Suorakulmaisista kolmioista ja matemaatikkojen kommunikaatiosta

Tuomas Korppi

Johdanto

Pari päivää sitten lähetin eräälle matematiikka-aiheiselle keskustelupalstalle viestin

> Tää rupes vaivaamaan, ja olen väsynyt enkä jaksa miettiä, joten kysyn täällä: Voidaanko jokaista suorakulmaista kolmiota approksimoida mielivaltaisen tarkasti suorakulmaisella kolmiolla, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja?

Kun mieleen tulee matemaattinen probleema, oikea lähestymistapa on tietysti yrittää ratkaista sitä itse eikä kysellä netissä. Olin kuitenkin lihassäryn takia nukkunut edellisenä yönä kokonaista kaksi tuntia, enkä ollut matematiikantekokunnossa. Niinpä päätin fuskata hiukan.

Ratkaisukin probleemaan ilmestyi palstalle parin tunnin kuluessa. Tässä kirjoitelmassa käymme ensin läpi sen, mitä kysymykseni tarkoittaa ja miksi se on mielenkiintoinen. Sen jälkeen annamme palstalle tulleen ratkaisun ja käymme sen huolella läpi.

Pythagoraan kolmikot

Kuten lukija varmaan tietää, on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 3 ja 4, ja jonka hypotenuusan pituus on 5. Tämä on kuitenkin poikkeuksellinen suorakulmainen kolmio. Yleensä, kun kateettien pituudet ovat kokonaislukuja, hypotenuusan pituus ei ole kokonaisluku, eikä se yleensä ole edes rationaaliluku. Jos esimerkiksi kummankin kateetin pituus on 1, on hypotenuusan pituus $\sqrt{2}$.

Kolmikoilla (a, b, c), missä a, b ja c ovat kokonaislukuja ja suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet, onkin oma nimi: Pythagoraan kolmikot. Näitä kolmikkoja luonnehtii se, että $a^2 + b^2 = c^2$. Kun palstalle lähettämäni kysymys tuli mieleeni, muistin, että Pythagoraan kolmikoita on ääretön määrä, mutta en muistanut niistä mitään muuta.

Aloinkin siis miettiä, mitä kaikkia suorakulmaisen kolmion muotoja voidaan Pythagoraan kolmikoilla toteuttaa. On selvää, ettei jokaiselle suorakulmaiselle kolmiolle löydy yhdenmuotoista kolmiota, jonka sivujen pituudet tulevat Pythagoraan kolmikosta (kerrottaessa esim. $1, 1$ ja $\sqrt{2}$ millä tahansa positiivisella luvulla eivät kaikki kolme tuloa voi olla yhtaikaa kokonaislukuja), mutta päästäisiinkö lähelle mitä tahansa muotoa?

Voidaan myös miettiä rationaalisia pythagoraan kolmikoita, siis kolmikoita $(\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f})$ missä $(\frac{a}{d})^2 + (\frac{b}{e})^2 = (\frac{c}{f})^2$. Heti huomataan, että tällaisia kolmikoita on yhtä helppo tai vaikea löytää kuin Pythagoraan kokonaislukukolmikoita. Jos esim. edellä mainitun kolmikon jokainen jäsen kerrotaan luvulla def, saadaan Pythagoraan kokonaislukukolmikko. Toisaalta jokaisesta Pythagoraan kokonaislukukolmikosta (a, b, c) saadaan rationaalisia

Pythagoraan kolmikoita kertomalla jokainen jäsen samalla rationaaliluvulla.

Tällainen jokaisen kolmikon jäsenen kertominen samalla luvulla muuttaa toki kolmikkoa vastaavan kolmion kokoa, mutta ei sen muotoa: Kerrottua kolmikkoa vastaava kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäistä kolmikkoa vastaavan kolmion kanssa.

Rationaaliluvut

Rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa. Tämä tarkoittaa sitä, että jos on annettu reaaliluvut x ja y, $x < y$, on olemassa rationaaliluku q, jolle $x < q < y$. Jos x on positiivinen, luku q löydetään esimerkiksi valitsemalla $n \in \mathbb{N}$, jolle $10^{-n} < y - x$, ja sen jälkeen valitsemalla q:ksi y:n kokonaisosa ja $n + 1$ ensimmäistä desimaalia (ja jos tämä $q = y$, vähennetään siitä vielä pikkuriikkinen rationaaliluku). Jos x on negatiivinen, q löydetään samankaltaisella menetelmällä, jonka lukija saa itse keksiä.

Tämä tarkoittaa sitä, että jos reaaliluku x on annettu, löytyy kuinka läheltä x:ää tahansa rationaalilukuja, eli reaalilukuja voidaan approksimoida rationaaliluvuilla niin tarkasti kuin halutaan.

Joten mieleeni tuli, pätisikö sama suorakulmaisille kolmioillekin. Tietysti suorakulmaisen kolmion kateettien approksimoiminen rationaalipituisilla kateeteilla on helppoa, mutta tällöin hypotenuusasta yleensä tulee irrationaalipituinen. Jotta se saataisiin rationaalipituiseksi, tarvitaan Pythagoraan kolmikoita.

Mielivaltainen tarkkuus

Alkuperäisessä kysymyksessäni puhun mielivaltaisesta tarkkuudesta. Matemaatikot käyttävät usein sanaa "mielivaltainen" puhuessaan toisilleen epämuodollisesti. "Homma onnistuu mielivaltaisella x" tarkoittaa samaa kuin "Homma onnistuu, olipa x mikä tahansa."

Näin kysymykseni voidaan ilmaista hiukan täsmällisemmin:

> Olkoon A suorakulmainen kolmio ja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Onko välttämättä olemassa suorakulmainen kolmio B, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja ja joka approksimoi A:ta ϵ-tarkkuudella?

Ja ϵ-tarkkuudella approksimointi tarkoittaa tietysti seuraavaa: Kolmio DEF approksimoi kolmiota ABC tarkkuudella ϵ, jos A:n ja D:n etäisyys on alle ϵ, B:n ja E:n etäisyys on alle ϵ, sekä C:n ja F:n etäisyys on alle ϵ.

Ratkaisu

Pari tuntia kysymyksen lähettämisestä Sampo Tiensuu lähettikin palstalle seuraavan ratkaisun.

> Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja m>n, niin a=m^2-n^2, b=2mn ja c=m^2+n^2 muodostavat pythagoraan kolmikon.
>
> Luvut, jotka ovat muotoa x=m/n ovat tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa. Nyt kolmion kateettien suhde voidaan kirjoittaa a/b = (1/2)*(m/n-n/m) = (1/2)*(x-1/x). Koska x-1/x on jatkuva ja saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot, kun x on positiivinen reaaliluku, niin myös kateettien suhteet ovat positiivisten reaalilukujen joukossa tiheässä.
>
> Tämän perusteella sanoisin, että voi approksimoida.

Kun matemaatikot kommunikoivat keskenään netissä, he eivät aina viitsi kirjoittaa julkaisukelpoista tekstiä. He luottavat siihen, että lukija osaa täydentää yksityiskohdat mielessään. Seuraavaksi käymmekin läpi, kuinka yllä olevista ideoista saadaan koottua julkaisukelpoinen ratkaisu.

(Tiensuulle oli myös käynyt pieni fiba. Luvut muotoa m/n, $m > n$, eivät ole tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa vaan ykköstä suurempien reaalilukujen joukossa. Osaava lukija pystyy kuitenkin paikkaamaan fiban lukiessaan ratkaisua, koska oikeasti $(1/2)(x-1/x)$ saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot, kun x käy läpi kaikki ykköstä suuremmat reaalilukuarvot. Ratkaisu on siis periaatteeltaan oikein fibasta huolimatta.)

Laskut

Ensin ratkaisussa väitetään, että olivatpa m, n mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, joille $m > n$, niin $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ on Pythagoraan kolmikko. Tämä on tietysti helppo todeta laskemalla

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2.\end{aligned}$$

Eli kyseessä tosiaan on Pythagoraan kolmikko.

Seuraavaksi väitetään, että jos edellä kateetteja merkitään $a = m^2 - n^2$ ja $b = 2mn$, kateettien pituuksien suhde voidaan kirjoittaa $a/b = (1/2)(m/n - n/m)$. Tämäkin voidaan todentaa laskemalla

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2 - n^2}{2mn} = \frac{m^2}{2mn} - \frac{n^2}{2mn} = \frac{m}{2n} - \frac{n}{2m}.$$

Nyt siis tiedetään, että jos m ja n ovat mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, missä $m > n$, niin $(1/2)(\frac{m}{n} - \frac{n}{m})$ on erään Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituuksien suhde. Seuraavaksi alamme pohtimaan, mitä arvoja tämä lauseke voi saada.

Funktio f

Merkitään $f\colon]1,\infty[\;\to\;]0,\infty[$, $f(x) = (1/2)(x - 1/x)$. Heti nähdään, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ja $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Koska jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä, vedämme näistä raja-arvotarkasteluista sen johtopäätöksen, että f on surjektio.

Edellisessä luvussa totesimme, että jos m ja n ovat mitä tahansa positiivisia kokonaislukuja, missä $m > n$, niin $f(m/n) = (1/2)(\frac{m}{n} - \frac{n}{m})$ on erään Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituksien suhde.

Kun m ja n saavat edellä kaikki mahdolliset arvonsa, m/n käy läpi kaikki ykköstä suuremmat rationaaliarvot. Jotta saisimme tietää, mitä arvoja lauseke $f(m/n)$ saa, meidän on siis määritettävä arvot $f(q)$, missä q on ykköstä suurempi rationaaliluku.

Tiheys

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $A =]a,\infty[$. Sanomme, että joukko $C \subset A$ on tiheässä välillä A jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, on olemassa $c \in C$, jolle $x < c < y$.

Edellä läpikäydyn nojalla tiedämme, että ykköstä suuremmat rationaaliluvut ovat tiheässä välillä $]1,\infty[$.

Tarvitsemme myös seuraavaa teoreemaa:

Teoreema 1. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $A =]a,\infty[$ ja $B =]b,\infty[$. Olkoon $g\colon A \to B$ jatkuva surjektio ja $C \subset A$ tiheässä välillä A. Tällöin kuvajoukko gC on tiheässä välillä B.*

Jotta jatkuville funktioille voisi todistaa teoreemoja matemaattisen täsmällisesti, tarvitaan matemaattisen täsmällinen määritelmä jatkuvuudelle. Sellainen voidaan antaa (nk. δ–ϵ-määritelmä), mutta emme tässä siihen mene, joten teoreema jää uskon varaan. Teoreema on kuitenkin huomattavan uskottava siitä intuitiosta käsin, että jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä. Jatkuvuuden δ–ϵ-määritelmän tuntevia lukijoita kehotamme todistamaan teoreeman itse, se ei ole vaikeaa.

Teoreeman nojalla siis arvot $f(m/n)$ ovat tiheässä positiivisten reaalilukujen joukossa. Mutta arvot $f(m/n)$ ovat Pythagoraan kokonaislukukolmikoiden kateettien pituuksien suhteita. Tämä tarkoittaa sitä, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja, $x < y$, aina on olemassa Pythagoraan kokonaislukukolmikon kateettien pituuksien suhde q, jolle $x < q < y$, olivatpa x ja y kuinka lähellä toisiaan.

Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kaikenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita ei voida toteuttaa Pythagoraan kokonaislukukolmikoilla, mielivaltaisen lähelle mitä tahansa muotoa päästään.

Alkuperäisen kysymyksen vastaus

Nyt siis vastaamme alkuperäiseen kysymykseen (tai sen täsmällisempään muotoiluun)

> Olkoon A suorakulmainen kolmio ja $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Onko välttämättä olemassa suorakulmainen kolmio B, jonka sivujen pituudet ovat rationaalilukuja ja joka approksimoi A:ta ϵ-tarkkuudella?

ja vastauksemme on ”Kyllä.”

Olkoon siis A suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat x ja y, ja olkoon $\epsilon > 0$.

Valitaan ensin rationaaliluku $q > 0$, jolle $x - \epsilon < q < x + \epsilon$. Tämä voidaan tehdä, koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa.

Nyt väliltä $](y-\epsilon)/q, (y+\epsilon)/q[$ valitaan luku $s > 0$, joka on jonkun Pythagoraan kokonaislukukolmikon (a, b, c) kateettien pituuksien suhde. Tällainen s voidaan valita edellisen luvun tulosten perusteella, ja s on rationaaliluku, koska $s = b/a$.

Tutkitaan nyt suorakulmaista kolmiota B, jonka kateettien pituudet ovat q ja sq. Tämä kolmio on yhdenmuotoinen suorakulmaisen kolmion kanssa, jonka kateettien pituudet ovat a ja b, ja jonka hypotenuusan pituus on c. Niinpä kolmion B hypotenuusan pituus on qc/a, eli rationaaliluku. Lisäksi $x - \epsilon < q < x + \epsilon$ luvun q valinnan perusteella, ja $y - \epsilon < sq < y + \epsilon$. Näin ollen kolmio B on vaadittu approksimaatio.

Lopuksi

Olen huomannut, että matematiikanopettajat ovat yleensä hanakampia vaatimaan ilmaisulta täsmällisyyttä kuin varsinaiset matemaatikot. Esimerkiksi kun ilmoitimme pituuksia suullisesti ala-asteen matematiikantunnilla, opettaja huomautti aina, jos oppilas ei ilmoittanut mittayksikköä numeroarvon perään, vaikka mittayksikkö olisi ollut asiayhteydestä itsestäänselvä.

Toki julkaistessaan artikkeleita oikeissa tieteellisissä julkaisuissa ja vastaavissa yhteyksissä matemaatikotkin käyttävät täsmällistä ilmaisua, mutta matemaatikoiden kahvipöytäkeskustelut voivat olla hyvinkin epämuodollisia, vaikka puhuttaisiin matematiikasta. Esimerkiksi tässä tapauksessa Tiensuu ymmärsi vallan hyvin, mitä minä ajoin kysymykselläni takaa, ja minä ymmärsin vallan hyvin, mitä Tiensuu ajoi ratkaisullaan takaa.

Mitä taas tässä kirjoitelmassa todistettuun tulokseen tulee, ainakin itselleni oli hiukan yllättävää tajuta, että rationaalisia Pythagoraan kolmikoita on noin runsaasti. Jos käsitekoneistoa kehitetään hiukan lisää, voidaan nimittäin tämän kirjoitelman tulokset muotoilla teoreemaksi, että rationaaliset Pythagoraan kolmikot ovat tiheässä kaikkien reaalisten Pythagoraan kolmikkojen joukossa.

Kysymykset siitä, ovatko jonkuntyyppiset oliot tiheässä jossain laajemmassa oliojoukossa, ovat merkittäviä ihan tutkimustason matematiikassakin. Merkittäviä ovat myös kysymykset siitä, voidaanko jokaista jonkun laajemman oliojoukon jäsentä approksimoida mielivaltaisella tarkkuudella jonkun suppeamman oliojoukon jäsenillä. Itse asiassa nämä kaksi kysymystä ovat hyvin usein saman kolikon kaksi eri puolta. Suomessakin on tehty tällaisia kysymyksiä koskevaa tutkimusta ihan kansainvälisellä tutkimustasolla.

Pähkinöitä

1. Osoita, että ei ole positiivista reaalilukua a, jolle sekä $a \cdot 1$ että $a \cdot \sqrt{2}$ ovat rationaalilukuja. (Voit olettaa tunnetuksi, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.)
2. Anna tarkka perustelu sille, että jos $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, niin on olemassa rationaaliluku q, jolle $x < q < y$.
3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että A on tiheä, jos kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on olemassa $a \in A$, jolle $x < a < y$. Sanomme, että jokaista reaalilukua voi approksimaatioida mielivaltaisella tarkkuudella A:n alkioilla, jos kaikilla $x, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle a:n ja x:n etäisyys on alle ϵ. Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:
   - A on tiheä.
   - Jokaista reaalilukua voi approksimoida mielivaltaisella tarkkuudella A:n alkioilla.
4. Kun konstruoimme kolmion B, teimme sen niin, että sen kateettien pituudet approksimoivat A:n kateettien pituuksia. Kun määrittelimme ϵ-approksimaation, puhuimme kolmioiden kärkipisteiden etäisyyksistä. Osoita, että konstruoimamme B voidaan asettaa kolmion A päälle niin, että se toteuttaa määritelmän, jossa puhuimme kärkipisteiden etäisyyksistä.
5. Jos tunnet jatkuvuuden δ–ϵ-määritelmän, todista Teoreema 1.