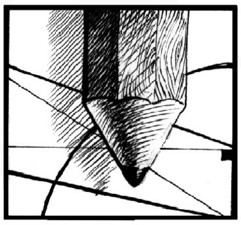


Lyhintä reittiä pitkin suurimpaan kulmaan – matkakertomus

Jaska Poranen

Johdanto

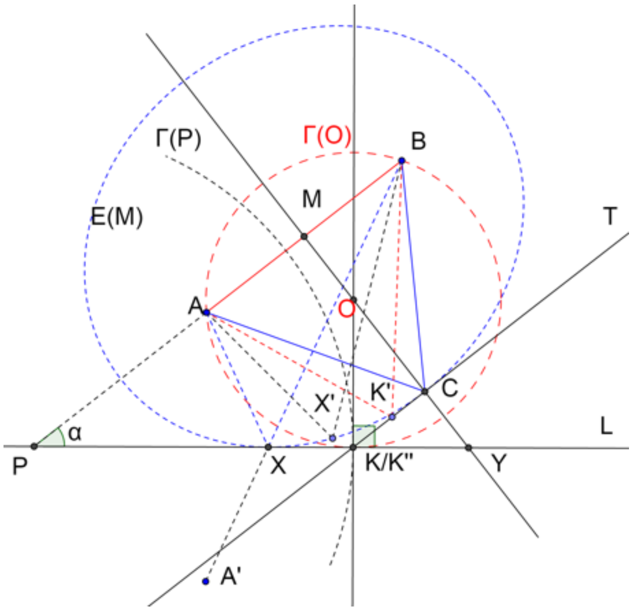
Matemaattisen ongelmanratkaisuperinteen perushahmon G. Polyan (1887–1985) teoksesta (1973, 122–123) löytyy seuraava kysymys (suomennos kirjoittajan):

Olkoot annettuina kaksi pistettä ja suora, kaikki samassa tasossa, ja molemmat pisteet samalla puolella suoraa. Etsi annetulta suoralta piste, josta annettujen pisteiden määräämä jana näkyy suurimmassa mahdollisessa kulmassa.

Hieman myöhemmin (emt., 142–144) mainitaan toinen ongelma, joka lienee monille lukijoille tutumpi (suomennos kirjoittajan):

Olkoot annettuina kaksi pistettä ja suora, kaikki samassa tasossa, ja molemmat pisteet samalla puolella suoraa. Etsi annetulta suoralta piste, josta annettuihin pisteisiin määritettyjen etäisyyksien summa on pienin mahdollinen.

Yllä esitetty ensimmäinen kysymys (merkitään q_1) oli kirjoittajalle entuudestaan tuntematon; toinen kysymys (merkitään q_2) oli puolestaan jo melko tuttu. Kirjoittaja oli miettinyt ns. prosessinäkökulmaa matematiikkaan (ks. esim. Pehkonen 1999) ja sen mahdollista merkitystä kouluopetuksessa ja opettajainkoulutuksessa. Selventääkseen tätä asiaa kirjoittaja päätti ottaa tutkittavakseen jonkin aidon kysymyksen, jonka ratkaisemisesta hänellä ei ollut etukäteen mitään käsitystä – ja kirjoittaa siitä.



Kuva 1. Kysymys Q: Hypoteesi ongelmien q_1 ja q_2 eli pisteiden K ja X välisestä eräästä konstruktiivisesta yhteydestä.

G. Polya kuvaa teoksessaan (1973, 143) kysymyksiä q_1 ja q_2 vielä siten, että niissä molemmissa on sama lähtötilanne ja että itse tuntemattomat ovat saman tyyppiset: annetulta suoralta etsitään tietyn ääriarvon toteuttavaa pistettä; ääriarvojen luonteet ovat vain erilaiset: ensimmäisessä (q_1) etsitään maksimikulmaa, toisessa (q_2) minimisummaa. Kirjoittajan havaintojen mukaan Polya ei sano näistä kysymyksistä *yhdessä* tämän enempää. Näin kirjoittajalle syntyi ajatus ”omasta ongelmasta” (merkitään Q), jossa pyritään selvittämään, onko näiden kysymysten (q_1, q_2) välillä jokin syvempi yhteys. Hän oletti, että tuon mahdollisen yhteyden olemassaolo – tai ei-olemassaolo – olisi aika nopeasti selvitettävissä. Näin ei kuitenkaan käynyt: kirjoittaja oli kuin olikin löytänyt (ainakin itselleen) aidon ongelman, joka vaivasi häntä pitkään. Tämän prosessin kuvailu johti kirjoitukseen (Poranen, 2020), jossa päädytään kuvan 1 hypoteesiin kysymyksestä Q eli kysymyksien q_1 ja q_2 välisestä suhteesta.

Yllä (Kuva 1) suoralla L oleva piste X on kysymyksen q_2 minimisumman $AX + XB$ piste, ts. murtoviiva AXB on lyhin mahdollinen reitti pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B. Piste X voidaan määrittää yksinkertaisesti peilaamalla ensin piste A suoran L suhteen pisteeksi A' ja tarkastelemalla sitten suorien $A'B$ ja L leikkauspistettä. Suoran L piste K on puolestaan ongelman q_1 vaatima piste, ts. siitä pisteestä jana AB näkyy suoralta L suurimmassa mahdollisessa kulmassa. Tämäkin piste on geometrisesti konstruoitavissa.

Voidaan nimittäin ensinnäkin osoittaa, että sen on oltava pisteiden A ja B kautta kulkevan ympyrän $\Gamma(O)$ (Kuva 1) ja suoran L (ainoa) yhteinen piste. Tämän jälkeen ympyrän sekanttilauseen perusteella saadaan yhtälö $PA \cdot PB = (PK)^2$, missä piste P on suorien AB ja L leikkauspiste. Tällöin jana PK saadaan edelleen janojen PA ja PB geometrisena, konstruoitavissa olevana keskiarvona – kuvassa 1 ympyränkaaren $\Gamma(P)$ säteenä.

Menettelyihin, joilla pisteet X ja K löydetään, ei näytä sisältyvän mitään vihjettä näiden pisteiden mahdollisesta keskinäisestä yhteydestä. Sellainen kuitenkin vaikuttaa loppujen lopuksi löytyvän siten, että helposti määritettävissä olevan pisteen X avulla saadaan konstruoitua myös piste K. Tätä hakuprosessia – ja sen mahdollista yleisempää merkitystä – on kuvattu ja analysoitu edellä mainitussa kirjoituksessani (2020). Siinä jouduin tyytymään keksimääni lupaavaan hypoteettiseen yhteyteen (Kuva 1) pisteiden X ja K välillä, jota pystyin perustelemaan vain ”laadullisesti” seuraavaan tapaan.

Konstruoidaan ellipsi (Kuvassa 1 $E(M)$), jonka polttopisteet ovat A ja B ja jonka polttosäteiden vakiosumma $= AX + XB$ (= minimimatka pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B). Erityisesti siis tämä ellipsi $E(M)$ kulkee pisteen X kautta. Luonnollisesti jana AB näkyy tästä suoran L pisteestä eräässä kulmassa BXA, mutta piste K = piste X vain, jos $AB \parallel L$, jolloin piste K (ja piste X) voidaan konstruoida suoraan janan AB keskinormaalin ja suoran L leikkauspisteenä. Suora L on tietysti myös ellipsin $E(M)$ tangentti kohdassa X.

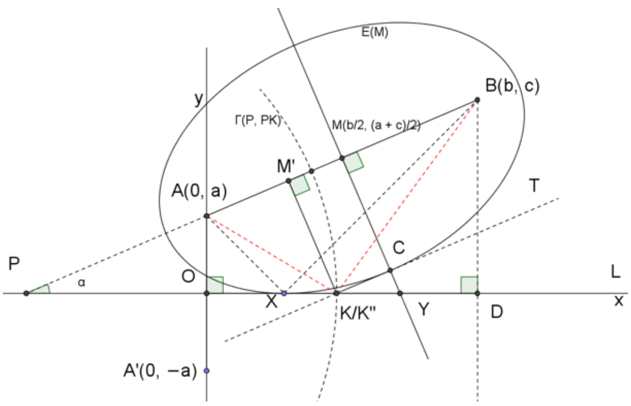
Olkoon sitten X' ellipsin ”liikkuva piste”. Kulma $BX'A$ kasvaa, kun piste X' liikkuu ellipsillä pisteestä X kohti janan AB keskinormaalia MY. Pisteestä C, joka on ellipsin $E(M)$ ja keskinormaalin MY kahdesta leikkauspisteestä suoraa L lähempänä oleva piste, näkyy jana AB ellipsiltä $E(M)$ suurimmassa mahdollisessa kulmassa. Tämän kulman BCA kyljet ovat yhtä suuret siten, että $BC = AC = (AX + XB)/2$.

Konstruoidaan edelleen pisteestä C suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora T. Valitaan myös tältä suoralta ”liikkuva piste” K' ja kuljetaan suoraa T pitkin kohti suoraa L. Tällöin kulma $BK'A$ pienenee. Olkoon suoran T ja suoran L leikkauspiste K''. Hypoteesi (ks. Kuva 1) kuuluu nyt siten, että piste K = piste K''. Mainitussa kirjoituksessani (Poranen, 2020) en pystynyt todistamaan tätä, mutta siihen ryhdyn seuraavassa.

Seuraavassa jo alussa mainittujen pisteitä A ja B sekä suoraa L koskevien perusoletusten lisäksi oletetaan ensin, että piste A on lähempänä suoraa L kuin piste B ja että näiden pisteiden määräämä suora ei leikkaa suoraa L kohtisuorasti (vrt. Kuva 1, Kuva 2), mikä ei rajoita yleisyyttä. Erikoistapaukset $AB \perp L$ ja $AB \parallel L$ käsitellään tämän jälkeen erikseen.

Hypoteesin todistus analyyttisen geometrian avulla

Otetaan käyttöön suorakulmainen xy-koordinaatisto siten, että piste $A = A(0, a)$, $B = B(b, c)$ ja suora $L = x$-akseli, ja missä edelleen a, b ja c ovat positiivisia lukuja, $a < c$ (Kuva 2).



Kuva 2. Ellipsin $E(M)$ välittämä yhteys pisteiden X ja K välille: osoitetaan, että $M'K = MC$.

Käyttämällä joitakin analyyttisen geometrian alkeistietoja, Pythagoraan lausetta, ympyrän sekanttilausetta sekä eräiden kolmioiden yhdenmuotoisuutta saadaan melko helposti seuraavia tuloksia (vrt. Kuva 2):

1. Suoran AB yhtälö: $y = ((c - a)/b) \cdot x + a$.
2. $P = (ab/(a - c), 0)$; $PO = ab/(c - a)$.

3. $PA = \frac{a}{c-a}\sqrt{(c-a)^2+b^2}$.
4. $PD = PO + OD = bc/(c-a)$.
5. $PB = \frac{c}{c-a}\sqrt{(c-a)^2+b^2}$.
6. $PK = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})}$.
7. $OK = PK - PO = PK - \frac{ab}{c-a} = \sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - ab/(c-a)$.
8. $K = (OK, 0)$.
9. $X = (ab/(a+c), 0)$.
10. $Y = ((c^2+b^2-a^2)/2b, 0)$.
11. $AX + XB = \sqrt{(a+c)^2+b^2}$ (= d, merkitään).
12. Määritellään ellipsi $E(M)$ yhtälöllä

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2} = d,$$

ts. sen polttopisteet ovat A ja B, sen pisteiden (x, y) etäisyyksien summa pisteistä A ja $B = d$, se kulkee pisteen X kautta ja symmetrian takia sillä on myös piste C, missä $AC = BC = d/2$.
13. $AB = \sqrt{(c-a)^2+b^2}$; $AM = AB/2$; $M = (b/2; (c+a)/2)$.
14. $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \ldots = \sqrt{ac}$ (= lukujen a ja c geometrinen keskiarvo).

Yhtälö (1) on yhtä pitävä sen ns. yleisen muodon kanssa:

$$(c-a) \cdot x - by + ab = 0,$$

ja voimme soveltaa nyt kaavaa

$$e = (|Ax_0 + By_0 + C|)/\sqrt{A^2+B^2} \qquad \text{(a)}$$

pisteen etäisyydelle suorasta laskeaksemme pisteen K etäisyyden suorasta AB (x_0 = pisteen K x-koordinaatti, $y_0 = 0$). Merkitään vielä e' = kaavan (a) jaettava, e'' = kaavan (a) jakaja. Tällöin ensinnäkin

$$\begin{aligned} e' &= |(c-a) \cdot \left[\sqrt{ac(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - \frac{ab}{c-a}\right] - 0 + ab| \\ &= |\sqrt{ac} \cdot \sqrt{(c-a)^2(1+\frac{b^2}{(c-a)^2})} - ab + ab| \\ &= |\sqrt{ac} \cdot \sqrt{(c-a)^2+b^2}| = \sqrt{ac} \cdot \sqrt{(c-a)^2+b^2}; \end{aligned}$$

toiseksi

$$e'' = \sqrt{(c-a)^2+b^2}.$$

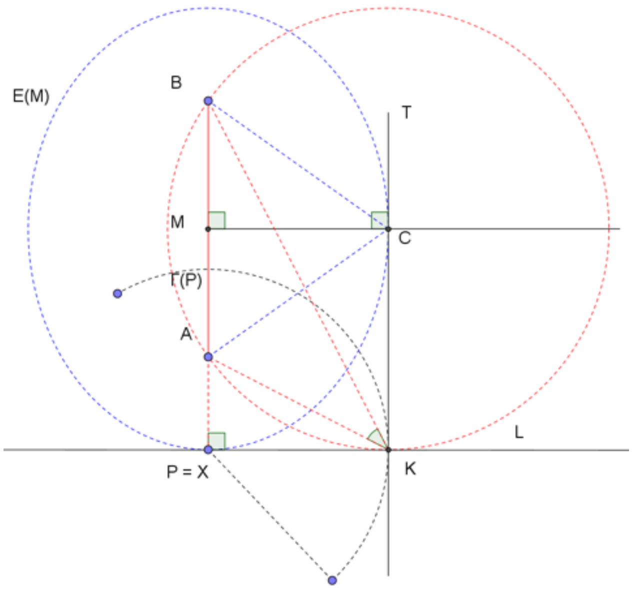
Näin

$$e = e'/e'' = M'K = \sqrt{ac} = MC.$$

Yhteenvetoa yllä olevasta: On siis osoitettu, että pisteestä P käsin konstruoitavissa olevan suoran L maksimikulmapisteen K etäisyys suorasta AB on MC. Toisaalta pisteen C kautta kulkeva suora T (Kuva 2) on konstruoitu siten, että se on yhdensuuntainen suoran AB kanssa. Näin jokaisen sen pisteen etäisyys suorasta AB on MC. Erityisesti siis suorien T ja L leikkauspisteen K'' etäisyys suorasta AB on MC. On siis oltava $K = K''$, joten piste K saadaan näinkin selville – ja tässä menettelyssä on minimimatkan pisteellä X olennainen rooli.

Erikoistapaukset $AB \perp L$ ja $AB \parallel L$

Edellä suoritettu todistus analyyttisen geometrian avulla edellytti, että suora AB ei ole kohtisuorassa suoraan L nähden. Tarkastellaan tätä tilannetta ilman analyyttista geometriaa seuraavassa (Kuva 3).

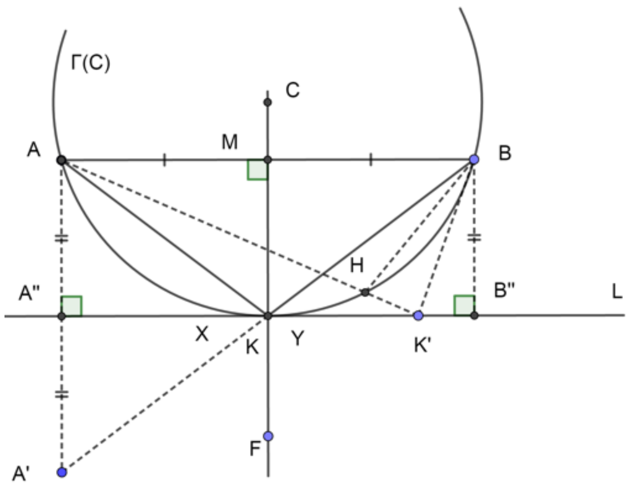


Kuva 3. Tapaus $AB \perp L$.

Tapauksessa $AB \perp L$ on lyhin reitti AXB selvästi $= AP + PA + AB = 2AP + AB$, missä piste $P = X$ = suorien AB ja L leikkauspiste (Kuva 3). Näin AC $(= BC) = AP + AB/2$, ja $(MC)^2 = (AC)^2 - (AB/2)^2$, ts. $(MC)^2 = PA(PA + AB) = PA \cdot PB$, joten MC = janojen PA ja PB geometrinen keskiarvo. Toisaalta myös PK on näiden janojen geometrinen keskiarvo, joten $PK = MC$. Pisteen C kautta kulkeva suora $T \parallel AB$, joten se leikkaa suoran L kohdassa K.

Yllä olevassa tilanteessa (Kuva 3) jana AB näkyy suurimmassa kulmassa suoralta L pisteestä K, missä PK = janojen PA ja PB geometrinen keskiarvo. Toisaalta tämä piste K saadaan siis myös suoraan pisteen X avulla hyödyntämällä sen merkitystä lyhimmän reitin pisteenä janan AB pisteestä A suoran L kautta pisteeseen B.

Tarkastellaan toiseksi tapausta $AB \parallel L$ (Kuva 4):



Kuva 4. Jos jana $AB \parallel L$, niin $X = Y = K$.

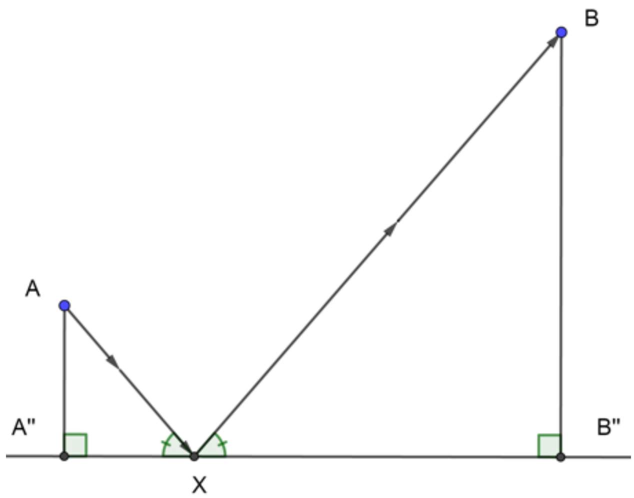
Olkoon siis $AB \parallel L$. Tutkitaan tilannetta tässäkin ilman analyyttista geometriaa. Piirretään janalle AB keskinormaali MF, olkoon sen ja suoran L leikkauspiste $= Y$ (Kuva 4). Osoitetaan ensin, että tällöin lyhimmän matkan piste $X = Y$. Peilataan piste A suoran L suhteen ja olkoon näin saatu piste A'. Tällöin lyhimmän matkan piste X on suorien $A'B$ ja L leikkauspiste (Kuva 4). Olkoon edelleen janan AA' ja suoran L leikkauspiste $= A''$ ja vastaavasti piste $B'' =$ pisteen B kohtisuora projektiopiste suoralla L. Ristikulmina ovat kulmat $A''XA'$ ja $B''XB$ yhtä suuret. Kolmiot AXA'' ja $A'XA''$ ovat yhtenevät (sks), joten yhtenevien kolmioiden vastinosina kulmat AXA'' ja $A'XA''$ ovat yhtä suuret. Siis kulma $AXA'' =$ kulma BXB'', joten kolmiot AXA'' ja BXB'' ovat yhtenevät (skk); yhtenevien kolmioiden vastinsivuina $AX = BX$, mistä edelleen seuraa, että piste $X =$ keskinormaalin MF piste Y.

Osoitetaan toiseksi, että myös maksimikulman piste $K = Y$. Konstruoidaan ympyrä $\Gamma(C)$, joka kulkee pisteiden A, Y ja B kautta. Jana (ympyrän $\Gamma(C)$ jänne) AB näkyy tältä ympyrältä pisteessä Y kulmassa BYA ja tunnetusti edelleen samassa kulmassa jokaisesta sen janan AB alapuolella olevasta ympyrän pisteestä. Erityisesti suoran L piste $Y =$ maksimikulmapiste K. Olkoon nimittäin K' jokin toinen suoran L piste ja piste H suoran $K'A$ ja ympyrän $\Gamma(C)$ leikkauspiste (Kuva 4). Nyt kolmion $BK'H$ kulman $K'HB$ vieruskulma BHA on suurempi kuin kulma $BK'H$ (vrt. esim. Lehtinen, Merikoski, & Tossavainen, 2007, 29). Koska kulma $BHA =$ kulma BYA, on piste $Y =$ maksimikulmapiste K.

Kouluun kenties sopivia havaintoja

Lyhimmän matkan ongelma (q_2) sopii monin tavoin käsiteltäväksi eri kouluasteilla. On esimerkiksi helppo osoittaa, oikeastaan jo alakoulun tiedoilla, että tällöin ”tulokulma” = ”lähtökulma”. Kuvan 1 merkintöjä käyttäen kulma $AXP =$ kulma YXB. *Fermat'n periaatteen* (yhden niistä) mukaan valo käyttää kahden pisteen välillä reittiä, johon kuluu mahdollisimman vähän aikaa. Yhdistämällä edellä mainitut asiat (menemättä tässä sen syvemmälle optiikkaan) saataneen yksi *perustelu* paljon käytetylle valo-opin heijastuslaille: valon lähtökulma = tulokulma. Jos esimerkiksi halutaan pisteestä A osoitetun laservalon heijastuvan ”peilisuoralta L” pisteeseen B, on valosäde lähetettävä kohtaan X. Valo kulkee siis tällöin paitsi lyhintä reittiä AXB pitkin, niin myös siten, että sen lähtökulma = tulokulma.

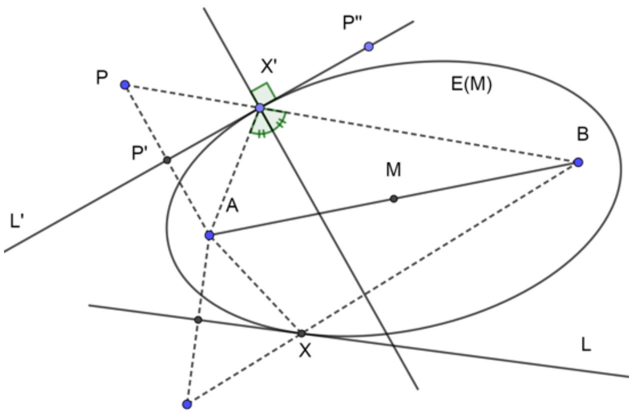
Tästä saataisiin yksinkertainen koulusovellus esimerkiksi jonkin seinän tms. korkeuden $B''B$ määrittämiseksi. Laitetaan laserosoitin jonkin lattiaan nähden kohtisuoran ja lattiassa kiinni olevan mittakepin $A''A$ päähän. Kokeillaan, mihin kohtaan (X) lattiaan pitää asettaa peili siten, että valo heijastuu siitä katonrajaan. Koska nyt valon heijastuskulma = tulokulma, ovat suorakulmaiset kolmiot $AA''X$ ja $BB''X$ yhdenmuotoiset (kk). Mitataan lattiassa olevat matkat $A''X$ ja $B''X$ ja ratkaistaan verranto $AA''/A''X = BB''/B''X$ janan pituuden BB'' suhteen. Samalla saa ratkaisunsa eräs ääriarvotehtävä (Kuva 5):



Kuva 5. Korkeuden $B''B$ määritys laserosoittimen avulla hakemalla ensin kokeellisesti peilin paikka X.

Olkoon sitten kääntäen piste X' suoralla L sellainen, että tulokulma siihen pisteestä $A =$ lähtökulma siitä pisteeseen B. Tällöin on edelleen helppo osoittaa, että pisteen X' on oltava lyhimmän matkan piste X. Monissa peleissä syötetään hyvillä kimmoisuusominaisuuksilla varustettua pelivälinettä (jääkiekkoa, biljardipalloa, koripalloa tms.) massiivisen, tasaisen seinämän tai lattian kautta esimerkiksi toiselle pelaajalle. Tällöinkin ilmeisesti sovelletaan tulokulman ja lähtökulman yhtäsuuruuden lainalaisuutta – ja samalla myös minimimatkan periaatetta. Tältä pohjalta on vaivatonta ideoida ja toteuttaa kaikille kouluasteille sopivia pelillisiä ääriarvotehtäviä ongelman q_2 hengessä.

Jo aiemmin todettiin, että suora L on ellipsin $E(M)$ tangentti, joka sivuaa ellipsiä kohdassa X (Kuva 1). Kuvaa 1 tarkastelemalla nähdään helposti, että ellipsin normaali pisteessä X puolittaa polttosäteiden XA ja XB välisen kulman. Tämä seikka liittyy oleellisesti siihen, että piste X on suoralla L oleva minimimatkapiste. Olkoon X' jokin toinen ellipsin $E(M)$ piste. Piirretään polttosäteiden $X'A$ ja $X'B$ välisen kulman puolittaja ja konstruoidaan tälle normaali eli ellipsin tangentti L' kohtaan X'. Tällöin nähdään, että ”tulokulma” $P'X'A =$ ”lähtökulma” $BX'P''$ (Kuva 6), joten X' on myös (suoraan L') liittyvä minimimatkapiste. Voidaan myös edelleen peilata piste A suoran L' suhteen pisteeksi P. Tällöin kulmat $P'X'A$ ja $PX'P'$ ovat yhtä suuret; näin myös kulma $PX'P' =$ kulma $BX'P''$, joten piste X' on todella suoralla PB (Kuva 6).



Kuva 6. Kulma $P'X'A =$ kulma $BX'P''$, joten myös ellipsin $E(M)$ mielivaltainen piste X' on minimimatkapiste (ellipsin siihen pisteeseen asetettuun tangenttiin L' liittyen).

Siis ilmeisesti jokainen ellipsin $E(M)$ piste X' voidaan tulkita myös minimimatkapisteeksi, mistä seuraa muun muassa erikoinen ”peliominaisuus”: jos vaikkapa jääkiekkoa pelattaisiin ellipsin muotoisessa kaukalossa, niin syöttö pisteestä A kaukalon seinämän kautta menisi *aina* perille toiselle pelaajalle, mikäli hän olisi kohdassa B.

Jo alakoulussa voisi ellipsiä ainakin *muotona* tutkia toiminnallisesti Kuvan 1 pohjalta siten, että ensin laitetaan kaksi pistettä (A ja B) sopivalle alustalle ja niiden alapuolelle jokin suora (L); sitten peilataan piste A suoran L suhteen pisteeksi A' ja mitataan narulla tms. pisteiden A' ja B välinen matka; tämän jälkeen kiinnitetään mittanarun toinen pää kohtaan A, toinen kohtaan B, kiristetään naru mielivaltaisesta kohdasta jollakin sopivalla piirtämisvälineellä – ja kireys säilyttämällä piirretään koko ellipsi. Luonnollisesti pisteiden A ja B sekä suoran L keskinäisiä suhteita voitaisiin muunnella loputtomiin. Näin saatujen kokemuksien tutkimista olisi helppo jatkaa *Geogebraa* käyttäen. Muotona ellipsi esiintyy jo alakoulussa esimerkiksi joissakin geometrian kuvioissa sekä tietysti aurinkokuntamme mallituksessa, joten sen alustava tarkastelu – ilman raskaanpuoleista laskennollista välineistöä – sopisi hyvin myös sinne. Toisaalta mikään ei estä hyödyntämästä laajemmin tässä kirjoituksessa ellipsiin liitettyjä asioita.

Maksimikulman kohdalla G. Polya (1973) mainitsee sotilaalliset sovellukset ampumasektoriin yms. liittyen. Mutta mahdollinen lukija voinee keksiä itse runsaasti rauhanomaisempia käyttömahdollisuuksia. *Solmun* ongelmapalstoilla (3/2016 & 1/2017) oli esimerkiksi taannoin jalkapalloon ja maksimikulmaan liittyviä kysymyksiä.

Huomionarvoista voisi olla myös *geometrisen keskiarvo* sekä sen geometrinen konstruointi; sehän putkahtaa esiin useassa kohdassa tässäkin kirjoituksessa. Samoin tuiki tavallisen tasakylkisen kolmion voi hahmottaa ääriarvotehtävänäkin, jopa kahdella tavalla: jos kolmion kanta sekä kahden muun sivun pituuksien summa on kiinnitetty, niin juuri tasakylkisessä kolmiossa kanta näkyy kolmion kärjestä suurimmassa mahdollisessa kulmassa (vrt. esim. Kuva 1; samoin tämä muoto maksimoi kolmion pinta-alan).

Ääriarvotehtäviä on tapana tutkia koulussa vasta differentiaalilaskennan keinoin. Tällöin yksinkertaisetkin kysymykset voivat ”teknistyä” liikaa ja samalla estää niiden monipuolisen ymmärtämisen. Tässä kirjoituksessa käsitelty lyhimmän matkan (q_2) ongelma sopisi hyvin myös ääriarvotehtäväksi, kun on käsitelty ensin juurifunktioita ja niiden derivoimista. Mutta tällöin parempi ymmärrys asiasta voitaisiin saavuttaa käsittelemällä rinnalla myös tuon ongelman geometrista tulkintaa ja ratkaisua. Differentiaalilaskennan ääriarvotehtävänä kysymys maksimikulmasta (q_1) olisi luultavasti vaativa. Mutta ainakin toiminnallisesti voidaan tässä kirjoituksessa esitetty yhteys pisteiden X ja K välillä käydä läpi millä tahansa kouluasteella.

Kysymyksien q_1 ja q_2 käsittelyä on mahdollista monin tavoin muunnella, esimerkiksi tutkivan opiskelun ja ”ilmiöoppimisen” mielessä. Suoran L voisi korvata esimerkiksi ympyränkaarella tms. Lyhimmän matkan ongelmaa voisi olla kiintoisaa edelleen yleistää vaikkapa *Fermat'n pisteen* hakemiseen kolmion sisältä. Tämä on tutkittavissa tyylikkäästi geometrisesti, jolloin ratkaisua voisi ensin hakea kokeellisesti *Geogebran* avulla. Kenties hieman yllättävästi Fermat'n piste löytyy myös tekemällä melko yksinkertainen koe saippualiuoksella – tai peräti punnitsemalla (ks. esim. Park, & Flores, 2015); näissä järjestelyissä luonto ratkaisee näyttävästi matemaattisesti melko vaativan ääriarvotehtävän. Toisena monitasoisena kysymyksenä mainittakoon ns. *Fagnanon ongelma*: Millä teräväkulmaisen kolmion sisään piirretyllä kolmiolla (jonka kärjet ovat kolmion sivuilla) on pienin piiri (ks. esim. Lehtinen ym., 2007, 95). Lyhin matka sinänsä, samoin kulma, ovat luonnollisesti mukana lukuisissa muissakin yhteyksissä, myös arkisissa.

Lopuksi . . .

Matematiikan kouluopettajalla Suomessa on oltava varsin runsaasti tieteensä opintoja, mikä ilman muuta on erinomainen asia. Opettaminen koulussa vaatii silti opettajalta muutakin. Jollakin konstilla ainakin osa oppilaista pitäisi saada kiinnostumaan ja sitoutumaan opiskeluun pintaoppimista syvällisemmin. Olennaista tässä lienee kunnolliset ajattelukokemukset; oppilaiden olisi päästävä joskus aidosti myös *tekemään* matematiikkaa, *osallistumaan* sen käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien muodostamiseen tavanomaisemman valmiiden oppisisältöjen omaksumisen ohella. Opettajilla olisi tässä asiassa epäilemättä keskeinen rooli: heidän olisi kyettävä ideoimaan ja toteuttamaan aktiviteetteja, joiden kautta edellä sanottua voitaisiin toteuttaa. Tämä saattaa vaatia aluksi omien ajatustottumusten avartamista, ja kenties uskaltautumista myös jonkinlaisille epämukavuusalueille. Kirjoitukseni (2020) on yksi kertomus tämän tyyppisestä seikkailusta tuntemattomaan maastoon.

Pyrin siinä ikään kuin kantapään kautta perehtymään ns. prosessinäkökulmaan matematiikassa. Didaktiikan piirissä tätä puolta on haluttu nostaa esiin juuri syvempien oppimistuloksien aikaansaamiseksi. (Tämä ei tarkoita millään muotoa matematiikan muiden puolien väheksymistä.) Tällöin ei etukäteen ole tiedossa, mitä voi tulla eteen ja mitä tietoja voidaan tarvita. On myös mahdollista, että silloin pitää luoda jotakin uutta tai sattumoisin tullaan luoneeksi jotain sellaista – suhteessa omaan tuttuun tietorakenteeseen – jotta asiat etenisivät. Jotakin tällaista todella tapahtui tässä vaatimattomassa ”prosessissani” (2020). Mutta ennen kaikkea tähän liittyi merkillinen sitoutuminen, joka taisi ainakin osittain johtua siitä, että koin käsittelemäni kysymyksen omakseni. Yhtä poikkeusta lukuun ottamatta en alussa mainitussa kirjoituksessani pyytänyt keneltäkään apua, enkä myöskään käyttänyt Googlea tms., koska siten olisin sotkenut tämän vaellukseni mielenmaisemat. Tällainen menettely on nähdäkseni lähellä myös didaktiikan piirissä esiintuotua *kehityksellistä lähestymistä* (vrt. esim. Haapasalo & Kadijevich, 2000; 2004). Tavanomaisempaan opetukseen koulussa, yliopistossa jne. voidaan silloin viitata käsitteellä *koulutuksellinen lähestyminen*. Mahdollinen lukija voinee havainnollistaa näiden lähestymisien eroja esimerkiksi vertailemalla tässä nyt käsillä olevassa kirjoituksessa esitettyjä todistuksia, niiden ”pelkistettyjä tarinoita” – ja ihan lopun vielä paljon pelkistetympää hienoa todistusta – ja muuta samaa asiaa koskevaa, enemmän laadullista ja havainnollista järkeilyä, jota käsiteltiin tämän kirjoituksen alkupuolella (vrt. Kuva 1).

Kokemukseni valossa rohkenen suositella opettajille omien avoimien kysymyksien asettamista ja tutkimista, ainakin joskus. Tätä kautta paljastuu niin oman ajattelun avaruus kuin ahtauskin. Ainoastaan mielikuvitus voi rajoittaa kysymysten valintaa, ja maailma kyllä vastaa niihin, ennemmin tai myöhemmin. Tällaisten kokemuksien kautta oppisisällöille ja yleisemmin matemaattisille toimintatavoille saadaan luotua merkityksellisyyttä, jonka myötä myös sitkeä työnteko ja ajattelu sekä monet muut matemaattiset hyveet olisivat luonnollisia ja laajasti hyödyllisiksi koettuja asioita. Yksi kiintoisa konkreettinen sivuvaikutus prosessinäkökulmasta on se, että opettaja huomaa pystyvänsä kehittämään itse luontevasti uusia toiminnallisia työtapoja, harjoitustehtäviä sekä jopa uusia matemaattisia väitteitä.

. . . Tai ei ihan vielä

Matematiikan professori emeritus Jorma Merikoski esitti hypoteesille Q (vrt. Kuva 1) lyhyen todistuksen. (Kävimme asian tiimoilta aikoinaan kirjeenvaihtoa; tämän kirjoittajan ”puolustukseksi” voitaneen sanoa, ettei hänkään ilmeisesti todistusta esittämälleni hypoteesille noin vain keksinyt, vaan se vaati hiukan työtä myös häneltä; myös itse kysymys eli hypoteesi Q, vrt. Kuva 1, oli hänellekin entuudestaan tuntematon.) Siinä ei ensimmäiseksi kiinnitetä pistettä X lyhimmän matkan pisteenä, vaan annetaan sen olla alussa suoran L mielivaltainen piste. Suoran L piste K on sitten se piste, joka saadaan kuvion 1 mukaisella konstruktiolla pisteestä X keskinormaalin MY pisteen C kautta (suorien T ja L leikkauspisteenä). Olkoot sitten X_1 ja X_2 suoran L pisteitä, ja olkoot K_1 ja K_2 vastaavat konstruktiolla saadut suoran L pisteet, joita vastaavat konstruktion mukaiset keskinormaalin MY pisteet C_1 ja C_2. Jos nyt $X_1A + X_1B < X_2A + X_2B$, niin $C_1M < C_2M$, mistä seuraa edelleen, että piste K_2 on pisteen K_1 oikealla puolella. Tällöin kulma $BK_2A <$ kulma BK_1A , joten K_2 ei ole maksimikulmapiste. Jos siis X ei ole minimimatkapiste, niin K ei ole maksimikulmapiste, sillä pienentämällä summaa $XA + XB$ saadaan suurempi kulma BXA. Maksimikulmapiste on olemassa. Näin se saadaan valitsemalla pisteeksi X minimimatkapiste – ja vain siten.

Lähteet

Haapasalo, L. & Kadijevich, Dj. (2000). Two types of Mathematical Knowledge and Their Relation. Journal für Mathematikdidaktik 21 (2), 139–157.

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, Räsänen-Kupari-Ahonen-Malinen (toim.). Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä.

Lehtinen, M., Merikoski, J., & Tossavainen, T. (2007). Johdatus tasogeometriaan. WSOY Oppimateriaalit Oy.

Park, J., & Flores, A. (2015). Fermat's point from five perspectives. International Journal of Mathematical Education 46(3).

Pehkonen, E. (1999). Professorien matematiikkakäsityksistä. Kasvatus 30 (2), 120–127.

Polya, G. (1973). Induction and Analogy in Mathematics. Volume I of Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Poranen, J. (2020). On the process aspect in mathematics through genuine problem-solving. Teoksessa Subject Teacher Education in Transition. Educating Teachers for the Future. Edited by Ropo, E., & Jaatinen, R. Tampere University Press. ISBN 978-952-359-016-8 (PDF).