D' = PE'D' = \frac{1}{2}PAD' \\ &= \frac{1}{2}(\angle D'AO + \angle OAP) = \frac{1}{2}(60° + \angle OAP).\end{aligned}$$

$\angle CDP = \angle EDP$ .Siis P on kulmanpuolittajalla DD'. Koska P on kahdella kolmion CDE kulmanpuolittajalla, on P kolmion CDE sisäympyrän keskipiste.

Solmu 2/2020

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)
00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:
Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:
Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:
toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:
Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto
Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Olli Järviniemi, opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto
Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio
Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology
Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto
Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, Yhteiskuntadatatieteen keskus, Helsingin yliopisto
Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:
Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto
Mika Koskenoja, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto
Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:
Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com
Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:
Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu
Juha Lehrbäck, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto
Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatiotieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto
Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:
Noora Isoeskeli

Numeroon 3/2020 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 15.11.2020 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.