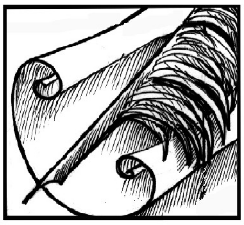

Absoluuttisia totuuksia ja kaikkea muuta

Pääkirjoitus

Pyöräilin yhtenä päivänä kotiin tarhalta hyvin vihaisen nelivuotiaan kanssa. Yritin saada hänet jotenkin unohtamaan vihaisuutensa, joten yritin harrastaa jonkinlaista small talkia. Ohitsemme meni pari pientä koiraa. Tiesin lapsen pitävän koirista, joten jotain sanoakseni kysyin: ”Oliko söpöjä pieniä koiria?” Vastaus oli hyvin vihainen. Minulle kerrottiin, että minun ei pitäisi tuollaista kysyä, ja että tuollaista ei saa kysyä, koska pienet koirat ovat aina söpöjä.

Minulle matemaatikkona on tässä nelivuotiaan ehdottomuudessa sekä jotain hyvin tuttua että jotain hyvin vierasta. Automaattisesti oletan päivittäin esimerkiksi, että $1 + 1 = 2$ sitä sen enempää miettimättä. Lisäksi oletan, että yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa, ja että muut kuin yhdensuuntaiset suorat leikkaavat tasan kerran. Nämä jälkimmäiset oletuksethan tulevat geometrian aksioomista, jotka itse asiassa voi hyvinkin kyseenalaistaa. Esimerkiksi pallopinnalla yhdensuuntaiset suorat leikkaavat äärettömyydessä.

Todistettuihin tuloksiin voi periaatteessa suhtautua hyvinkin ehdottomasti. Toisaalta taas niistäkin löytyy joskus virheitä. Tunnettu tapaus on Wilesin todistus Fermat’n suurelle lauseelle. Todistuksesta löytyi virhe melko pian sen julkistamisen jälkeen. Tässä ei ole mitään ihmeellistä, sillä virheet ovat lopulta hyvin yleisiä, ja usein virheet voidaan korjata hyvin helposti. Tämä virhe oli pahempi, mutta loppu oli silti onnellinen: virhe oli korjattavissa ja todistus säästyi.

Toisinaan taas todistuksista löytyy virheitä huomattavan paljon niiden julkaisemisen ja yleisen hyväksymisen jälkeen. Toisinaan nämä virheelliset väitteet todistuksineen ovat päässeet myös oppikirjoihin. Tämä ei missään nimessä tarkoita sitä, että jokaisen kirjan jokaiseen väitteeseen ja jokaiseen todistukseen pitäisi suhtautua suurella epäilyksellä, vaan lähinnä sitä, että erehtyminen todellakin on inhimillistä, ja vaikka kuinka yritettäisiin virheitä välttää, joskus niitä sattuu ja joskus, vielä harvemmin, niitä ei huomata kovin nopeasti.

Mielenkiintoinen oma kategoriansa ovat tulokset, joihin uskotaan, mutta joita ei ole saatu todistettua. Eräs kuuluisa esimerkki on Riemannin hypoteesi. Alunperin Riemann väitti tietyn funktion kaikkien epätriviaalien nollakohtien olevan suoralla $\Re z = \frac{1}{2}$ yrittäessään hahmotella, miten alkulukulause voitaisiin todistaa. Tämän väitteen oli tarkoitus olla lemma kohti alkulukulauseen todistusta. Alkulukulauseelle kyllä löytyi todistus ja useitakin sellaisia, mutta tämä alunperin lemmaksi tarkoitettu väite jäi avoimeksi. Tämän väitteen merkitys on tosin paljon suurempi kuin vain jonkin yksittäisen väitteen tai lemman. Jos nimittäin Riemannin hypoteesi on tosi, niin siitä seuraa ominaisuuksia esimerkiksi alkuluvuille. Melko monta artikkelia onkin kirjoitettu ikään kuin ehdollisesti: Jos Riemannin hypoteesi on tosi, niin voidaan todistaa... Osa näistä tuloksista on myöhemmin todistettu olettamatta Riemannin hypoteesia, toiset taas ovat peräti yhtäpitäviä Riemannin hypoteesin kanssa. Tällaisten artikkelien suuri lukumäärä kuitenkin kertoo kahdesta asiasta: Riemannin hypoteesi on tehokas oletus, jonka avulla saa tuloksia, joista ei voisi unelmoidakaan muuten. Lisäksi sen hyvin yleisesti uskotaan olevan tosi – muuten tällaisilla artikkeleilla olisi kovin vähän annettavaa. Epäilyksiä tietysti on: Esimerkiksi Aleksandar Ivić on kirjoittanut artikkelin syistä epäillä Riemannin hypoteesia.

Riemannin zeta-funktion avulla voi muodostaa Hardyn funktion. Hardyn funktiolla on mielenkiintoinen ominaisuus: Riemannin hypoteesi on yhtäpitävä sen kanssa, että Hardyn funktion kaikki lokaalit minimit ovat negatiivisia ja lokaalit maksimit positiivisia. Aikoinaan analyyttisen lukuteorian kurssilla katsoimme Hardyn funktion kuvaajaa, ja kurssia luennoinut Matti Jutila kertoi, miten eri tavoin tähän voi suhtautua: Kun jotkut minimit ovat kovin lähellä x-akselia ja jotkut maksimit samoin, niin tästä voi tehdä arvauksia eri suuntiin: joko tulkita tilanteen niin, että kun funktiolla oli jo läheltä piti -tilanne, eli melkein maksimi meni negatiiviseksi tai minimi positiiviseksi, niin pakko tämän on joskus mennä pieleen ja hypoteesin olla väärä. Vaihtoehtoisesti voi ajatella, että kun funktio tästäkin läheltä piti -tilanteesta selvisi, niin eiköhän se selviä lopustakin. Tämä on epäilemättä joku analyyttisen lukuteoreetikon versio puolityhjän ja puolitäyden lasin dilemmasta.

Mukavaa syksyn jatkoa!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen