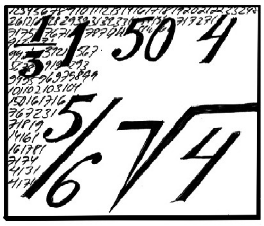


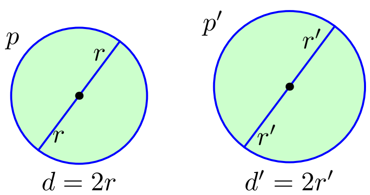
Arkhimedeen vakio, Neperin luku ja imaginaariyksikkö

Markku Halmetoja

Arkhimedes, π ja ympyrän pinta-ala

Sanaristikoissa kysytään toisinaan *Arkhimedeen vakioita*. Tällöin nelikirjaimiseen kohtaan tulee kirjoittaa *piit*, vaikka kyseessä on yksikäsitteisesti määrätty luku. Ristikoiden laatijoilla ei ehkä ole asiasta ymmärrystä tai he joutuvat tekemään kompromisseja ristikon rakenteen monimutkaisuuden takia. Piin likiarvoja tunnettiin jo kauan ennen Arkhimedesta muinaisessa Babyloniassa, Egyptissä, Kiinassa ja Intiassa, mutta hän kehitti menetelmän, jonka avulla se voidaan periaatteessa laskea mielivaltaisen tarkasti. Arkhimedes todisti myös jo aiemmin tunnetun ympyrän pinta-alan kaavan. Seuraavassa on lyhyt esitys näihin asioihin johtavista ajatuksista, joiden tulisi nykyisinkin olla alkeisopetuksen perustana.

Pii voidaan nykytietämyksen mukaan määritellä usealla eri tavalla, mutta alkuperäinen ja elementaarinen tapa perustuu ympyröiden yhdenmuotoisuuteen. Kahdessa ympyrässä vastinpituuksia ovat esimerkiksi halkaisijat $d = 2r$ ja $d' = 2r'$ sekä kehien pituudet p ja p'. Voidaan ajatella, että toinen ympyrä on toisen karttakuva mittakaavassa k. Tällöin



$$\frac{d'}{d} = k \quad \text{ja} \quad \frac{p'}{p} = k,$$

mistä seuraa

$$\frac{d'}{d} = \frac{p'}{p}, \quad \text{ja edelleen} \quad \frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}.$$

Kehän pituuden suhde halkaisijaan yhdessä ympyrässä on siis sama kuin tämä suhde toisessa ympyrässä, joten se on kaikissa ympyröissä sama. Se merkitään 1700-luvulla käyttöön vakiintuneella kreikkalaisella π-kirjaimella. Saamme yhtälön $\frac{p}{d} = \pi$ eli $p = \pi d$, ja koska $d = 2r$, on ympyrän kehän pituus eli *piiri* $p = 2\pi r$.

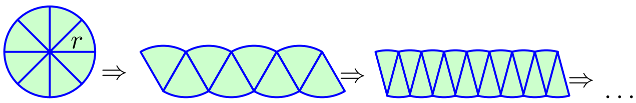
Noin 2200 vuotta sitten Arkhimedes laski yksikköympyrän ($r = 1$) sisään ja ympäri piirrettyjen säännöllisten 96-kulmioiden sivujen pituudet. Niiden avulla hän pystyi esittämään arvion $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Sisään piirretyn 96-kulmion sivuun päästään seuraavasti: puolitetaan 6-kulmion sivuja vastaavat kaaret ja muodostetaan 6-kulmion kärkien ja puolituspisteiden avulla säännöllinen 12-kulmio. Näin jatkamalla saadaan 24-, 48- ja lopulta 96-kulmio. Jokaisessa vaiheessa on laskettava syntyneen monikulmion sivun pituus. Piin alalikiarvo saadaan kertomalla 96-kulmion sivun pituus luvulla 48. Arkhimedeen laskentaurakka oli valtaisa, sillä hänen käytettävissään ei ollut nykyaikaista matemaattista notaatiota ja laskut oli tehtävä käsin kreikkalaisella numerojärjestelmällä, jossa ei tunnettu nollaa.

Nykyisellä notaatiolla ja numerojärjestelmällä Arkhimedeen ajatus on helppo toteuttaa: Pythagoraan lauseen avulla nähdään, että jos yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituus on a_n, niin säännöllisen $2n$-kulmion sivun pituus

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}}.$$

Tällöin $\pi \approx n \cdot a_{2n}$, sillä yksikköympyrän kehän puolikkaan pituus on π. Lähtien säännöllisen kuusikulmion sivusta $a_6 = 1$ voidaan tämän palautuskaavan avulla teoriassa edetä kuinka pitkälle tahansa ja saadaan kasvava jono alati tarkentuvia π:n alalikiarvoja. Palautuskaavan voi ohjelmoida nykyaikaiseen laskimeen tai taulukkolaskentaohjelmaan, jolloin saadaan π:lle laskimen tai ohjelmiston kapasiteetin mukainen likiarvo. Koulumatematiikassa yleisesti käytetty likiarvo on $\pi \approx 3{,}14$.

Arkhimedes määritti ympyrän pinta-alan ajattelemalla sen parillisiksi määriksi sektoreita. Kokoamalla ne palapeleiksi kuvasarjan



mukaisesti saadaan sitä tarkemmin suorakulmio, mitä pienempiin sektoreihin ympyrä jaetaan. Suorakulmion korkeus on r ja kanta puolet ympyrän kehästä. Kehän puolikas on πr, joten ympyrän pinta-ala $A_\circ = \pi r^2$.

Matemaattinen analyysi ja π

Matemaattisen analyysin kehittyminen 1600-luvulta alkaen paljasti aluksi oudoilta vaikuttaneita yhteyksiä π:n ja päättymättömien summien eli *sarjojen* ja tulojen välillä. G. Leibniz todisti vuonna 1676, että

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Tulos on ihmeellinen. Mitä tekemistä vasemman puolen vuorottelevalla murtolukusummalla voi olla ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen kanssa! Vähintään yhtä hämmästyttävä on J. Wallisin pari vuosikymmentä aikaisemmin todistama tulokaava

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{2k}\big)\big(1 + \frac{1}{2k}\big).$$

Mm. kuuluisa matemaatikko C. Huygens oli uskonut tuloksen oikeaksi vasta suorittamiensa likiarvolaskelmien jälkeen. Vuonna 1734 L. Euler onnistui ratkaisemaan pitkään avoinna olleen *Baselin ongelman*: Laskettava päättymätön summa

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Matemaattisen yhteisön ihmetykseksi tulos osoittautui olevan $\frac{1}{6}\pi^2$.

Nähdyt sarjat ja Wallisin tulo suppenevat liian hitaasti π:n monidesimaalisen likiarvon määrittämiseen. Desimaalien vakavampi laskeminen alkoi J. Machinin vuonna 1706 todistamasta kaavasta

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239}.$$

Arkustangentin sarjakehitelmän

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

avulla siitä saadaan varsin tehokas työkalu π:n laskemiseen. Machin itse laski sen avulla π:n sata ensimmäistä desimaalia. Hänen päivistään algoritmit ovat kehittyneet ja nyttemmin (maaliskuu 2019) π on laskettu noin 31,4 biljoonan desimaalin tarkkuudella, mikä on aivan käsittämätön määrä numeroita. Laskeminen suoritetaan hajauttamalla työ usealle tietokoneelle, jotka häärivät luppoaikansa π:n kimpussa.

Vuonna 1768 sveitsiläinen matemaatikko J. H. Lambert todisti π:n *irrationaaliluvuksi*, eli sitä ei voi esittää kahden kokonaisluvun suhteena. Vuonna 1882 saksalainen matemaatikko C. L. F. von Lindemann todisti π:n *transkendenttiluvuksi*, eli että se ei ole minkään kokonaiskertoimisen polynomiyhtälön juuri. Samalla paljastui ratkeamattomaksi antiikin aikainen ongelma ympyrän neliöimisestä harppi-viivoitin-konstruktiona. (Kokonaiskertoimisten polynomiyhtälöiden juuria sanotaan *algebrallisiksi luvuiksi*. Ne voivat olla rationaalisia tai irrationaalisia. Esimerkiksi yhtälön $2 - x^2 = 0$ juuret $\pm\sqrt{2}$ ovat irrationaalisia. Ainoastaan algebrallisia lukuja voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivointa.) π:n "tarkka" arvo ei ole saavutettavissa millään algoritmilla. Desimaalien laskemisella kehitetään lähinnä ohjelmointitaitoja.

Neperin luku

Matemaattisten totuuksien kauneuskilpailussa kärkijoukkoon sijoittuisi C. F. Gaussin vuonna 1809 julkaisema *Gaussin integraali*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Se sisältää π:n lisäksi toisenkin matematiikan ihmeistä, nimittäin *Neperin luvun* e. Se on π:n ohella yksi matematiikan tärkeimmistä luvuista. Tutustumme siihen tutkimalla ns. *jatkuvaa koronkorkoa.* Ajatellaan ensin, että pankkitilille sijoitettu rahasumma K_0 kasvaa korkoa p % vuodessa ja korko lisätään tilille vuoden kuluttua säästämisen alkamisesta. Tällöin tilillä oleva summa

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = K_0\big(1 + \frac{p}{100}\big).$$

Jos korko lisätään tilille puolivuosittain, niin saldo on vuoden kuluttua

$$K_2 = K_0\Big(1+\frac{p/2}{100}\Big)^2 = K_0\Big(1+\frac{p}{200}\Big)^2,$$

sillä puolen vuoden korkoprosentti on $\frac{p}{2}$ %. Jos korko lisätäänkin n kertaa vuoden aikana, niin yhden korkokauden pituus on $\frac{1}{n}$ vuotta ja sen ajan korkoprosentti on $\frac{p}{n}$ %. Tällöin tilillä vuoden kuluttua oleva summa

$$K_n = K_0\Big(1+\frac{p}{100n}\Big)^n = K_0\Big((1+\frac{1}{\frac{100n}{p}})^{\frac{100n}{p}}\Big)^{\frac{p}{100}}.$$

Merkitään $a = \frac{100n}{p}$, joten

$$K_n = K_0\Big((1+\frac{1}{a})^a\Big)^{\frac{p}{100}}.$$

Entä jos korkokausien määrän annetaan kasvaa hyvin suureksi, jopa äärettömän suureksi? Tällöin korkokauden korkoprosentti vastaavasti pienenee ja lähestyy nollaa. Jos n kasvaa äärettömän suureksi, merkitään $n \to \infty$, niin myös $a \to \infty$. Saldon kannalta on siis ratkaisevaa, mitä tällöin tapahtuu luvulle

$$\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^a.$$

Voisi kuvitella, että kun potenssiin korotettava lähestyy lukua 1, niin raja-arvokin olisi yksi. Tällöin saldo olisi vuoden kuluttua ennallaan, mikä olisi outoa. Toisaalta voisi ajatella, että kun ykköstä suuremmalta näyttävä luku korotetaan äärettömän suureen potenssiin, niin tuloksena olisi äärettömän suuri luku. Tilillä siis olisi äärettömän suuri rahasumma, mikä sekään ei tunnu mahdolliselta. Voidaankin osoittaa, että kyseisellä potenssilla on äärellinen raja-arvo, kun $a \to \infty$. Raja-arvo on Neperin luku $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$. Jatkuvan koronkoron tapauksessa korko siis valuu tilille kuin vesi kraanasta ja vuoden kuluttua saldo on

$$K_\infty = K_0\mathrm{e}^{\frac{p}{100}}.$$

Jos $p = 2$, niin $K_1 = 1{,}02K_0$ ja $K_\infty = K_0\mathrm{e}^{0{,}02} \approx 1{,}0202K_0$.

Lausekkeen

$$\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^a$$

raja-arvo pysyy samana riippumatta siitä, liukuuko a kohti ääretöntä reaaliakselia pitkin vai loikkiiko se sinne kokonaislukuaskelin. Se pysyy samana myös, vaikka a menisi kohti negatiivisen puolen ääretöntä. Siis

$$\begin{aligned}\mathrm{e} &= \lim_{a\to\infty}\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^a = \lim_{a\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^a\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \lim_{n\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \approx 2{,}71828.\end{aligned}$$

Kun $(1+\frac{1}{n})^n$ kerrotaan auki binomilausetta soveltaen, saadaan tulokseksi lauseke, jonka raja-arvo on myös e; tämä raja-arvo on

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Sarja suppenee nopeasti, joten e:n desimaaleja on helppo laskea sen avulla. Euler todisti e:n irrationaaliseksi jo 1700-luvulla ja C. Hermite todisti sen transkendenttiseksi vuonna 1873.

Imaginaariyksikkö ja kompleksiluvut

Toisen asteen polynomiyhtälöön johtavia tehtäviä osattiin ratkaista jo muinaisessa Babyloniassa ja Kreikassa. Antiikin matemaatikot olivat kiinnostuneita ainoastaan yhtälöiden positiivisista juurista. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat keksittiin 1400-luvun lopulla Italiassa. Algebrallisesti muotoiltujen ratkaisukaavojen myötä negatiivisetkin juuret tulivat siedetyiksi. Havaittiin myös, ettei kaikilla yhtälöillä ole ratkaisua. Yhtälön $1 + z^2 = 0$ juuret olisivat muodollisesti $z = \pm\sqrt{-1}$, mutta ainoastaan ei-negatiivisilla luvuilla on neliöjuuri. Jos kuitenkin oletettaisiin, että on olemassa tavanomaisia laskusääntöjä noudattava luku i, jonka neliö on -1, niin koituisiko siitä ristiriitoja aiemmin tunnettujen tosiasioiden kanssa? (Merkintä ”i” vakiintui käyttöön vasta 1700-luvulla.) Ongelmia ei havaittu, vaan i:llä oli pikemminkin matematiikkaa rikastuttava vaikutus: esimerkiksi yhtälölle $1 + z^3 = 0$ löydettiin ilmeisen juuren lisäksi kaksi muutakin juurta. Lukuja $z = a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja, pidettiin kuitenkin kuvitteellisina ja niitä kutsuttiin *imaginaariluvuiksi.* Myöhemmin i-symbolin vakiintumisen myötä sitä alettiin kutsua *imaginaariyksiköksi* ja lukuja $z = a + bi$ *kompleksiluvuiksi.* Niiden yhteen- ja kertolasku sujuivat normaaliin tapaan: jos $z = a + bi$ ja $w = c + di$, niin

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i \quad \text{ja}\\ zw &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Kompleksiluvut vakiintuivat matemaattiseen analyysiin jo 1600-luvun loppupuolella, vaikka ei tunnettu matemaattista objektia, jonka neliö olisi -1. Ongelma ratkesi lopullisesti vasta vuonna 1833, kun irlantilainen matemaatikko W.R. Hamilton määritteli luvun $z = a+bi$ järjestetyksi reaalilukupariksi $z = (a, b)$. Hän määritteli yhteen- ja kertolaskut yllä olevan mukaisesti

$$\begin{aligned} z + w &= (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{ja}\\ zw &= (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

ja samasti muotoa $(x, 0)$ olevat luvut reaalilukujen kanssa: $(x, 0) \cong x$. Se oli perusteltua, sillä laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned}(u, 0) + (v, 0) &= (u + v, 0) \cong u + v \quad \text{ja}\\ (u, 0)(v, 0) &= (uv, 0) \cong uv.\end{aligned}$$

Erityisesti

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) \cong -1,$$

joten $i = (0,1)$. Yhtälön $1 + z^2 = 0$ ratkaisuksi löytyi siis konkreettinen matemaattinen objekti! Kompleksiluvuilla laskettaessa on edelleen kätevämpää käyttää merkintää $z = x + yi$.

Kompleksilukuja oli jo ennen Hamiltonia esitetty (x,y)-tason pisteinä, jolloin kyseinen taso nimettiin *kompleksitasoksi.* Luvun $z = x+yi$ *reaali-osa* $\mathrm{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\mathrm{Im}(z) = y$. Tason x-akselia kutsutaan *reaaliakseliksi* ja y-akselia *imaginaariakseliksi.* Luvun $z = x + yi$ *itseisarvo* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja z:n *liittoluku* $\bar{z} = x - yi$. Selvästi

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Imaginaariyksikön potensseilla on neljän sykli: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i$, $\ldots$. Graafisesti luku $z = x + yi$ esitetään origosta pisteeseen (x,y) piirrettynä vektorina. Liittoluku $\bar{z} = x - yi$ on z:n peilikuva reaaliakselin suhteen.

Eulerin kaavat

Arkhimedeen monikulmioita lukuunottamatta edellä nähdyt π:n laskemisen mahdollistavat menetelmät perustuvat pääosin trigonometriaan. Antiikin aikana ja myöhemmin keskiajalla sitä käytettiin lähinnä tähtitieteen laskuissa, navigoinnissa, arkkitehtuurissa sekä kaivosteknologiassa tunnelien suuntia määritettäessä. Trigonometrisia funktioita ei varsinaisesti tunnettu, vaan erityisesti sinin arvoja taulukoitiin vaivalloisia laskelmia tehden. Vasta 1600-luvulla matemaattisen analyysin kehittyessä huomattiin, että trigonometrisilla funktioilla on itsenäistäkin arvoa. Samalla havaittiin, että muinaisesta Babyloniasta peräisin oleva tapa kulman suuruuden mittaamiseksi asteilla on liian kömpelö analyysin tarpeisiin. Parempi tapa on asettaa yksikköympyrän keskipiste kulman kärkeen ja ilmaista kulman suuruus sen kylkien väliin jäävän kaaren pituutena. Tällöin esimerkiksi oikokulman suuruus on π ja täyden kulman 2π. Kosini ja sini määriteltiin origokeskisen yksikköympyrän kehäpisteen koordinaatteina, jolloin ne havaittiin koko reaalilukualueessa määritellyiksi rajoitetuiksi, jaksollisiksi funktioiksi; kummankin perusjakso on 2π. Funktioiden arvojen ja π:n desimaalien laskemista edesauttoi ratkaisevasti se, että ne opittiin kehittämään potenssisarjoiksi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Myös e-kantaisen eksponenttifunktion sarjakehitelmä

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

oli tunnettu. Euler havaitsi 1700-luvun puolivälissä, että sillä ja trigonometristen funktioiden sarjoilla on paljon yhteisiä piirteitä. Hän tuli sijoittaneeksi siihen imaginaariluvun $x = i\varphi$ ja tulos oli ällistyttävä:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi^5)}{5!} + \ldots \\
&= \Big(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\Big) + i\Big(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\Big) \\
&= \cos\varphi + i\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Vaihtamalla φ vastaluvukseen saadaan

$$\mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Yhtälöitä

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{ja} \quad \mathrm{e}^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

kutsutaankin *Eulerin kaavoiksi.* Luultavasti Eulerin ajatusta siivitti myös A. de Moivre'n muutamaa vuosikymmentä aikaisemmin löytämä yhteys kompleksilukujen ja trigonometristen funktioiden välillä: *Kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Eulerin kaavojen avulla eksponenttifunktio voitiin määritellä myös kompleksiluvuille:

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y).$$

Kun yhtälöön $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ sijoitetaan $\varphi = \pi$, saadaan tulokseksi monien mielestä matematiikan kaunein ja merkillisin yhtälö:

$$1 + \mathrm{e}^{i\pi} = 0.$$

Kauaskantoisempi tulos saadaan sijoittamalla siihen $\varphi = 2\pi$, sillä yhtälön $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$ avulla nähdään eksponenttifunktio $f(z) = \mathrm{e}^z$ jaksolliseksi:

$$f(z + 2\pi i) = \mathrm{e}^{z+2\pi i} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi i} = \mathrm{e}^z = f(z).$$

Reaalilukualueella eksponenttifunktio on aidosti kasvava, mutta kompleksilukualueella se on jaksollinen ja sen perusjakso on $2\pi i$.

Selvästi $|\mathrm{e}^{i\varphi}| = 1$, ja kun φ saa kaikki arvot välillä $[0, 2\pi[$, niin $\mathrm{e}^{i\varphi}$ piirtää origokeskisen yksikköympyrän. Jos reaalimuuttuja t esittää aikaa ja vakio ω kulmanopeutta (yksikköinä s ja s^{-1}), niin luku $z(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$ kiertää yksikköympyrän kehää mainitulla kulmanopeudella. Ilmiöllä on käyttöä mm. sähkötekniikassa ja fysiikassa yleisemminkin. Itse asiassa tässä kirjoituksessa ohuesti kuvattu π-e-i-matematiikan kehitys antiikin ajoista 1800-luvulle oli välttämätön edellytys esimerkiksi sähkön ja magnetismin matemaattiselle mallintamiselle, mikä tapahtui 1800-luvun puolen välin tietämissä.

Lähteitä ja selityksiä

Kirjoituksessa olevat faktat on poimittu St. Andrews'in yliopiston matematiikan historiasivustolta `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/` sekä Matti Lehtisen kirjasta ”Matematiikan nimiä” (Eukleides-kirjat[1], Oulu 2020). Ne on liimattu yhteen kirjoittajan omilla hajanaisilla muistikuvilla elämän varrella luetuiksi tulleista matematiikkaa ja sen historiaa käsittelevistä teoksista ja artikkeleista. Kirjoittaja on yksin vastuussa mahdollisista virheistä ja epätarkkuuksista. Tekstissä esitetyt tulokset voidaan todistaa nykyaikaisen matemaattisen analyysin edellyttämällä tarkkuudella.

Korjattu 2.11.2020 sivun 10 lause ”Ainoastaan algebralliset luvut voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivoitinta” muotoon ”Ainoastaan algebrallisia lukuja voidaan periaatteessa konstruoida yksikköjanasta lähtien käyttäen pelkästään harppia ja viivoitinta”.

[1] `www.eukleideskirjat.fi`