

S&LMU

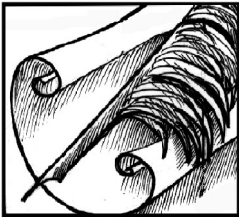
MATEMATIIKKALEHTI 1/2020

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Pakotettu digiloikka (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Jokaisessa parittomassa luvussa on e! (Neea Palojärvi)	5
Entä jos olisi äärettömän suuria luonnollisia lukuja? (Tuomas Korppi)	7
Matematiikkadiplomit vuonna 2019 (Marjatta Näätänen)	10
Muirheadin epäyhtälö: ongelmien ratkaisuita (Esa V. Vesalainen)	11
Koronalotto (Neea Palojärvi)	14
Menestystä Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista (Hermann Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järvinen, Roope Salmi, Nerissa Shakespeare)	16
Kynä ja paperi, kirja, kartta vai nuotit? (Akseli Jussinmäki)	28



Pakotettu digiloikka

Pääkirjoitus

Tässä pääkirjoituksessa en yritäkään sanoa mitään kovin omaperäistä tai yllättävää. Tavoitteeni on vain kertoa viime aikojen vaikutuksista matematiikan olympiavalmennukseen. Kaikki mitä sanon, on todennäköisesti yleistettävissä moneen muuhunkin aiheeseen kuin kilpamatematiikkaan, mutta koska sen tunnen hyvin, keron siitä.

Olympiavalmennuksen eräs ongelma Suomessa on aina ollut Suomen maantieteellisesti laajalle alueelle jakautunut suhteellisen pieni ihmismäärä. Periaatteessa matematiikkaharrastajia on paljon, mutta yksittäisessä koulussa ei välttämättä ole kuin yksi harrastaja. Tällainen ihminen on aika yksinään. Vertaistukea ei ole, kenellekään ei voi hehkuttaa aritmeettis-geometrisen epäyhtälön hienoimpia sovelluksia viime aikojen kilpailutehtävissä, kenellekään ei voi valittaa, kun tehtävä ei vain ratkea, ja kenenkään kanssa ei voi opiskella yhdessä. Tällaisten koululaisten kannalta pidän olympiavalmennuksen tapaamisia hyvin arvokkaana, koska näissä kerrankin voi tavata muita samanmielisiä ihmisiä, joilla on samat kiinnostuksenkohteet, mahdollisesti samankaltaiset tulevaisuuden suunnitelmat ja mahdollisesti samankaltaiset tavat viettää vapaa-aikaa.

Käytännössä kuitenkin Suomi on iso maa. Missä tahansa valmennustapahtuma järjestetäänkin, on sinne monen hyvin hankala tulla, koska etäisyydet ovat isoja. Jotta valmennustapahtumiin olisi mahdollisimman monen mahdollisimman helppo tulla, on niitä käytännössä järkevä järjestää Etelä-Suomessa, koska Etelä-Suomen asukastiheys on suurin. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että monet valmennukseen tulevista ovat sellai-

sia, joilla voisi olla muitakin mahdollisuuksia keskustella matematiikasta toisten kanssa, esimerkiksi omassa koulussa.

Huhtikuun alussa jouduimme ilmeisistä syistä perumaan tavallisen valmennustapahtuman. Tilalle järjestimme virtuaalivalmennusta. Huhtikuussa piti olla myös Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset EGMO. Ne järjestettiin virtuaalisina. Huhtikuussa olisi ollut seitsemäsluokkalaisten alueellisten kilpailujen finaaleja. Kolme niistä siirrettiin eteenpäin, yksi järjestettiin etänä. Kilpailujen järjestäminen etänä herättää aina hiukan kysymyksiä: luotammeko siihen, että ihmiset todellakin ratkaisevat tehtävät itse? Kansainvälisten kilpailujen järjestäminen virtuaalisesti herättää vielä lisää kysymyksiä: jos ratkaisujen pisteytyksen hoitavat joukkueenjohtajat yksin ilman keskustelua koordinaattorien kanssa, voimmeko olla varmoja, että kaikki pisteyttävät rehellisesti? Minä itse en ole koskaan osannut olla kovin huolissani rehellisyydestä, vaan pikemminkin siitä, tulkitaanko pisteytysohjeet joka paikassa samoin. Olin EGMO:ssa koordinaattorina. Normaaliolosuhteissa olisin keskustellut joukkueenjohtajien kanssa ratkaisuihin ja varmistanut, että kaikki arvioivat tehtävät samoin. Nykyisellään tehtäväni oli vain muutaman muun ihmisen kanssa luoda pisteytysohje tehtävään 1 sekä vastata joukkueenjohtajien tarkentaviin kysymyksiin. Päättelen kysymyksistä, joita saimme, uskallan väittää, että ohjeet tulkittiin vähintään riittävän samoin. Olimme tietysti huomioineet poikkeusolosuhteet pisteytysohjeita luodessamme ja karsineet pois kaikki mahdolliset tulkintaeroja ai-

heuttavat asiat. Lopputulos saattoi olla hieman normaalia ankarampi ohjeistus, kun irtopisteiden jakelun ohjeistuksessa piti olla hyvin tarkkana. Kokemukset kilpailujen etäjärjestelyistä ovat kuitenkin kaiken kaikkiaan loistavia. Tämä voisi tarkoittaa myös sitä, että valmennettaville voisi järjestää aiempaa useammin etäkokeita tai vaikka leikkimielisiä kilpailuja. Hiukan kehiteltynä tämä ajatus tarkoittaisi myös mahdollisuutta uusiin vakavampiinkin kilpailuihin.

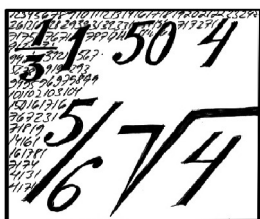
Oleellista on kuitenkin se, että Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisissa ei ainoastaan tehtävien ratkaiseminen ja pisteytys menneet hyvin vaan järjestäjät onnistuivat luomaan yhteisöllisyyden tunteen ja suuren urheilujuhlan tunnelin. Ei se ollut tietenkään sama kuin tavallisessa kilpailussa, mutta erittäin hyvä korvike. Tämä herättää minussa toivoa siitä, että jatkossa myös olympiavalmennusta voisi järjestää fyysisten valmennustilaisuuksien lisäksi myös etänä niin, että kilpailijat kokisivat sen saman yhteisöllisyyden ja saisivat sen saman vertaistuen kuin mitä tavallisissa valmennuksissa. Tämä vaatii varmasti kehittelyä ja pohdin-

taa, mutta olemme varmasti monta pykälää pidemmällä nyt kuin ennen yhteistä kokousohjelmistojen käytön pakotettua pikakurssia.

Jotkut asiat ovat muuten minusta parempia etäyhteyksillä kuin livenä: jos yhteydet toimivat, olen paljon mieluummin etäkokouksessa kuin tavallisessa, sillä etäkokoukset ovat usein hyvin tehokkaita. Toisia asioita taas etäyhteydet eivät koskaan tule korvaamaan: Haaveilen siitä, että voin mennä kahvilaan juomaan kupin mustaa kahvia hyvän kirjan kanssa. Haaveilen myös siitä, että pääsen tavalliselle jumppatunnille (varsin hyvän) online-version sijaan. Ennen kaikkea haaveilen siitä, että voin matkustaa junalla Turkuun tapaamaan vanhempiani. Työasiat ja kilpailut hoituvat sen sijaan etänä paljon paremmin kuin olisin koskaan kuvitellut ja tuovat mukanaan paljon käytänteitä, joiden soisi jättävän käyttöön myöhemminkin.

Hyvää loppukevättä ja kesää!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Jokaisessa parittomassa luvussa on e!

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Internetin ihmemaailmassa seikkaillessa törmää kaikenlaisiin kummallisuuksiin. Vähän aikaa sitten yritin etsiä internetistä vinkkiä sellaisista matematiikan tosiasioista, jotka olisivat nopeasti muotoiltavissa eimatematiikoille ja joita jopa sellaiset ihmiset, joille matematiikka ei ole aivan sydämenasia, pitäisivät hauskoina. Näin törmäsin seuraavaan väitteeseen:

Lause 1. *Kaikissa parittomissa luvuissa on englanniksi kirjoitettuna e-kirjain.*¹

Matematiikassahan ei ole tapana uskoa mihinkään ennen kuin se on todistettu. Tämän artikkelin tavoitteena onkin todistaa edellinen väite.

Negatiiviset luvut

Tarkasteltavana on äärettömän monta lukua, joten saattaisi olla oikein mukavaa, jos tarkasteltavia tapauksia saataisiin rajoitettua. Ensimmäinen havainto on, että kaikki parittomat luvut ovat positiivisia tai negatiivisia, sillä nollahan on parillinen luku. Negatiiviset luvut taas voidaan lausua muodossa ”miinus [luku positiivisena]” (englanniksi ”minus”). Esimerkiksi -1 on ”minus one”. Näin ollen, jos jokaisessa parittomassa positiivisessa luvussa on e-kirjain, niin on myös negatiivisissäkin. Voidaan siis rajoittaa tarkastelu vain positiivisiin lukuihin.

Tällä tavalla saadaan rajattua pois tarkastelusta äärettömän monta lukua. Valitettavasti tämän tiedon avulla ei vielä päästä puusta pitkälle, sillä edelleen jäljellä on äärettömän monta lukua... On siis yritettävä tehdä jotain fiksumpaa.

Viimeiset numerot

Uuden ratkaisuidean saamiseksi voisi auttaa parittomien positiivisten kokonaislukujen tutkiminen. Tutkitaanpa siis positiivisia, korkeintaan luvun kymmenen kokoisia parittomia lukuja. Ne ovat yksi (”one”), kolme (”three”), viisi (”five”), seitsemän (”seven”) ja yhdeksän (”nine”). Kaikissa niissä on e-kirjain. Lupaavalta näyttää! Muistetaan vielä, että tunnetusti jokaisen parittoman luvun viimeinen numero on jokin edellisestä viidestä numerosta. Täsmällisyyden vuoksi todistetaan tämä väite ja muistetaan, että edellisessä osiossa tehtyjen päättelyiden mukaan voidaan rajoittaa tarkastelu vain positiivisiin lukuihin:

Lause 2. *Parittoman positiivisen kokonaishuvun viimeinen numero on 1, 3, 5, 7 tai 9.*

Todistus. Parittomuuden määritelmästä seuraa, että joka toinen kokonaisluku on parillinen ja joka toinen pariton. Näin ollen aina seuraava pariton luku saadaan lisäämällä edelliseen luku kaksi. Eli kaikki parittomat positiiviset luvut saadaan, kun lukuun yksi lisätään

¹<https://www.whizz.com/blog/20-cool-facts-maths/>

tarvittava määrä kakkosia. Kun muistetaan vielä, että kahden luvun summassa saatavan tuloksen viimeinen numero riippuu vain summattavien viimeisistä numeroista, niin voidaan tarkastella, miten parittomien lukujen viimeiset numerot käyttäytyvät. Olkoon taulukossa n jokin pariton positiivinen kokonaisluku:

n viimeinen numero	$n + 2$ viimeinen numero
1	$1 + 2 = 3$
3	$3 + 2 = 5$
5	$5 + 2 = 7$
7	$7 + 2 = 9$
9	$9 + 2 = 11 \rightarrow 1$

Taulokosta nähdään, että luvut 1, 3, 5, 7 ja 9 ovat vuorotellen parittoman luvun viimeisiä numeroita. Väite on siis todistettu. $\square$

Tämähän näyttää hyvältä! Nimittäin, jos nyt voidaan todeta, että viimeinen numero todella on myös mukana luvussa, kun se kirjoitetaan sanoin, niin väite on todistettu! Onhan esimerkiksi 101 englanniksi ”one hundred one” eli viimeisenä numerona oleva ykkönen todella on mukana myös kirjoitetussa muodossa, ja se sisältää kirjaimen e. Tämä loistava viritelmä kaatuu kuitenkin jo ensimmäisen lukua kymmenen suuremman parittoman luvun kohdalla. Nimittäin luku yksitoista (”eleven”) sisältää kyllä e-kirjaimen, mutta ei ole haluttua muotoa. Senhän pitäisi olla ”ten-one”.

Vaikuttaa siis siltä, että tarvitaan jotain tietoa siitä, miten englannin kielessä numerot on nimetty. Tämän olisi kyllä voinut päätellä jo heti aluksi. Väitehän on selvästi kieliriippuvainen, sillä se ei esimerkiksi suomeksi päde. Luku ”yksi” ei esimerkiksi sisällä yhtään e-kirjainta.

Numerot englanniksi

Seuraava vaihe sisältää hieman googletusta ja englannin kielen rakenteeseen tutustumista. Pienen työn jälkeen selviää, että ThoughtGo²-nimisen, opetukseen liittyvän internetsivuston, mukaan³ kaikilla kokonaisluvuilla 1–20 on omat nimensä. On helppo tarkistaa, että tällä välillä kaikki parittomat luvut sisältävät e-kirjaimen — sehän on jo melkein tehty tässä tekstissä aiemmin! Tämän jälkeen teksti antaa ymmärtää, että numeroihin tulee aina jokin alku ja sitten se päättyy johonkin numeroista 1–20 tai nolla. Joillain suurilla luvuilla — tekstin perusteella kymmenen potensseilla, mikä vastaa myös Wikipedian kuvausta⁴ asiasta — on omat nimensä. Tämä ei kuitenkaan vaikuta nyt tehtävään tarkasteluun, sillä riittää tutkia vain parittomia lukuja.

On siis havaittu, että ne parittomat kokonaisluvut, joilla on oma nimensä, sisältävät e-kirjaimen. Loput taas loppuvat lauseen 2 mukaan johonkin sellaiseen numeroon, joka sisältää e-kirjaimen. Siispä kaikkien parittomien kokonaislukujen on todella sisällettävä e-kirjain!

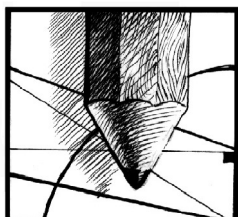
Lopuksi

Alaviitteestä 1 löytyy myös muita mielenkiintoisia väitteitä, joihin voi miettiä todistuksia. Siellä esimerkiksi väitetään, että ”forty” (40) on ainoa luku, jonka numerot on kirjoitettu aakkosjärjestyksessä. Tai voi olla mielenkiintoista pohtia, löytyykö suomen kielestä jokin samanhenkistä rakennetta kuin tässä kirjoituksessa tutkittiin.

²<https://www.thoughtco.com/>

³<https://www.thoughtco.com/expressing-numbers-in-english-1210097>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/English_numerals



Entä jos olisi äärettömän suuria luonnollisia lukuja?

Tuomas Korppi

Johdanto

Kuten lukija varmaan tietää, luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ääretön. Jonoa $1, 2, 3, \dots$ voidaan nimittäin jatkaa äärettömiin. Oltiinpa päästy miten pitkälle tahansa, sanokaamme lukuun n saakka, aina voidaan muodostaa seuraava luku $n + 1$. Kuitenkin kaikki luonnolliset luvut ovat äärellisiä, kuten 5, 10 ja 345678908765445678987654567899876545678987.

Internetin keskustelupalstoilla pyörii silloin tällöin yksityisajattelijoina, jotka väittävät, että luonnollisten lukujen joukon äärettömyydestä seuraa, että välttämättä on olemassa äärettömän suuria luonnollisia lukuja.

Koulutetulle matemaatikolle on selvää, että äärettömän suurten luonnollisten lukujen olemassaolo ei ainakaan ole välttämättömyys. Matematiikkaa on tehty satoja vuosia olettaen vain äärellisen suuria luonnollisia lukuja, eikä luonnollisten lukujen vakiintuneesta teoriasta ole yrityksistä huolimatta löydetty sisäisiä ristiriitaisuuksia.

Voitaisiinko sitten tehdä ”vaihtoehtomatematiikkaa”, jossa luonnollisten lukujen joukko sisältäisi äärettömän suuria luonnollisia lukuja? Tässä kirjoitelmassa tutkimme, millaista tuo vaihtoehtomatematiikka olisi.

Luku N

Oletetaan, että on olemassa ääretön luonnollinen luku N . Siitä, että sanomme, että tällainen luku on olemas-

sa, ei voida vielä päätellä, millaisia ominaisuuksia sillä on. Kuitenkin luonnollisille luvuille on ominaista, että niillä voidaan laskea. Niinpä oletamme, että sama pätee N :lle.

Jokaiselle luonnolliselle luvulle voidaan muodostaa seuraava luonnollinen luku, joten on olemassa vielä N :ää suurempi luonnollinen luku $N + 1$. Siis N ei ollut suurin luonnollinen luku. Vielä on olemassa luku $N + 2$, $N + 3$ jne. Luonnollisia lukuja voidaan kertoa keskenään, joten on olemassa myös luvut $2N$, $3N$ jne, jopa $N \times N$. Nollasta eroavasta luonnollisesta luvusta voidaan myös vähentää pienempi luonnollinen luku, joten on olemassa luvut $N - 1$, $N - 2$, $N - 3, \dots$, jotka luonnollisesti ovat myös äärettömiä.

Oletimme N :stä ainoastaan, että se on äärettömän suuri luonnollinen luku, ja löysimme suuremman äärettömän luonnollisen luvun $N + 1$ ja pienemmän äärettömän luonnollisen luvun $N - 1$. Niinpä teemme sen johtopäätöksen, että äärettömien luonnollisten lukujen joukossa ei ole pienintä tai suurinta alkia.

Luku $1/N$

Luonnollisen luvun käänteisluku on reaaliluku, ei luonnollinen luku. Niinpä N :n olemassaolosta seuraa, että reaalilukujen joukko sisältää luvun $1/N$. Se on suurempi kuin nolla, koska luonnollisten lukujen käänteisluvut ovat nollaa suurempia. Kuitenkin, jos n on äärellinen luonnollinen luku, $1/N < 1/n$. Siis esimerkiksi $1/N < 1/484567890987654567898765456789098765456789987$.

Luku $1/N$ on siis äärettömän pieni positiivinen luku eli infinitesimaalinen positiivinen luku.

Lisäksi jokaiselle reaalityluvulle x on olemassa luku $x + 1/N$, jolle $(x + 1/N) - x = 1/N$ on infinitesimaalisen pieni, eli luvut x ja $x + 1/N$ ovat infinitesimaalisen lähellä toisiaan.

Vastaavasti kuin N ei ollut suurin luonnollinen luku, ei $1/N$ ole pienin infinitesimaalisen pieni positiivinen luku. Luku $1/(N + 1)$ on nimittäin vielä pienempi. Samoin $1/(N + 2)$, $1/(N + 3)$, ..., eikä infinitesimaalisen pienten positiivisten lukujen joukossa ole pienintä alkiota.

Desimaalikehitelmät

Vakiintuneessa matematiikassa on tunnettua, että ei ole olemassa pienintä positiivista reaalitylukua. Jos x on pieni positiivinen reaalityluku, voidaan nimittäin muodostaa vielä pienempi positiivinen reaalityluku $x/2$. Monet yksityisajattelijat, erityisesti pohtiessaan Zenonin paradokseja, eivät hyväksy tätä tosiasiaa. He väittävät, että on olemassa pienin positiivinen reaalityluku $0,000\dots 1$. Eli luku, jossa on äärettömän monta nollaa ja niiden perässä ykkönen. Tämä ei kuitenkaan ole minkään reaalityluvun desimaalikehitelmä.

Miltä tilanne näyttää, jos oletamme äärettömän suuren luonnollisen luvun N ? Tällöin reaalitylukujen desimaalikehitelmissä on N :s desimaali, ja voidaan muodostaa luku $0,000\dots 0001000\dots$, missä on nollat kaikilla muilla paikoilla ja ykkönen N :nnellä paikalla. Voidaan kuitenkin muodostaa vielä pienempi luku, jossa on nollat muilla paikoilla ja ykkönen $N + 1$:nnellä paikalla. Sitten voidaan muodostaa vielä pienempi positiivinen reaalityluku jne. Ajatuksesta, että on olemassa pienin positiivinen reaalityluku x ei tietääkseni synnykään mitään järkevää. Ainakaan jakolaskua ei sellaiselle voisi olla määritelty, tai muuten $x/2$ sotkee homman.

Vakiintuneessa matematiikassa on myös tunnettua, että $0,9999\dots = 1$. Tätäkään monet yksityisajattelijat eivät hyväksy, vaan väittävät, että näiden erotus on infinitesimaalisen pieni, nollasta eroava reaalityluku. Jos kuitenkin muodostamme luvun $0,999\dots$ meidän teoriassamme, siinä on ylit myös kaikilla äärettömän suurten luonnollisten lukujen N kuvaamilla paikoilla, ja tulos $0,9999\dots = 1$ pätee edelleen. Niinpä $1 - 0,999\dots$ ei myöskään meidän teoriassamme kelpaa pienimmäksi positiiviseksi reaalityluvuksi.

Jatkuvat funktiot

Tässä luvussa infinitesimaalisen pientä positiivista reaalitylukua merkitään symbolilla ϵ . Siis $0 < \epsilon < 1/n$, missä n käy läpi äärelliset luonnolliset luvut.

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2$. Se on jatkuva kaikilla reaalityluvuilla. Erityisesti se on jatkuva pisteessä 3. Kun lasketaan $f(3 + \epsilon)$, saadaan $(3 + \epsilon)^2 = 9 + 6\epsilon + \epsilon^2$, missä 6ϵ ja ϵ^2 ovat infinitesimaalisen pieniä, ja 9 on $f(3)$. f siis vie luvun $3 + \epsilon$ infinitesimaalisen lähelle lukua $f(3)$. Tässä vaiheessa teemmekin seuraavan arvauksen: Jatkuva funktio vie infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Tämä arvaus on myös aika luonnollinen siitä ajatuksesta, että jatkuvan funktion kuvaaja on yhtenäinen käyrä.

Tutkitaan sitten funktiota $f(x) = 0$, kun $x \leq 0$, ja $f(x) = 1$, kun $x > 0$. Funktiolla on siis epäjatkuvuuskohta pisteessä 0. Nyt $f(0) = 0$, mutta $f(\epsilon) = 1$. Nyt siis löytyy kaksi infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevaa pistettä, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Teemmekin seuraavan arvauksen: Jos funktio on epäjatkuva, on infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Tämäkin arvaus on aika luonnollinen siitä ajatuksesta, että epäjatkuvan funktion kuvaaja ”hyppää” jossain kohti.

Tutkitaan sitten funktiota $f(x) = Nx$. Nyt $f(0) = 0$, mutta $f(1/N) = N(1/N) = 1$. Nyt siis löytyy kaksi infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevaa pistettä, jotka eivät kuvaudu infinitesimaalisen lähelle toisiaan. Funktio f on kuitenkin jatkuva.

Tämä f on kuitenkin tietysti mielessä epätavallinen: Sen määrittelyssä jouduttiin viittaamaan äärettömään lukuun N . Niinpä tämä funktio ei saa meitä luopumaan ensimmäisestä arvauksestamme vaan ennemmin muuttamaan sitä seuraavasti: ”Tavallinen” jatkuva funktio vie infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet infinitesimaalisen lähelle toisiaan.

Näiden arvausten todistaminen on sen verran vaikeaa, ettemme tässä siihen mene. Arvauksissa on kuitenkin paljon totuutta, ja kun kohta saamme tarpeeksi uutta käsitelkoneistoa, muotoilemme tuloksen, joka on näiden arvausten eksakti ja pätevä versio.

Mitä matemaatikot ajattelevat tästä pyhänhäväistyksestä?

Vakiintuneessa matematiikassa ei hyväksytty äärettömän suuria luonnollisia lukuja tai infinitesimaalisen pieniä positiivisia reaalitylukuja. Olemmeko siis perustamassa uutta, kapinallista matematiikan koulukuntaa, joka hyväksyy eri tulokset kuin muut matemaatikot? Emme. Matematiikassa on nimittäin vakiintuneet, selkeät menetelmät, joilla uusia matemaattisia olioita voidaan rakentaa, tai kuten matemaatikot sanovat, konstruoida. Osoittautuu, että vakiintuneen matemaattisten olioiden maailman sisälle voidaan vakiintuneilla menetelmillä konstruoida pieni ”hiekkalaatikko-maailma”, jossa jokainen ääretön joukko sisältää myös

äärettömiä alkioita, ja siellä asiat toimivat, kuten edellisissä kappaleissa on esitetty.

Hiekkalaatikkomaailmassa on joukolle $\mathbb{N}$ vastine ${}^*\mathbb{N}$, joka sisältää sekä äärellisen että äärettömän kokoiset ”luonnolliset luvut” ja joukolle $\mathbb{R}$ vastine ${}^*\mathbb{R}$, joka sisältää tavallisten reaalilukujen vastineiden lisäksi infinitesimaalisen pieniä positiivisia lukuja. Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on vastine ${}^*n \in {}^*\mathbb{N}$, esimerkiksi luvulle 3 on olemassa vastine ”hiekkalaatikkokolmonen”, *3 . Jokaiselle $r \in \mathbb{R}$ on vastine ${}^*r \in {}^*\mathbb{R}$. Lisäksi jokaiselle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on vastine ${}^*f: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$. Siis esimerkiksi funktiolle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ on vastine ${}^*f: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}; {}^*f(x) = x^{*2}$.

Näin valtavirtamatemaatikotkin hyväksyvät ”äärettömän suuria luonnollisia lukuja” ja ”infinitesimaalisen pieniä reaalilukuja” koskevat tulokset, ei joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}$ alkioita koskevin tuloksina, vaan joukkojen ${}^*\mathbb{N}$ ja ${}^*\mathbb{R}$ alkioita koskevin tuloksina.

Palataan jatkuviin funktioihin

Nyt tulos, josta vihjaistiin pari lukua takaperin kuuluu seuraavasti:

Lause 1. *Olko $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

- *f on jatkuva pisteessä x .*

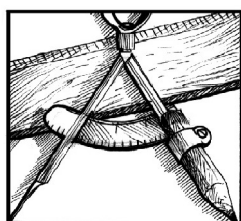
- *Kaikilla $y \in {}^*\mathbb{R}$, joille y on infinitesimaalisen lähellä lukua *x , pätee, että ${}^*f(y)$ on infinitesimaalisen lähellä lukua ${}^*f({}^*x)$.*

Huomaamme lauseesta, että se pätee vain funktioille, jotka ovat muotoa *f , missä $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pari lukua sitten esitetty funktio $g: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}; g(x) = Nx$ on olemassa hiekkalaatikkomaailman sisällä, mutta se ei ole muotoa $g = {}^*f$ yhdellekään funktiolle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On myös tärkeää, että se piste x , jossa jatkuvuutta tarkastellaan, on joukon $\mathbb{R}$ alkio, ei joukon ${}^*\mathbb{R}$ äärettömän suuri luku. Lukija voi ihan piruuttaan kokeilla, mitä tapahtuu, jos funktiona on $f(x) = x^2$, ja arvoja ${}^*f(N)$ ja ${}^*f(N + 1/N)$ vertaillaan.

Lopuksi

Tässä kirjoitelmassa esitetyn hiekkalaatikkomaailman sisällä operoimista kutsutaan *epästandardiksi analyysiksi*, ja idean isä on Abraham Robinson. Epästandardi analyysi on siis ihan pätevää matematiikkaa, joten sen arvon ratkaisee kysymys: Onko siitä hyötyä? Tästä ollaan montaa mieltä. Jotkut kokevat epästandardin analyysin hyödylliseksi, mutta monien mielestä se vain mutkistaa asioita eikä mahdollista mitään oikeasti mullistavaa.



Matematiikkadiplomit vuonna 2019

Marjatta Näätänen

dos., Helsingin yliopisto

Diplomitehtävien 483 vastauspyyntöä tuli vuonna 2019 seuraavilta 122 paikkakunnalta. Vähintään 5 pyyntöä lähettäneet on mainittu:

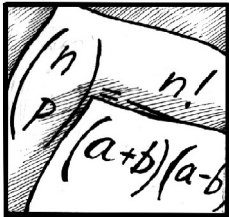
Akaa, Alajärvi, Asikkala, Espoo (72 kpl), Eurajoki, Forssa, Haapavesi, Hankasalmi, Harjavalta, Hartola, Haukipudas, Helsinki (62 kpl), Hollola, Hyrynsalmi, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Ii, Iisalmi, Iitti, Ilmajoki, Ilomantsi, Janakkala, Joensuu, Joroinen, Joutseno, Jyväskylä (16 kpl), Jämsä, Järvenpää (6 kpl), Kaarina, Kangasala, Kankaanpää, Kannus, Karkkila, Karstula, Kauhava, Kauniainen, Kemi, Kemijärvi, Kemminmaa, Kempele, Kerava, Kirkkonummi (7 kpl), Kokkola, Kontiolahti, Kotka, Kouvolaa, Kuopio (6 kpl), Kurikka, Lahti (14 kpl), Laitila, Lapinlahti, Lappee, Lappeenranta (5 kpl), Laukaa, Lemi, Lieto, Liminka, Lohja, Luhanka, Masku, Mikkeli, Muhos, Muonio, Mustasaari, Muurame, Mäntsälä (6 kpl), Mänttä-Vilppula, Naantali, Nakkila, Nivala, Nokia, Nurmijärvi (12 kpl), Orimattila, Oulu (32 kpl), Paimio, Parikkala, Parkano, Pelkosenniemi, Petäjävesi, Pieksämäki, Pietarsaari, Pirkkala, Pori, Pornainen, Porvoo (5 kpl), Pudasjärvi, Puumala, Pöytyä, Raahe, Raasepori, Raisio, Rana, Rauma, Riihimäki, Rovaniemi (5 kpl), Rusko, Salo, Sastamala, Savitaipale, Savonlinna, Seinäjoki, Siilinjärvi, Sipoo, Sodankylä, Somero, Sonkajärvi, Suonenjoki, Tampere (20 kpl), Toholampi, Tornio, Tukholma, Turku (7 kpl), Tuusula (6 kpl), Tyrnävä, Ulvi-

la, Urjala, Vaasa (7 kpl), Valkeakoski, Vantaa (16 kpl), Vihti (5 kpl), Ylöjärvi (9 kpl).

Laaja-alaisten tehtäväpakettien vastauspyyntöjä tuli yhteensä 19 näiltä paikkakunnilta: Espoo, Helsinki (6 kpl), Iitti, Jyväskylä, Kemi, Kirkkonummi, Kurikka, Lahti, Mäntsälä, Oulu, Tampere, Vaasa.

Koska osalla opettajista on jo useiden aikaisempien vuosien ajalta saadut vastaukset, ei voida arvioida, kuinka monella luokalla diplomitehtäviä käytetään. Diplomitehtävien käytön levinneisyys ja jatkuvuus eri puolilla maata sen sijaan näkyy selvästi ja on erityisen ilahduttavaa. Suomenkieliset koulut esim. Tukholmassa ovat myös löytäneet diplomit. Opettajat käyttävät diplomeja eri tavoin, esimerkiksi koko luokalle alaluokilla, ja oppilaiden tarpeiden ja erojen suurennuttua diplomitehtävät antavat mahdollisuuden eriyttää, sekä kertaamiseen, että myös ylöspäin. Tästä on tullut opettajilta erityisesti kiitosta, sillä sopivasta aineistosta on ollut puutetta. Matematiikkadiplomit näyttävät täyttävän hyvin tehtävänsä ja opettajat ovat itse levittäneet niistä tietoa toisilleen.

Vastaukset lähettää opettajille pyynnöstä juha.ruokolainen at yahoo.com. Oma Helsingin yliopiston osoitteeni lakkaa toimimasta tänä keväänä, sitä ei siis enää tule käyttää.



Muirheadin epäyhtälö: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Artikkelissa *Muirheadin epäyhtälö* Solmun numerossa 3/2019 oli seitsemän ongelmaa lukijoiden iloksi. Tässä olisi ratkaisu jokaiselle niistä.

Ongelma 1. Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaali-lukuja. Osoita, että

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettavan epäyhtälön vasen puoli auki se muuttuu muotoon

$$a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc \geq 8abc,$$

eli riittää todistaa, että

$$a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 \geq 6abc.$$

Todetaan tätä varten, että $\langle 2, 1, 0 \rangle \succ \langle 1, 1, 1 \rangle$. Onhan nimittäin

$$2 \geq 1 \geq 0, \quad 1 \geq 1 \geq 1, \quad 2+1+0 = 3 = 1+1+1,$$

sekä vielä

$$2 \geq 1 \quad \text{ja} \quad 2+1 = 3 \geq 2 = 1+1.$$

Siten Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^2b \geq \sum_{\text{sym}} abc,$$

mikä onkin juuri tarvittava epäyhtälö. $\square$

Ongelma 2. Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaali-lukuja. Osoita, että

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

Ratkaisu. Todetkaamme ensin, että

$$\langle 4, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle \quad \text{ja} \quad \langle 2, 2, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle.$$

Onhan nimittäin

$$4 \geq 0 \geq 0, \quad 2 \geq 1 \geq 1, \quad 2 \geq 2 \geq 0, \quad \text{ja} \quad 2 \geq 1 \geq 1,$$

ja

$$4+0+0 = 4 = 2+1+1$$

ja

$$2+2+0 = 4 = 2+1+1,$$

sekä

$$4 \geq 2, \quad 4+0 = 4 \geq 3 = 2+1, \quad 2 \geq 2,$$

ja

$$2+2 = 4 \geq 3 = 2+1.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^4 \geq \sum_{\text{sym}} a^2bc, \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} a^2b^2 \geq \sum_{\text{sym}} a^2bc.$$

Edellinen epäyhtälö sanoo, että

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2bc + ab^2c + abc^2),$$

tai sievemmin

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2,$$

ja jälkimmäinen sanoo, että

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(ab^2c + ab^2c + ab^2c).$$

Laskemalla nämä kaksi viimeistä epäyhtälöä yhteen saamme

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \geq 3(ab^2c + ab^2c + ab^2c), \end{aligned}$$

eli

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c),$$

kuten pitikin. $\square$

Ongelma 3. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Todista, että

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ratkaisu. Riittää osoittaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a , b ja c pätee

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 \\ \geq a^{7/3}b^{1/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{7/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{1/3}c^{7/3}. \end{aligned}$$

Voimmekin helposti tarkistaa, että

$$\langle 3, 0, 0 \rangle \succ \langle 7/3, 1/3, 1/3 \rangle,$$

sillä onhan

$$3 \geq 0 \geq 0, \quad \frac{7}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}, \quad 3 + 0 + 0 = 3 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$

sekä vielä

$$3 = \frac{9}{3} \geq \frac{7}{3}, \quad \text{ja} \quad 3 + 0 = 3 = \frac{9}{3} \geq \frac{8}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^{7/3}b^{1/3}c^{1/3},$$

eli

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) \\ \geq 2(a^{7/3}b^{1/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{7/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{1/3}c^{7/3}), \end{aligned}$$

mistä väite seuraakin suoraan jakamalla puolittain kahdella. $\square$

Ongelma 4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolle $n \geq 2$, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ratkaisu. Aloitetaan toteamalla, että n reaaliluvun jo-noille $\langle 1/2, 1/2, 0, \dots, 0 \rangle$ ja $\langle 1/n, 1/n, \dots, 1/n \rangle$ pätee

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right\rangle \succ \left\langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\rangle.$$

Tämä seuraa havainnoista

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq 0 \geq 0 \geq \dots \geq 0, \quad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \geq \dots \geq \frac{1}{n},$$

ja

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

sekä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \geq \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 &= 1 \geq \frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{(n-2) \times 0} &= 1 \geq \frac{n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \times \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Nyt Muirheadin epäyhtälön nojalla pätee

$$\sum_{\text{sym}} a_1^{1/2} a_2^{1/2} \geq \sum_{\text{sym}} a_1^{1/n} a_2^{1/n} \cdots a_n^{1/n},$$

eli

$$2! \cdot (n-2)! \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} \geq n! \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

mistä väite heti seuraakin jakamalla puolittain kertomalla $n!$. $\square$

Ongelma 5. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista Nesbittin epäyhtälö

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Kertomalla epäyhtälö puolittain nimittäjien tulolla $2(a+b)(b+c)(c+a)$ se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} 2a(c+a)(a+b) + 2b(b+c)(a+b) \\ + 2c(b+c)(c+a) \\ \geq 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Kertomalla kaikki tulot auki jäljelle jää

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc \\ + 2(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) \\ \geq 3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) + 6abc, \end{aligned}$$

mikä sievenee muotoon

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2.$$

Tämä onkin

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^2b,$$

mikä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain sattuu olemaan niin, että $\langle 3, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 0 \rangle$. Mutta tämä pätee, koska on

$$3 \geq 0 \geq 0, \quad 2 \geq 1 \geq 0, \quad 3+0+0 = 3 = 2+1+0,$$

sekä vielä $3 \geq 2$ ja $3+0 = 3 \geq 3 = 2+1$. $\square$

Ongelma 6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Todista, että

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettava epäyhtälö puolittain tulolla $a^2b^2c^2$ se muuttuu muotoon

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 2a^2b^2c^2 + 2a^{5/3}b^{5/3}c^{5/3}(a+b+c),$$

minkä, kertomalla kaiken auki ja supistamalla puolittain termit $2a^2b^2c^2$, voimme kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa

$$\sum_{\text{sym}} a^4b^2 \geq \sum_{\text{sym}} a^{8/3}b^{5/3}c^{5/3}.$$

Tämä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 4, 2, 0 \rangle \succ \langle 8/3, 5/3, 5/3 \rangle$. Mutta näin on, sillä

$$4 \geq 2 \geq 0, \quad \frac{8}{3} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3},$$

ja

$$4+2+0 = 6 = \frac{18}{3} = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3},$$

ja vielä

$$4 = \frac{12}{3} \geq \frac{8}{3}, \quad \text{sekä} \quad 4+2 = 6 = \frac{18}{3} \geq \frac{13}{3} = \frac{8}{3} + \frac{5}{3}. \quad \square$$

Ongelma 7. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Todista, että

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain tulolla

$$abc(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc)$$

todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} & (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)abc \\ & + (b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc)abc \\ & + (c^3 + a^3 + abc)(a^3 + b^3 + abc)abc \\ & \leq (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc). \end{aligned}$$

Kertomalla rohkeasti kaiken auki ja ryhmittelemällä termejä sopivasti se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} & (a^6 + b^6 + c^6)abc + 3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)abc \\ & + 4(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 + 3a^3b^3c^3 \\ & \leq (a^6b^3 + a^6c^3 + a^3b^6 + b^6c^3 + a^3c^6 + b^3c^6) \\ & + 2a^3b^3c^3 + (a^6 + b^6 + c^6)abc \\ & + 3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)abc \\ & + 2(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 + a^3b^3c^3, \end{aligned}$$

mikä sievenee välittömästi muotoon

$$\begin{aligned} & 2(a^3 + b^3 + c^3)a^2b^2c^2 \\ & \leq a^6b^3 + a^6c^3 + a^3b^6 + b^6c^3 + a^3c^6 + b^3c^6, \end{aligned}$$

tai vielä yksinkertaisemmin muotoon

$$\sum_{\text{sym}} a^5b^2c^2 \leq \sum_{\text{sym}} a^6b^3.$$

Tämä puolestaan seuraa välittömästi Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 6, 3, 0 \rangle \succ \langle 5, 2, 2 \rangle$. Mutta tämä pätee, sillä on

$$6 \geq 3 \geq 0, \quad 5 \geq 2 \geq 2, \quad \text{ja} \quad 6+3+0 = 9 = 5+2+2,$$

sekä vielä

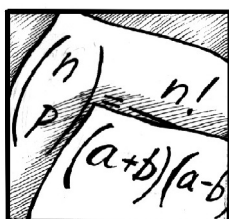
$$6 \geq 5, \quad \text{ja} \quad 6+3 = 9 \geq 7 = 5+2. \quad \square$$

Lähteet

Ongelmat 1, 2 ja 4 ovat tehtävät 12.2(a), 12.3 ja 12.2(c) kirjassa [3]. Ongelmat 2 ja 5 ovat esimerkit 6.12 ja 6.13 teoksessa [1], ja ongelma 6 on saman teoksen tehtävä 6d.4. Lopuksi, ongelma 7 on harjoitustehtävä 12.9 kirjassa [2].

Viitteet

- [1] BRADLEY, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.
- [2] CVETKOVSKI, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.
- [3] STEELE, J. M.: *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America Problem Books Series, Cambridge University Press, 2004.



Koronalotto

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Viime päivät mediassa on puhuttu paljon COVID-19-taudista eli kansankielisemmin koronaviruksesta. Viruksen takia Suomessa yli 10 hengen julkiset kokoontumiset on kielletty, yli 70-vuotiaita ohjeistetaan vahvasti pysymään karanteenia vastaavissa oloissa, koulussa lähes kaikkien luokka-asteiden opetus toimii vain etänä ja niin edelleen. Tätä tekstiä kirjoittaessa sunnuntaina 22.3.2020 Suomessa uutisoidaan olevan 626 vahvistettua tartuntaa ja yksi koronaan kuollut.

Jotta koronavirukseen liittyviä lukuja olisi helpompi käsittää, niin tässä kirjoituksessa verrataan suositun Loton voittojen todennäköisyyksiä valtioneuvoston julkaisemiin ennusteisiin¹ epidemian vaikutuksista.

Suomen Lotossa 40 numerosta valitaan 7 sekä yksi lisänumero. Lisäksi arvonnassa on plusnumero, mutta sitä ei oteta mukaan tässä tekstissä tehtäviin tarkasteluihin. Lotossa voittaa saamalla vähintään neljä oikein, kuusi oikein ja lisänumeron tai kolme oikein ja lisänumeron². Vuonna 2018 Loton liikevaihto, eli siis myyntituotot, joista on vähennetty arvonnalisävero yms. sekä mahdolliset avustukset, oli noin 340,404 miljoonaa euroa³. Vuonna 2018 Tilastokeskuksen mukaan Suomen väkiluku oli 5 517 919 henkeä, joten siis Loton liikevaihto oli noin 61,69 euroa asukasta kohti. Normaalin lottorivin hinta oli yksi euro eli keskimäärin suomalainen

lottosi yli yhden rivin viikossa. Näin ollen lienee perusteltua sanoa, että lottoamiseen löytyi ainakin vuonna 2018 kiinnostusta Suomessa.

Edellisten esitietojen jälkeen voidaan siirtyä itse todennäköisyyksien pariin. Tarkastellaanpa ensin valtioneuvoston julkaiseman kaikkein *lievimmän* tapauksen skenaariota, jonka mukaan koronavirus aiheuttaa Suomessa 540 kuolemantapausta. Tilastokeskuksen mukaan Suomen ennakkoväkiluku oli tammikuun lopussa 5 528 442 henkilöä. Tämä tarkoittaa, että satunnainen suomalainen kuolee koronavirukseen

$$\frac{540}{5\,528\,442} = \frac{90}{921\,407} \approx 0,00010$$

todennäköisyydellä. Lotossa taas seitsemän oikein saa täsmälleen yhdellä rivillä. Kaikkiaan mahdollisia rivejä on $\binom{40}{7}$ eli oikean rivin todennäköisyys on

$$\binom{40}{7}^{-1} \approx 0,00000005.$$

Täten kaikkein lievimmässä skenaariossa koronaan kuoleminen todennäköisyys on

$$\left(\frac{90}{921\,407}\right) / \binom{40}{7}^{-1} = \frac{1\,677\,920\,400}{921\,407} \approx 1821$$

¹ks. esim. <https://yle.fi/uutiset/3-11261761>

²<https://www.veikkaus.fi/fi/lotto>

³https://cms.veikkaus.fi/site/binaries/content/assets/dokumentit/vuosikertomus/2018/veikkaus_vuosiraportti_2018.pdf

kertaa niin suuri kuin Lotossa seitsemän oikein saaminen. Vastaavasti kaikkein vaikeimmassa tapauksessa koronaan kuoleamisen todennäköisyys suhteessa seitsemän oikeaan tulokseen Lotossa on

$$\left(\frac{540}{921\,407}\right) \bigg/ \binom{40}{7}^{-1} = \frac{10\,067\,522\,400}{921\,407} \approx 10\,926.$$

Vaikka jokainen matematiikan parissa vähääkään pyörinyt varmasti tietää, että Lotossa seitsemän oikein saaminen on hyvin epätodennäköistä, niin ainakin kirjoittajan mielestä edelliset luvut ovat varsin epämiellyttäviä. Jopa *lievimmässä* ennusteessa on kuitenkin lähes *kaksi tuhatta* kertaa niin todennäköistä kuolla koronavirukseen kuin saada Lotossa seitsemän oikein.

Toki Lotossa saa rahapalkintoja muillakin tavoin kuin saamalla seitsemän oikein. Tarkastellaan nyt näitä. Lauantaina 21.3.2020 saamalla Lotossa korkeintaan viisi oikein oli oikeutettu korkeintaan 51,82 euron palkkioon ilman plusnumeron huomioimista². Saamalla taas 7, 6 + 1 tai 6 oikein oli oikeutettu vähintään noin 2500 euron palkkioon. Vaikka jo 50 eurolla saa paljon kaikenlaista – vaikkapa yli 50 kg perunoita –, niin yksittäinen tällainen voitto tuskin tuo pitkällä tähtäimellä kovin suurta muutosta kenenkään elämään. Tarkastellaan siis seuraavaksi niiden tapausten todennäköisyyksiä, joilla olisi saanut lauantaina vähintään 2500 euroa palkinnoksi.

Kuten edellä on huomattu, vain yhdessä rivissä kaikki seitsemän numeroa ovat oikein. Sellaisia rivejä, joissa on täsmälleen kuusi oikein, on $\binom{7}{6}\binom{33}{1}$. Tapaus 6 + 1 toteutuu taas $\binom{7}{6}$ rivillä. Näin ollen lievimmissä tapauksessa koronaan kuoleamisen todennäköisyyden suhde edellä mainitun voiton todennäköisyyteen on

$$\left(\frac{90}{921\,407}\binom{40}{7}\right) \bigg/ \left(1 + \binom{7}{6}\binom{33}{1} + \binom{7}{6}\right) = \frac{1\,677\,920\,400}{220\,216\,273} \approx 7,6.$$

Vastaava luku on vaikeimmassa ennusteessa

$$\left(\frac{540}{921\,407}\binom{40}{7}\right) \bigg/ \left(1 + \binom{7}{6}\binom{33}{1} + \binom{7}{6}\right) = \frac{10\,067\,522\,400}{220\,216\,273} \approx 45,7.$$

Luonnollisestikin koronaviruksen vaikutukset näkyvät myös muissa sairastuneissa kuin kuolleissa. Alla olevassa taulukossa on vertailtu myös sairaala- tai tehohoittoa vaativaksi potilaaksi joutumisen todennäköisyyt-

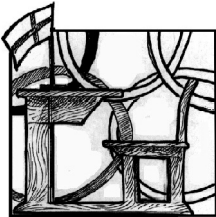
tä erinäisiin Loton voittojen todennäköisyyksiin. Merkinällä P tarkoitetaan jonkin tapahtuman todennäköisyyttä. Esimerkiksi $P(\text{sairaala})$ tarkoittaa koronan takia sairaalapotilaaksi joutumisen todennäköisyyttä. Taas $P(\geq 6 \text{ oikein})$ tarkoittaa todennäköisyyttä saada kuusi oikein tai parempi tulos (6, 6 + 1 tai 7) Lotossa. Vertailun vuoksi myös edellä lasketut luvut on laitettu mukaan taulukkoon.

	Lievin	Vaikein
$\frac{P(\text{sairaala})}{P(7 \text{ oikein})}$	14 568	109 262
$\frac{P(\text{teho})}{P(7 \text{ oikein})}$	3642	27 316
$\frac{P(\text{kuolema})}{P(7 \text{ oikein})}$	1821	10 926
$\frac{P(\text{sairaala})}{P(\geq 6 \text{ oikein})}$	61,0	457
$\frac{P(\text{teho})}{P(\geq 6 \text{ oikein})}$	15,2	114
$\frac{P(\text{kuolema})}{P(\geq 6 \text{ oikein})}$	7,6	45,7

Mainittakoon vielä, että kaikkein *vaikeimman tapauksen ennusteessa koronaan kuoleamisen todennäköisyys on vain hieman pienempi kuin viime lauantaina Lotossa yli 50 euron voittaminen*. Lievimmissä ennusteessa taas sairaalaan joutumisen todennäköisyys on hieman suurempi kuin edellisen voiton saaminen. Tai lievimmissäkin ennusteessa koronaan sairastuminen on lähes kymmenen kertaa niin todennäköistä kuin minkään rahamäärän voittaminen (ilman plusnumeroa) Lotossa.

Kuten alussa todettiin, Suomesta näyttää löytyvän uskoa lottoamiseen. Edellisiä lukuja tarkastellessa voisi siis kuvitella, että myös koronaviruksen vakavuuteen riittää uskoa.

Loppukaneettina on mainittava, että edelliset laskut on tarkoitettu vain enemmän tai vähemmän asian havainnollistamiseksi, ja niitä voidaan kritisoida monin eri tavoin. Onko ylipäänsä mitään järkeä verrata kahden täysin erilaista asiaa toisiinsa? Olisiko järkevämpää käyttää Lotossa toteutuneiden voittojen määriä puhtaiden laskennallisten todennäköisyyksien sijaan? On myös muistettava, kuten tekstistä käy jo aiemmin ilmi, että Lotossa voittosummat vaihtelevat viikoittain. Lisäksi osa koronaviruksesta kärsivistä ihmisistähän voisi joutua sairaalaan tai kuolla jostain muusta syystä, vaikka koko koronavirusta ei olisi. Tai mitä vaikutusta ihmisen iällä, elämäntavoilla yms. on tilanteeseen? Näitä kysymyksiä voi jatkaa vaikka kuinka pitkälle.



Menestystä Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista

Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järvinen, Roope Salmi, Nerissa Shakespeare

Vuoden 2019 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Bathissa Iso-Britanniassa. Suomen joukkueen jäsenet olivat Juho Arala, Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järvinen, Roope Salmi ja Nerissa Shakespeare. Joukkueen johtajana toimi Lauri Hallila ja varajohtajana Otte Heinävaara.

Suomen joukkueen suoritus oli poikkeuksellisen hyvä. Joukkueen yhteispistemäärä oli paras yli kymmeneen vuoteen ja suhteellinen sijoitus oli yksi parhaista viime vuosikymmeneltä. Mitaleita tuli kaksi, hopeaa Olli Järvinenille ja pronssia Roope Salmelle, ja kunniamaininnat myönnettiin Juho Aralalle ja Akseli Jussinmäelle. Hopean lisäksi Järvinen suhteellinen sijoitus oli Suomen historian paras.

Tehtävä 1

Olkoon $\mathbb{Z}$ kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, että kaikille kokonaisluvuille a ja b pätee

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Tehtävä 2

Piste A_1 sijaitsee kolmion ABC sivulla BC ja piste B_1 sijaitsee kolmion sivulla AC . Olkoon P piste janalla AA_1 ja Q piste janalla BB_1 siten, että PQ ja AB

ovat yhdensuuntaisia. Olkoon P_1 sellainen piste suoralla PB_1 , että B_1 sijaitsee aidosti pisteiden P ja P_1 välissä ja $\angle PP_1C = \angle BAC$. Olkoon Q_1 vastaavasti piste suoralla QA_1 siten, että A_1 sijaitsee aidosti pisteiden Q ja Q_1 välissä ja $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Osoita, että pisteet P , Q , P_1 ja Q_1 sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 3

Sosiaalisessa verkossa on 2019 käyttäjää. Jotkut käyttäjäreioista ovat ystäviä keskenään. Jos käyttäjä A on ystävä käyttäjän B kanssa, niin myös käyttäjä B on ystävä käyttäjän A kanssa. Seuraavanlainen tapahtuma voi tapahtua toistuvasti, yksi tapahtuma kerrallaan:

Kolme käyttäjää A , B ja C , joista A on ystävä käyttäjien B ja C kanssa, mutta B ja C eivät ole ystäviä keskenään, muuttavat ystävyysstatuksiaan siten, että B ja C ovat nyt ystäviä keskenään, mutta A ei ole ystävä käyttäjän B eikä käyttäjän C kanssa. Muut ystävyysstatukset pysyvät muuttumattomina.

Aluksi 1010 käyttäjällä on kullakin 1009 ystävää, ja 1009 käyttäjällä on kullakin 1010 ystävää. Osoita, että on olemassa sarja kuvatuslaisia tapahtumia, joiden jälkeen jokainen käyttäjä on ystävä korkeintaan yhden toisen käyttäjän kanssa.

Tehtävä 4

Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (k, n) , joille

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Tehtävä 5

Bathin pankki painaa kolikoita, joiden toisella puolella on H ja toisella puolella T . Harrilla on n tällaista kolikkoa järjestettynä jonoon vasemmalta oikealle. Hän suorittaa seuraavan operaation toistuvasti: Jos tasan $k > 0$ kolikossa on H näkyvällä puolella, niin hän kääntää k :nnen kolikon vasemmalta toisin päin; muussa tapauksessa, kaikissa kolikoissa on T näkyvällä puolella ja hän lopettaa operaatiot. Esimerkiksi jos $n = 3$, niin prosessi, joka alkaa muodostelmasta THT , jatkuisi $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ ja päättyisi kolmen operaation jälkeen.

- (a) Osoita, että jokaisella aloitusmuodostelmalla Harri lopettaa äärellisen määrän operaatioita jälkeen.
- (b) Olkoon $L(C)$ jokaista aloitusmuodostelmaa C kohti niiden operaatioiden lukumäärä, jotka Harri suorittaa ennen kuin hän lopettaa. Esimerkiksi $L(THT) = 3$ ja $L(TTT) = 0$. Määritä luvun $L(C)$ keskiarvo, kun C käy läpi kaikki 2^n mahdollista aloitusmuodostelmaa.

Tehtävä 6

Olkoon I sellaisen teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste, jossa $AB \neq AC$. Kolmion ABC sivut BC , CA ja AB sivuavat sen sisään piirrettyä ympyrää ω pisteissä D , E ja F (samassa järjestyksessä). Suora, joka kulkee pisteen D kautta ja on kohtisuorassa EF :n kanssa, leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä R . Suora AR leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä P . Kolmioiden PCE ja PBF ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat jälleen pisteessä Q .

Osoita, että suorat DI ja PQ leikkaavat suoralla, joka kulkee pisteen A kautta ja on kohtisuorassa AI :n kanssa.

Ratkaisu 1 (Hermann Huhtamäki)

Sijoitetaan $a = 0$, tällöin:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ f(0) + 2f(b) &= f(f(b)). \end{aligned}$$

Sovelletaan tätä alkuperäisen yhtälön oikeaan puoleen, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ f(2a) + 2f(b) &= f(0) + 2f(a+b). \end{aligned}$$

Olkoon lisäksi $a = 1$:

$$\begin{aligned} f(2) + 2f(b) &= f(0) + 2f(1+b) \\ 2f(b+1) - 2f(b) &= f(2) + f(0) \\ f(b+1) - f(b) &= \frac{f(2) + f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Koska funktion määrittelyjoukko on vain kokonaisluvut, se on edellisen yhtälön perusteella lineaarinen eli muotoa $f(n) = kn + l$, jossa k ja l ovat kokonaislukuja. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= f(f(a+b)) \\ k(2a) + l + 2(bk + l) &= f(k(a+b) + l) \\ 2ak + l + 2bk + 2l &= f(ak + bk + l) \\ 2ak + 2bk + 3l &= k(ak + bk + l) + l \\ 2ak + 2bk + 3l &= ak^2 + bk^2 + lk + l. \end{aligned}$$

Eli edelleen sievennettynä:

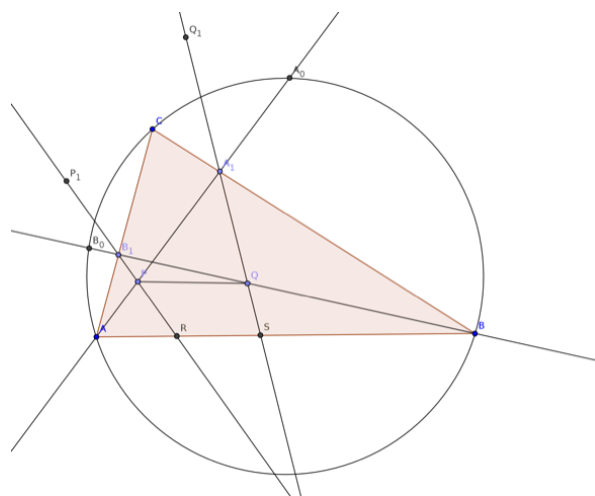
$$\begin{aligned} ak(2-k) + bk(2-k) + l(2-k) &= 0 \\ (2-k)(ak + bk + l) &= 0. \end{aligned}$$

Jotta tämä toteutuisi, pitäisi olla a) $2-k=0$ tai b) $ak + bk + l = 0$.

a) $2-k=0$:sta saadaan, että $k=2$ ja l :n arvolla ei ole merkitystä eli $f(n) = 2n + l$, jossa l on mikä tahansa kokonaisluku.

b) Jotta $ak + bk + l = 0$ toteutuisi, pitäisi olla $k=0$, koska l ei voi muuttua, mutta a ja b voivat, joten niistä tulisi päästä eroon. Siispä ainoa ratkaisu on $k=l=0$ eli $f(n) = 0$.

Ainoat ratkaisut ovat $f(n) = 2n + l$ ja $f(n) = 0$.

Ratkaisu 2 (Nerissa Shakespeare)

Konfiguraatiosta tullaan löytämään paljon jänne-
likulmioita ja ympyröitä, joten ympärysympyrän piirtä-
minen saattaa valaista tilannetta. Määritellään muuta-
ma piste aluksi. Olkoot pisteet A_0 ja B_0 suorien AA_1
ja BB_1 toiset leikkauspisteet kolmion ympärysympy-
rän kanssa. Olkoot pisteet R ja S suorien B_1P ja A_1Q
leikkauspisteet suoran AB kanssa vastaavasti.

ABA_0B_0 on selvästi jänne-
nelikulmio, koska kaikki sen
kärjet ovat kolmion ABC ympärysympyrällä. Yhdiste-
tään tämä janan PQ annetun yhdesuuntaisuusehdon
kanssa, mistä saadaan, että PQA_0B_0 on jänne-
nelikulmio.

Tehtävänannon kulmaehtojen $\angle PP_1C = \angle BAC$ ja
 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ seurauksena SBQ_1C ja $ARCP_1$
ovat jänne-
nelikulmioita.

Löytyneistä jänne-
nelikulmoista motivoituneena ha-
luamme tietenkin kokeilla pisteen potenssia. Sovelle-
taan pisteen potenssia pisteille A_1 ja B_1 :

$$\begin{aligned} A_1C \cdot A_1B &= A_1Q_1 \cdot A_1S = A_1A \cdot A_1A_0 \\ B_1C \cdot B_1A &= B_1P_1 \cdot B_1R = B_1B \cdot B_1B_0. \end{aligned}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} \triangle A_1SA &\sim \triangle A_1A_0Q_1 \\ \Rightarrow \angle A_1Q_1A_0 &= \angle A_1AS = \angle A_1PQ, \end{aligned}$$

eli PQA_0Q_1 on jänne-
nelikulmio. Tehdään sama alem-
malle pisteen potenssista saadulle yhtälölle:

$$\begin{aligned} \triangle B_1P_1B_0 &\sim \triangle B_2BR \\ \Rightarrow \angle B_1P_1B_0 &= \angle B_1BR = \angle B_1QP. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan, että PQP_1B_0 on jänne-
nelikulmio.

Lopputuloksena PQA_0Q_1 ja PQP_1B_0 ovat jänne-
nelikulmioita. Yhdistettynä aiemmin saatuun tulokseen
” PQA_0B_0 on jänne-
nelikulmio” saadaan, että P_1 ja Q_1
ovat samalla ympyrällä kuin P ja Q , ja todistus on val-
mis. $\square$

Ratkaisu 3 (Olli Järvinen)

Seuraava ratkaisu on samanhenkinen kuin ratkaisuyri-
tykseni kilpailun aikana, mutta todistukseen on tehty
tarvittavia muutoksia ratkaisun korjaamiseksi.

Muutetaan ongelma verkkoja koskevaksi: ihmiset vas-
taavat solmuja ja kaaret ystävyyssuhteita. Komponen-
tiksi kutsutaan joukkoa solmuja, joista jokainen on
yhteydessä toisiinsa joidenkin, tarvittaessa useampien,
kaarien kautta. Lisäksi tietysti vaaditaan, että kaikki
tällä tavalla saavutettavat solmut kuuluvat kyseiseen
komponenttiin, eli jokainen solmu kuuluu täsmälleen
yhteen komponenttiin.

Tavoitteena on tehdä operaatioita, jonka jälkeen ver-
kossa jokainen komponentti on enintään kahden sol-
mun kokoinen. Huomaamme, että operaatioita voi teh-
dä aina vain äärellisen monta kappaletta, koska verkon
kaarien määrä pienenee jokaisen operaation toimesta
yhdeksi.

Aloitetaan helpolla lemmalla:

Lemma 1. *Verkossa on alunperin vain yksi kompo-
nentti.*

Verkkoja, joissa on vain yksi komponentti, kutsutaan
yhtenäisiksi.

Todistus. Tehdään vastaoletus: verkossa on vähintään
kaksi komponenttia. Tällöin verkon pienimmässä kom-
ponentissa on enintään 1009 solmua, mutta nyt tä-
män komponentin solmujen asteiden tulisi olla enin-
tään 1008. Ristiriita. $\square$

Tehdään verkolle mielivaltaisesti joitain kuvatul-
laisia operaatioita. Milloin ”häviämme”, eli milloin verkkoon
ei voida tehdä mitään operaatioita, mutta jonkin kom-
ponentin koko on vähintään 3? Tämä tapahtuu aina-
kin silloin, kun kaikki komponentit ovat ns. täydellisiä
verkkoja, eli komponentissa kaikki solmut ovat suoras-
sa yhteydessä kaikkiin muihin solmuihin. Osoittautuu,
että tämä on ainoa tapa hävitä:

Lemma 2. *Jos verkossa G on vähintään yksi kom-
ponentti, joka ei ole täydellinen, voidaan siihen tehdä
vielä vähintään yksi operaatio.*

Todistus. Ilman yleisyyden menettämistä voidaan olet-
taa, että G on yhtenäinen – muuten tarkastellaan ver-
kon G epätäydellistä komponenttia. Lisäksi voidaan
olettaa, että $|G| \geq 3$.

Olkoon A jokin verkon G solmu, jonka aste on alle
 $|G| - 1$. Olkoon Z jokin solmu, johon A ei ole yhtey-
dessä. Koska A ja Z kuuluvat samaan komponenttiin,
on olemassa polku $A = V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow$
 $V_{k+1} = Z$, joiden kautta pääsee solmusta A solmuun
 Z . Valitaan näistä poluista lyhin mahdollinen. Päte-
e $k \geq 1$, koska A ja Z eivät ole yhteydessä toisiinsa.
Nyt solmun V_k naapurit V_{k-1} ja V_{k+1} eivät ole yhtey-
dessä toisiinsa, ja voidaan suorittaa operaatio solmuille
 (V_k, V_{k-1}, V_{k+1}) . $\square$

Miten päädytään tilanteeseen, jossa jokin komponent-
ti on täydellinen? Kolmen kokoiseen komponenttiin
voidaan päätyä syklien kautta: n solmua sisältävässä
syklissä ainoa mahdollisuus on siirtyä $n - 1$ solmua si-
sältävään sykliin, kun $n \geq 4$. Kolmen kokoisessa syklis-
sä ei ole enää mitään tehtävää, ja peli on menetetty.

Vähintään neljän kokoiseen täydelliseen komponenttiin
siirtyminen voidaan estää hyvin luonnollisella ideal-
la. Tutkitaan komponenttia C , joka on $n \geq 4$ sol-
mua sisältävä täydellinen verkko. Millainen operaatio

tio on tehty viimeisenä, jotta on saatu muodostettua C ? Ainoa mahdollisuus on verkko C' , jossa on solmut $V_1, \dots, V_{n+1}$, ja jossa V_i ja V_j on yhdistetty kaarella kaikilla $1 \leq i \neq j \leq n$ poislukien pari (V_{n-1}, V_n) . Lisäksi V_{n+1} on yhdistetty solmuihin V_n ja V_{n-1} . Verkko C päästään suorittamalla operaatio solmuille (V_{n+1}, V_n, V_{n-1}) . Tämä voidaan kuitenkin estää tekemällä operaatio solmuille (V_{n-2}, V_{n-1}, V_n) . Koska $n \geq 4$, verkko pysyy yhtenäisenä, eikä enää voida päätyä n solmua sisältävään täydelliseen verkkoon.

Viimeinen kriittinen huomio on, että kolmen kokoisen komponentin muodostuminen voidaan estää säilyttämällä jokaisessa vähintään kolmen kokoisessa komponentissa paritonasteinen solmu (huomaa, että operaatiot eivät muuta solmujen asteiden parillisuutta).

Näillä ideoilla saadaan muodostettua seuraava algoritmi tehtävän ratkaisemiseksi.

1. Aloitetaan verkosta G , jossa on 1010 solmua, joiden aste on 1009, ja 1009 solmua, joiden aste on 1010.
2. Valitaan jokin verkon G yhtenäinen komponentti C , jonka koko on yli 2. Jos tällaista ei ole, lopetetaan algoritmi.
3. Tehdään komponenttiin C operaatio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:
 - C jakautuu enintään kahdeksi komponentiksi.
 - Muodostuneet komponentit ovat joko enintään kahden kokoisia, tai ne sisältävät paritonasteisen solmun.
 - Muodostuneet komponentit eivät ole vähintään kolmen kokoisia täydellisiä komponentteja.
4. Palataan kohtaan 2.

Enää tulee todistaa, että kohdan 3 mukainen operaatio voidaan tehdä.

Tutkitaan komponenttia C . Valitaan jokin sen solmu R , jolla on pariton aste. Määritellään $S_0 = \{R\}$, S_1 olemaan niiden solmujen joukko, jotka ovat solmun R naapureita, ja rekursiivisesti S_k olemaan niiden solmujen joukko, jotka ovat jonkin joukon S_{k-1} solmun naapureita, mutta jotka eivät kuulu mihinkään joukoista $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$. Jokaiselle joukon S_k solmulle V määritellään sen *vanhemmaksi* olemaan jokin sellainen solmu $P \in S_{k-1}$, jonka naapuri se on. Jokaisella solmulla $V \neq R$ on siis tasan yksi vanhempi.

Olkoon T verkko, joka saadaan yhdistämällä $A \in C$ ja $B \in C$ jos ja vain jos A on solmun B vanhempi tai toisinpäin. Verkko T on *puu*, eli siinä ei ole syklejä. (Teknisemmin termein: teemme juuresta R leveyshaun ja muodostamme tämän avulla verkon C virittävän puun T .)

Olkoon k suurin luku, jolla $S_k \neq \emptyset$. Puun T korkeudeksi määritellään $k + 1$. Jos A on solmun B vanhempi,

kutsutaan solmua B solmun A (yhdeksi) *lapseksi*. Jos solmulla A ei ole yhtään lasta, kutsutaan sitä puun *lehdeksi*. Solmua R kutsutaan puun *juureksi*.

Tutkitaan kahta tapausta:

Tapaus 1. Puun T korkeus on 2. Toisin sanoen R on naapuri kaikille verkon C solmuille. Koska C ei ole algoritmin toiminnan vuoksi täydellinen, on olemassa solmut $A, B \neq R$, jotka eivät ole yhteydessä toisiinsa, mutta jotka ovat yhteydessä solmuun R . Jakaudutaan kahteen osatapaukseen:

Tapaus 1.1. Jommankumman solmuista A ja B aste on yli 1. Tällöin voidaan suorittaa operaatio solmuille (R, A, B) , jolloin puu T säilyy yhtenäisenä, ja täten myös C säilyy yhtenäisenä.

Tapaus 1.2. Molempien solmuista A ja B aste on 1. Tällöin voidaan suorittaa operaatio solmuille (R, A, B) , ja komponentti C jakautuu kahteen komponenttiin, joista toisen koko on 2. Solmun R sisältävässä suuremmassa komponentissa on paritonasteinen solmu R . Jos tämä ei johda siihen, että solmun R sisältävä komponentti on vähintään kolmen kokoinen täydellinen verkko, olemme valmiit. Muussa tapauksessa voidaan valita jokin solmun R lapsi D , jonka aste on vähintään 2, ja operaatio voidaan tehdä solmuille (R, A, D) . Nyt tilanne on kuin tapauksessa 1.1.

Tapaus 2. Puun T korkeus on vähintään 3.

Olkoot solmun R lapset $V_1, V_2, \dots, V_c$.

Tapaus 2.1. $c = 1$. Olkoot $W_1, W_2, \dots, W_m$ solmun V_1 lapset. Mikään solmuista W_i ei ole yhteydessä juureen R , joten voidaan tehdä operaatio (V_1, R, W_i) . Jos verkko pysyy yhtenäisenä, hyvä. Jos ei, niin muodostuneet kaksi komponenttia C_1 ja C_2 ovat seuraavanlaiset: C_1 sisältää solmun W_i , solmun W_i lapset, solmun W_i lapsenlapset ja niin edelleen, sekä solmun R . Komponentti C_2 sisältää loput komponentin C solmuista.

Koska komponentissa C on yksi paritonasteinen solmu (nimitäin R), tulee siellä olla toinenkin, koska tunnetusti verkon paritonasteisten solmujen määrä on parillinen. Jos $m \geq 2$, voimme edellä valita indeksin i niin, että C_2 sisältää paritonasteisen solmun. Jos $m = 1$, niin komponentti C_2 tulee sisältämään vain solmun V_1 . Tämä kelpaa myös.

Vielä pitää varmistaa, ettei valintojen seurauksena synny vähintään kolmen kokoisia täydellisiä verkkoja. Mikäli verkko säilyy yhtenäisenä tai siitä poistuu vain solmu V_1 , niin väite seuraa huomaamalla, ettei R ole yhteydessä lapsenlapsiinsa. Jos taas erotamme komponenttiin C_2 kaikki paitsi yhden solmun V_1 lapsista W_i ja komponentti C_2 muodostaa täydellisen verkon, ovat solmun V_1 kaikki muut lapset $W_1, \dots, W_{i-1}, W_{i+1}, \dots, W_m$ yhteydessä toisiinsa. Muutammekin alkuperäistä suunnitelmaa ja teemme operaation solmuille (R, W_i, W_j) , missä $j \neq i$. Ei ole

vaikeaa nähdä, että verkko pysyy yhtenäisenä eikä muutu täydelliseksi verkoksi.

Tapaus 2.2. $c \geq 2$.

Koska puun T korkeus on vähintään kolme, on olemassa lapsi V_i , jolla on vähintään yksi lapsi. Tutkitaan kahta tapausta.

Tapaus 2.2.1. V_i ja V_j ovat naapureita jollain $j \neq i$. Olkoon L jokin solmun V_i lapsi. Voidaan tehdä operaatio solmuille (V_i, R, L) , ja puu T säilyy yhtenäisenä. Syntynyt verkko ei tietenkään ole täydellinen.

Tapaus 2.2.2. V_i ja V_j eivät ole naapureita millään $j \neq i$.

Kaikilla $1 \leq j \leq c$, $j \neq i$ voidaan suorittaa operaatio (R, V_i, V_j) . Kuten tapauksessa 2.1, verkko voi pysyä yhtenäisenä, mikä on hyvä, tai siihen syntyy kaksi komponenttia C_1 ja C_2 : C_1 sisältää solmut V_i ja V_j , niiden lapset, niiden lapsenlapset ja niin edelleen. C_2 sisältää loput solmuista. Ja kuten tapauksessa 2.1., voidaan j valita niin, että C_1 sisältää jonkin paritonasteisen solmun, ja saamme mitä haluamme. Voimme myös vastaavasti estää täydellisen verkon syntymisen.

Tapauskäsittely osoittaa, että aina voidaan tehdä sopiva valinta algoritmin askeleessa 3. Olemme siis valmiit.

Kommentti. Kilpailun aikana minulla oli pitkälti samanlainen idea kuin esitetyssä ratkaisussa: koetetaan vältellä täydellisiä verkkoja ja syklejä, tutkitaan leveys- haun avulla luotua virittävää puuta, ja koetetaan säilyttää verkko yhtenäisenä tai lohkaista siitä vain pieni pala pois tutkimalla eri tapauksia. Leveyshaku + viritävä puu -idea tuli mieleeni kisakoodauksen puolelta.

Kuten ratkaisussa esitettiin, vähintään neljän kokoinen täydellinen verkko voidaan välttää naiivisti peruuttamalla viimeinen operaatio ja tekemällä jotain muuta. Kilpailussa ajattelin, että vastaava idea toimisi myös sykleille. Näin ei kuitenkaan ole. Tutkitaan viiden kokoista verkkoa, joka koostuu kahdesta kolmiosta: solmu A on yhteydessä solmuihin B, C, D ja E , ja lisäksi solmuparit (B, C) ja (D, E) on yhdistetty kaarilla. Tällöin kaikki operaatiot johtavat viiden kokoiseen sykliin.

Huomataankin, että jos komponentissa on vain parillisasteisia solmuja, ja siinä on vähintään kolme solmua, niin olemme jo hävinneet: voittamiseen vaadittaisiin, että jokainen solmu saataisiin erotettua muista. Mitä näyttäisi viimeinen operaatio? Se vähentää kaarien määrää yhdellä, eli kaarien määrän tulisi alunperin olla yksi, mutta tällöin mitään siirtoa ei ole mahdollista tehdä. Siispä paritonasteiset solmut ovat oleellisessa osassa ratkaisua, mutta en huomannut tätä kilpailun aikana.

Ratkaisu 4 (Akseli Jussinmäki)

Vastaus: Ainoat sopivat parit ovat $(1, 1)$ ja $(3, 2)$.

Ratkaisu: Ideana on tutkia, kuinka monta kertaa yhtälön eri puolet ovat jaollisia kahdella, ja osoittaa, että kun k valitaan niin, että molemmat puolet ovat yhtä monesti jaollisia kahdella, on vasen puoli aina oikeaa suurempi riittävän suurilla muuttujien arvoilla. Muokkaamalla tehtävänannon yhtälön oikeaa puolta saadaan

$$\begin{aligned} & (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}) \\ &= (2^n - 1) \cdot 2 \cdot (2^{n-1} - 1) \cdot 2^2 \cdot (2^{n-2} - 1) \dots 2^{n-1} \cdot (2^1 - 1) \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^1 - 1). \end{aligned}$$

Näin saadaan helposti selville, kuinka monesti alkuperäisen yhtälön oikea puoli on jaollinen kahdella. On helppoa huomata, tai voi tietää jo valmiiksi, että luvun k kertoma on aina jaollinen kahdella alle k kertaa. Kilpailussa tämä olisi pitänyt todistaa, joten todistetaan se tässä.

Olkoon $v_2(a)$ suurin kakkosen potenssi, joka jakaa luvun a .

Lemma 1: $v_2(k!) < k$ kaikilla k .

Todistus: On tunnettua, että

$$v_2(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor.$$

Kaava tunnetaan Legendren kaavana. Siinä $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ kertoo, kuinka monta lukua yhdestä k :hon on jaollinen kahdella, $\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$ kertoo, kuinka monta lukua yhdestä k :hon on jaollisia neljällä, ja niin edelleen. Kun $2^i > k$, niin $\left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor = 0$, eli voidaan ottaa ääretön summa. Sitä voidaan arvioida ylöspäin poistamalla lattiafunktiot:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = k.$$

Täten saatiin $v_2(k!) < k$, eli lemma 1 on todistettu.

Nyt tiedämme melko tarkasti, kuinka monesti annetun yhtälön puolet ovat jaollisia kahdella. Yritin tämän jälkeen vertailla puolien v_2 -arvoja ja kokoja, mutta yritykset kaatuivat virheisiin ja päädyin vertailemaan myös eri puolien v_3 -arvoja. Tämän lähestymistavan sain toimimaan, ja sain tehtävästä 6/7 pistettä, missä yksi piste lähti siitä, että en todistanut lemmaa 1. Toinen lähestymistapa on kuitenkin oikein tehtynä paljon helpompi ja nopeampi, joten esitän tässä, miten tehtävän saa ratkaistua sitä käyttämällä.

Jotta annettu yhtälö pätee, täytyy molempien puolien olla jaollisia kahdella yhtä monta kertaa. Koska oikea

puoli on jaollinen kahdella $\frac{n(n-1)}{2}$ kertaa, tulee lemmän 1 nojalla olla $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Osoitetaan, että yhtälön vasen puoli on oikeaa suurempi, kun $n \geq 6$. Arvioidaan yhtälön oikeaa puolta ylöspäin:

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}) < 2^n \cdot 2^n \dots 2^n = (2^n)^n = 2^{n^2}.$$

Käydään tapaus $n = 6$ erikseen. Haluamme, että

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2},$$

eli että $15! > 2^{36}$. Tylsällä suoralla laskulla saadaan $15! = 1\,307\,674\,368\,000 > 10^{12}$. Lukua 2^{36} voidaan nyt arvioida mukavasti:

$$2^{36} = (2^3)^{12} = 8^{12} < 10^{12}.$$

Tapaus $n = 6$ on näin käyty. Käydään sitten läpi tapaus $n \geq 7$. Hyödyntämällä edellistä kohtaa saadaan

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! = 15! \cdot 16 \cdot 17 \dots \frac{n(n-1)}{2} > 2^{36} \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} = 2^{2n(n-1) - 24}.$$

Tämä on suurempi kuin 2^{n^2} , kun

$$2n(n-1) - 24 > n^2,$$

eli

$$n^2 - 2n - 24 > 0,$$

mikä pätee, kun $n \geq 7$. Siis

$$k! > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2} > (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}),$$

kun $n \geq 7$. Enää tarvitsee käydä läpi tapaukset $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Merkitään annetun yhtälön oikean puolen arvoa O_n :

$n = 1$: $O_1 = 1 = 1!$, mikä antaa yhden vastauksen.

$n = 2$: $O_2 = 6 = 3!$, mikä antaa toisen vastauksen.

$n = 3$: $5! = 120 < O_3 = 168 < 720 = 6!$.

$n = 4$: $7! = 5040 < O_4 = 20160 < 40320 = 8!$.

$n = 5$: $10! = 3628800 < O_5 = 9999360 < 39916800 = 11!$.

Kaikki tapaukset on nyt käyty läpi, ja yhtälön toteuttavat parit (k, n) ovat $(1, 1)$ ja $(3, 2)$.

Tehtävä 5 kisaajan silmin (Roope Salmi)

Jännitystä ilmassa, kuten kuuluukin. Urheiluhallin värikäs katsomo ja jäljellä olevasta ajasta muistuttava kellonäyttö pääsevät välillä härnitsemään keskittymistä.

Uskon saaneeni päivän ”helpoimpaan” tehtävään, eli tehtävään 4 joitain hyviä ideoita, mutta en vaan saa yksityiskohtia toimimaan. Päätän siirtyä seuraavaan tehtävään. Pöytä on pieni, joten joudun järjestelemään papereita tovin. Jokaiselle tehtävälle toivotaan suttumerkinnätkin erikseen merkityillä papereilla, koska niiden perusteella voidaan joskus antaa pisteitä.

Silmäillessäni kaikkia tehtäviä alussa, tehtävä 5 herätti innostusta, koska se muistutti kovasti tietotekniikan tehtävää. Siis sellaista, jonka voisin jopa osata ratkaista. Aloitin tietotekniikan kilpailujen parissa ja olen harjoitellut niitä varten paljon. Antti Laaksonen kirjoittikin kyseisestä tehtävästä tietotekniikan näkökulmasta (Solmu 3/2019), mutta esitän tässä oman ratkaisuni. Itsevarmuutta lisää aiempi onnistuminen lukion valtakunnallisen matematiikkakilpailun viimeisessä tehtävässä, joka oli myös tietotekniikan tehtävän tyylinen. Kukaan muu ei saanut tehtävästä silloin täysiä pisteitä.

IMO-brändätyn juomapullon kloorinhajuinen hanavesi alkaa olla haaleaa. Ensimmäisen koepäivän jälkeen oivalsin, että juomapullo olisi kannattanut tuoda kisaan halliin vajaan, jotta siihen olisi sitten voinut pyytää lisää, ehkä vähän miellyttävämpää juomavettä valvojilta, ”the invigilators”. Tämä pääsi kuitenkin tänään unohtumaan.

Tehtävässä on kaksi osaa, joten luultavasti helpomman (a)-kohdan ratkaisu on iloksi myös (b)-kohdan kanssa. Päätän olla pohtimatta jälkimmäistä kohtaa ennen kuin osaan ratkaista ensimmäisen kohdan, huolimatta siitä, että (b)-kohdan ratkaisu johtaisi suoraan myös (a)-kohdan ratkaisuun.

Kokemus antaa jo monta havaintoa: Kolikkoriviä voi ajatella binäärimerkkijonona. (Tämä tekee tehtävästä erityisen kotoisan tuntuisen tietotekniikan kannalta.) Prosessin päättymisen aina tarkoittaisi, että kolikkorivit muodostaisivat puurakenteen, jossa kaaret vastasivat yhden operaation tekemistä.

Tärkein ensihavainto on kuitenkin se, että prosessi muistuttaa usein itseään pienemmässä tapauksessa. Esimerkiksi jos viimeisessä kohdassa oleva kolikko on T , käyttäytyy prosessi käytännössä täysin samalla tavalla, kuin jos kolikkoja olisikin $n - 1$ ja viimeinen kolikko unohtettaisiin (tapaus 1). Tämä siksi, että T -kolikko lopussa ei lisää summaan k mitään, eikä se koskaan voi kääntyä H -kolikoksi, koska jotta olisi $k = n$, kaikkien kolikoiden täytyisi olla H -puoli ylöspäin. Tämä vihjailee hyödyntämään induktiota kolikoiden määrän suhteen.

Toinen mielenkiintoinen induktiivinen havainto löytyy tapauksesta, jossa jonon ensimmäinen kolikko on H (tapaus 2). Tämä ensimmäinen kolikko voi kääntyä vasta, kun $k = 1$, eli kaikki muut kolikot näyttävät

T -puolta. Huomataan, että loppu kolikkojonosta käytetty itse asiassa jälleen samalla tavalla kuin tapaus $n - 1$, koska alun H lisää aina summaan k yhden, ja lopun kolikkojonon indeksit alkavat yhtä myöhemmin, luvusta 2. Nojaten induktio-oletukseen loppu kolikkojono on lopulta pelkkää T :tä, jolloin ensimmäinenkin kolikko kääntyy T :ksi, ja prosessi päättyy.

1	2	3	...	n
H	?	?	...	?
↓ (induktio-oletus)				
H	T	T	...	T
T	T	T	...	T

Eväänä oli suklaakeksejä ja Alpen-patukoita, jotka osimme ennen ensimmäistä koepäivää kamppuksen markeista joukkueen kanssa. Osoittautui, että suklaakeksit eivät olleet niin hyviä kuin luulin. Muuta ei kuitenkaan ole, joten mutustelen niitä. Onneksi kilpailuun ei tultu herkuttelemaan.

Yritän yleistää ideaa. Oikeastaan jonon alussa voi olla mikä tahansa määrä m H -kolikoita, ja loppu jonosta käyttäytyy samaan tapaan kuin $n - m$ pituinen kolikkojono. Päädyn kuitenkin siihen tulokseen, että tämä tai muut vastaavat temppuilut eivät auta, vaan on järkevämpää keskittyä suoraviivaiseen induktioon, jossa riittää redusoida tapaus yksittäisten kolikoiden verran pienempään tapaukseen.

Tässä kohtaa auttaa eristää mahdolliset tapaukset toisistaan. Olemme jo käsitelleet tapaukset, joissa jono on muotoa "... T " tai " H ...", joten jäljelle jää tapaus, jossa jono on muotoa " T ... H " (tapaus 3). Samanlaisia ideaa soveltaen, jonon ensimmäinen kolikko ei voi kääntyä ennen kuin kaikki keskellä olevat kolikot ovat T -puoli ylöspäin. Viimeinen kolikko ei myöskään voi kääntyä ennen ensimmäistä. Siispä tässä tapauksessa jonon keskellä tapahtuu ensin prosessi koolla $n - 2$, alkaen indeksistä 2, koska alueen ulkopuolella on yksi H . Tämän jälkeen ensimmäinen kolikko kääntyy. Entä sen jälkeen? Tiedämme nyt kaikkien kolikoiden asennot, joten prosessi voi edetä vain yhdellä tavalla. On helppoa nähdä, että kolikot kääntyvät vuorotellen alusta loppuun, kunnes kaikki kolikot ovat H -puoli ylöspäin. Sen jälkeen kolikot kääntyvät vielä kerran vuoroillaan lopusta alkuun, ja prosessi päättyy. Esimerkki prosessin kulusta neljän pituisella jonolla:

1	2	3	4
T	?	?	H
↓ (induktio-oletus)			
T	T	T	H
H	T	T	H
H	H	T	H
H	H	H	H
H	H	H	T
H	H	T	T
H	T	T	T
T	T	T	T

On pientä aihetta juhlaan: (a)-kohta vaikuttaisi olevan ratkaistu. En mene asioiden edelle, vaan kirjoitan ratkaisun vastauspaperiin ennen (b)-osaan siirtymistä. Jälkikäteen katsottuna tämä oli ajanhukkaa, ottaen huomioon kuinka samanlainen koko tehtävän ratkaisu olisi. Puhtaaksi kirjoittaessa joutuu kuitenkin käymään kaikki yksityiskohdat tarkasti läpi, joten parempi pelata varman päälle.

(b)-kohdasta tulee heti mieleen kilpaohjelmoinnista tuttu "dynaaminen ohjelmointi". Tässä yhteydessä hyötyä on siitä, että on kokemusta rekursioyhtälöiden muodostamisesta ja käsittelystä.

Määritellään funktio f , jolla

$$f(n) = \sum_{|C|=n} L(C),$$

eli kaikkien pituutta n olevien kolikkojonon operaatioiden yhteismäärä.

Lopullinen vastaus, eli keskiarvo tulee olemaan $\frac{f(n)}{2^n}$, mutta arvelen, että suora summa on helpompi muodostaa.

(a)-kohdan induktio antaa hyvin luonnollisen lähtökohdan rekursioyhtälön rakentamiselle. Päätellään nyt operaatioiden määrä jokaiselle tapaukselle erikseen:

Tapaus 1: "... T ". Tässä tapauksessa jokaisella jonolla prosessi käyttäytyy samoin kuin jos pituus olisi $n - 1$. Operaatioita kertyy siis yhteensä $f(n - 1)$.

Tapaus 2 eli " H ..." oli vielä helppo käsitellä (a)-kohdassa, mutta nyt kahdesti laskemisen välttämiseksi on määrättävä erikseen, että jonon viimeinen kolikko on H . Epätoivossa ehdin jo epäillä, että en ole lähelläkään toimivaa ratkaisua tehtävään. Vähän pidemmän hetken päähäilyksen jälkeen tajuan, että pituutta $n - 1$ olevista jonoista ne, jotka päättyvät H -kolikkoon, saadaan poistamalla ne, jotka edustavat tapausta 1.

Tapausta 1 edustavien jonon operaatioiden yhteismäärä on pituudella $n - 1$ täsmälleen $f(n - 2)$. Operaatiota tehdään siis $f(n - 1) - f(n - 2)$ kertaa kolikkojonon loppupäälle, jonka jälkeen jää vielä ensimmäisen kohdan H . Eri alkuperäisiä yhdistelmiä C , jotka vastaavat tätä tapausta on 2^{n-2} , sillä ensimmäinen ja viimeinen kolikko on kiinnitetty. Jokaiselle näistä yhdistelmistä tehdään yksi operaatio, joka kääntää ensimmäisen kolikon. Yhteensä saadaan $f(n - 1) - f(n - 2) + 2^{n-2}$.

Tapaus 3: " T ... H ". Tässä käsitellään ensin keskellä oleva pituuden $n - 2$ alue, jonka jälkeen kaikki alun $n - 1$ T -kolikkoa käännetään. Lopuksi jokainen kolikko käännetään lopusta alkuun T :ksi. Tämä tekee $n - 1 + n = 2n - 1$ operaatiota. Eri yhdistelmiä on jälleen 2^{n-2} , joten operaatioita on yhteensä $f(n - 2) + 2^{n-2}(2n - 1)$.

Nämä kolme tapausta ovat kaikki erillisiä, ja ne kattavat kaikki mahdolliset kolikkoyhdistelmät. Siispä näiden summa on operaatioiden yhteismäärä pituudella n . Rekursiokaava sievenee muotoon

$$f(n) = 2f(n-1) + 2^{n-1}n.$$

Se, että $f(n-2)$ -termi sievenee kokonaan pois, on mukava yllätys.

Pohjatapauksena $f(1) = 1$, sillä $L(T) = 0$ ja $L(H) = 1$. Kaavan todistus toimii myös tapauksessa $n = 2$, jos hyväksytään tyhjän jonon vaatimien operaatioiden määräksi $f(0) = 0$.

Kilpailun aikana taisin avata rekursiokaavan tässä muodossa, mutta on helpompi vaihtaa keskiarvoon tässä kohtaa. Olkoon

$$g(n) = \frac{f(n)}{2^n} \\ 2^n g(n) = f(n).$$

Korvataan tämä rekursioyhtälöön:

$$2^n g(n) = 2 \cdot 2^{n-1} g(n-1) + 2^{n-1} n \\ g(n) = g(n-1) + \frac{n}{2}.$$

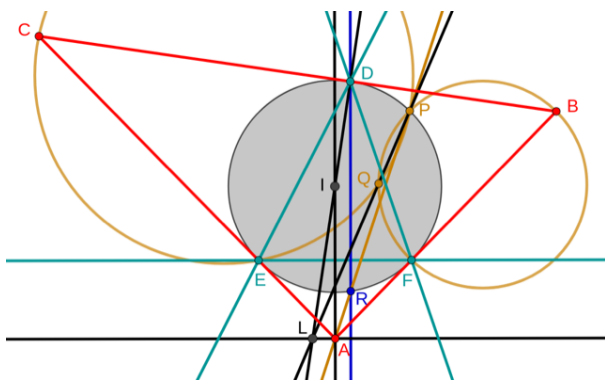
Tästä nähdäänkin, koska $g(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{2}$, että $g(n)$ on aritmeettinen summa:

$$g(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{2}.$$

Vastaus on siis $\frac{n^2+n}{4}$.

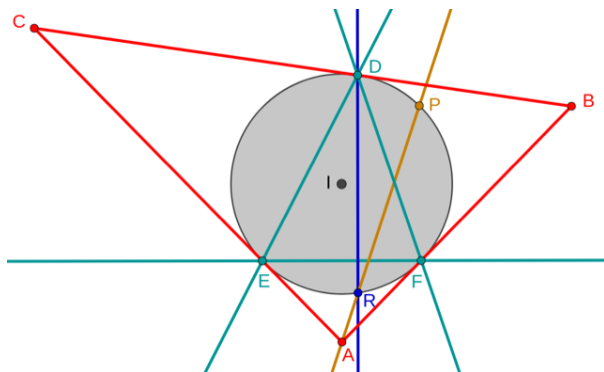
Saatuani vastauksen selville ympyröin lausekkeen sututpaperista, ihan varmuuden vuoksi. Ratkaisun puhtaaksi kirjoittamisessa menisi vielä oma aikansa. Olin kuitenkin tyytyväinen ratkaisuun, enemmän kuin ensimmäisen kilpailupäivän tehtävän 1 ratkaisuun, johon käytin turhan paljon aikaa. Eväiden syönnin ja urheiluhallin pihalle tuoduissa WC-vuokraperäkärryissä käynnin jälkeen siirryn takaisin tehtävään 4 optimistisin mielin.

Ratkaisu 6 (Hermann Huhtamäki)



Koko kuva.

Ratkaisun yleisenä suunnitelmana on osoittaa, että pisteeseen A suoralle AI piirretyn normaalin ja suoran DI leikkauspiste (olkoon L) on samalla suoralla P :n ja Q :n kanssa. Tätä varten määritetään kolmioiden BFP ja CEP ulkoympyröiden keskipisteet ja osoitetaan, että keskipisteiden välinen suora on kohtisuorassa suoraa PL vasten.



Tällöin A :n ja R :n avulla saadaan niiden kanssa samalla suoralla oleva P .

On tunnettua, että mitkä tahansa kolme kompleksilukua a , b ja c ovat samalla suoralla jos ja vain jos

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}. \quad (1)$$

(Ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, lemma 6.6, s. 100.)

Pitäisi löytää sellainen suoralla AR oleva piste P , joka on yksikköympyrällä (eli jolla $\overline{P} = \frac{1}{P}$). Sovelletaan kaavaa 1 pisteille A , P ja R , jolloin saadaan, että

$$\frac{A-P}{A-R} = \overline{\left(\frac{A-P}{A-R}\right)} = \frac{\overline{A} - \frac{1}{\overline{P}}}{\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}}.$$

Sievennetään yhtälö puolittain. Aloitetaan vasemmalla puolella. Nyt

$$\begin{aligned} \frac{A-P}{A-R} &= \frac{A-P}{A-R} + \left(1 - \frac{A-R}{A-R}\right) \\ &= 1 + \frac{A-P-(A-R)}{A-R} \\ &= 1 + \frac{R-P}{A-R}. \end{aligned}$$

Tehdään vastaavalla tavalla oikealle puolelle. Tulokseksi tulee

$$\frac{\overline{A} - \frac{1}{\overline{P}}}{\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}} = 1 + \frac{\overline{A} - \frac{1}{\overline{P}} - (\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}})}{\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}} = 1 + \frac{\frac{1}{\overline{R}} - \frac{1}{\overline{P}}}{\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}}.$$

Yhdistetään saadut tulokset ja vähennetään ykköset puolittain, jolloin saadaan

$$\frac{R-P}{A-R} = \frac{\frac{1}{\overline{R}} - \frac{1}{\overline{P}}}{\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}}.$$

Kerrotaan ristiin nimittäjillä:

$$(R-P)(\overline{A} - \frac{1}{\overline{R}}) = (A-R)(\frac{1}{\overline{R}} - \frac{1}{\overline{P}}).$$

Kerrotaan vielä RP :llä:

$$\begin{aligned} P(R-P)(\overline{A}R-1) &= (A-R)(P-R) \\ P(-1)(P-R)(\overline{A}R-1) &= (A-R)(P-R). \end{aligned}$$

Supistetaan $P-R$ pois:

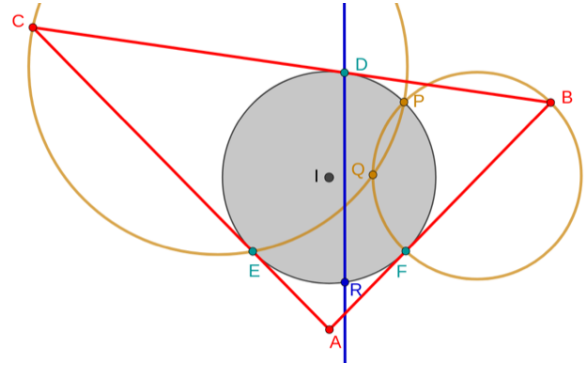
$$\begin{aligned} -P(\overline{A}R-1) &= (A-R) \\ P(1-\overline{A}R) &= A-R. \end{aligned}$$

Nyt P :n arvoksi tulee

$$P = \frac{A-R}{1-\overline{A}R}.$$

Sijoitetaan A :n, $\overline{A}$:n ja R :n paikalle niille lasketut arvot ja sievennetään.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{2yz}{y+z} - \frac{-yz}{x}}{1 - \frac{-yz}{x} \cdot \frac{2}{y+z}} = \frac{\frac{2xyz}{x(y+z)} + \frac{yz(y+z)}{x(y+z)}}{\frac{x(y+z)}{x(y+z)} - \frac{-2yz}{x(y+z)}} \\ &= \frac{2xyz + yz(y+z)}{x(y+z) + 2yz} = \frac{yz(2x+y+z)}{2yz+x(y+z)}. \end{aligned}$$



Vaihe 2: Ympyrät PCE ja PBF ja niiden leikkaukset.

Olkoon piste O_B kolmion BFP ulkoympyrän keskipiste. On tunnettua, että keskipiste saadaan lasketuksi kaavalla

$$O_B = \begin{vmatrix} P & P\overline{P} & 1 \\ F & F\overline{F} & 1 \\ B & B\overline{B} & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} P & \overline{P} & 1 \\ F & \overline{F} & 1 \\ B & \overline{B} & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

(ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, lemma 6.24, s. 108), jossa P :n, F :n ja B :n paikalla voisi tietenkin olla mikä tahansa kolmion kärkipisteet, jonka ulkoympyrän keskipistettä lasketaan. Koska P ja F ovat yksikköympyrällä, $P \cdot \overline{P} = P \cdot \frac{1}{\overline{P}} = 1$ ja $F \cdot \overline{F} = 1$. Lisäksi B :n arvoksi voidaan laskea $B = \frac{2xz}{x+z}$ (vertaa A :n arvon laskemiseen). Sijoitetaan pisteiden arvot kaavaan 2:

$$O_B = \begin{vmatrix} P & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{4xz}{(x+z)^2} & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1 \\ z & z^{-1} & 1 \\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{2}{x+z} & 1 \end{vmatrix}.$$

Lasketaan ensiksi osoittajan arvo. Aloitetaan kertomalla alin rivi $(x+z)^2$:lla:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} P & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{4xz}{(x+z)^2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(x+z)^2} \begin{vmatrix} P & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ 2xz(x+z) & 4xz & (x+z)^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Lasketaan determinantti. Aloitetaan positiivisista vinoriveistä ylävasemmalta alaoikealle ja sitten jatketaan

negatiivisiin:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot (P(x+z)^2 + 2xz(x+z) + 4xz^2 \\
 &\quad - P(4xz) - z(x+z)^2 - 2xz(x+z)) \\
 &= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot (P(x+z)^2 + 4xz^2 - P(4xz) - z(x+z)^2) \\
 &= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot ((P-z)(x+z)^2 + (z-P)(4xz)) \\
 &= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot ((P-z)(x^2 + 2xz + z^2) - (P-z)(4xz)) \\
 &= \frac{1}{(x+z)^2} \cdot ((P-z)(x^2 - 2xz + z^2)) \\
 &= \frac{(P-z)(x-z)^2}{(x+z)^2}.
 \end{aligned}$$

Siirrytään nimittäjän arvon laskemiseen. Kerrotaan alin rivi $x+z$:lla:

$$\begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1 \\ z & z^{-1} & 1 \\ \frac{2xz}{x+z} & \frac{2}{x+z} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x+z} \begin{vmatrix} P & P^{-1} & 1 \\ z & z^{-1} & 1 \\ 2xz & 2 & x+z \end{vmatrix}.$$

Lasketaan determinantti vinoriveittäin ja otetaan tekijöiksi P , $\frac{1}{P}$ ja 2 :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x+z} \cdot \left(\frac{P(x+z)}{z} + \frac{2zx}{P} + 2z \right. \\
 &\quad \left. - 2P - \frac{z(x+z)}{P} - \frac{2xz}{z} \right) \\
 &= \frac{1}{x+z} \cdot \left(P \left(\frac{x+z}{z} - 2 \right) + \frac{1}{P} \right. \\
 &\quad \left. (2xz - z(x+z)) + 2(z-x) \right) \\
 &= \frac{1}{x+z} \cdot \left(P \frac{x-z}{z} + \frac{1}{P} (xz - z^2) - 2(x-z) \right) \\
 &= \frac{1}{x+z} \cdot \left(\frac{P}{z} (x-z) + \frac{z}{P} (x-z) - 2(x-z) \right) \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \left(\frac{P}{z} + \frac{z}{P} - 2 \right) \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \left(\frac{P^2}{Pz} + \frac{z^2}{Pz} - \frac{2Pz}{Pz} \right) \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{(P-z)^2}{Pz}.
 \end{aligned}$$

Yhdistetään saadut osoittajan ja nimittäjän arvot ja supistetaan $(x-z)$, $(x+z)$ ja $(P-z)$:

$$\begin{aligned}
 O_B &= \frac{(P-z)(x-z)^2}{(x+z)^2} / \left(\frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{(P-z)^2}{Pz} \right) \\
 &= \frac{x-z}{x+z} / \frac{P-z}{Pz} = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{Pz}{P-z} \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{z}{1-\frac{z}{P}} = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{P}}.
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan P :n paikalle sille aiemmin laskettu arvo:

$$\begin{aligned}
 O_B &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{2yz+x(y+z)}{yz(2x+y+z)}} \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{1}{\frac{y(2x+y+z)}{yz(2x+y+z)} - \frac{2yz+x(y+z)}{yz(2x+y+z)}} \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{y(2x+y+z) - (2yz+xy+xz)} \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{2xy+y^2+zy-2yz-xy-xz)} \\
 &= \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{xy+y^2-yz-xz}.
 \end{aligned}$$

Tämä sievenee vielä hiukan muotoon

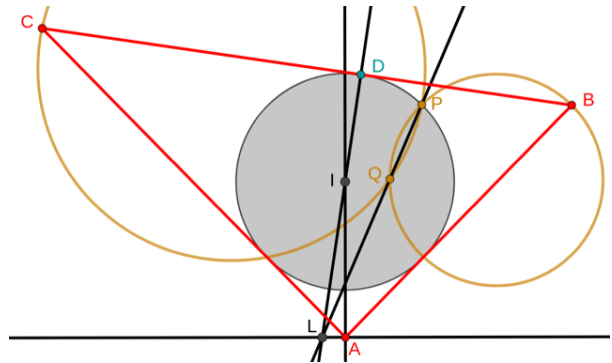
$$O_B = \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{(y-z)(x+y)}.$$

Vastaavasti saadaan kolmion CEQ ulkoympyrän keskipisteeksi

$$O_C = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{yz(2x+y+z)}{(z-y)(x+z)}.$$

Kun nämä vähennetään toisistaan, saadaan

$$\begin{aligned}
 &O_B - O_C \\
 &= \frac{(x-z)yz(2x+y+z)}{(x+z)(y-z)(x+y)} - \frac{(x-y)yz(2x+y+z)}{(x+y)(z-y)(x+z)} \\
 &= \frac{(x-z)yz(2x+y+z) + (x-y)yz(2x+y+z)}{(x+z)(y-z)(x+y)} \\
 &= \frac{yz(2x+y+z)((x-z) + (x-y))}{(x+y)(x+z)(y-z)} \\
 &= \frac{yz(2x+y+z)(2x-y-z)}{(x+y)(x+z)(y-z)}.
 \end{aligned}$$



puolelle. Pituuskin pysyy oikeana, koska x sijaitsee yksikköympyrällä ja ykkösellä jakaminen ei siihen vaikuta).

Lisäksi tiedämme, että $L - A$ kuuluu reaaliakselille. Tämä on selvää, sillä IA on imaginaariakselin suuntainen, jolloin A :n kautta piirretty L :n kautta kulkeva normaali on reaaliakselin suuntainen, mistä seuraa, että L :n ja A :n imaginaariosat ovat yhtä suuret. Tiedämme myös, että $y + z$ kuuluu imaginaariakselille, koska y ja z sijaitsevat symmetrisesti imaginaariakselin suhteen. Siispä

$$\frac{L - A}{y + z} = \frac{L - \frac{2yz}{y+z}}{y + z} \in i\mathbb{R}.$$

Kun puhtaasti imaginaarinen luku summataan sen liittoluvun kanssa, imaginaariosasta tulee nolla ja reaaliosta säilyy nollana. Sovelletaan tätä tietoa edelliseen tulokseen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{L - A}{y + z} + \overline{\left(\frac{L - A}{y + z}\right)} = \frac{L - A}{y + z} + \frac{\bar{L} - \bar{A}}{\bar{y} + \bar{z}} \\ &= \frac{L - \frac{2yz}{y+z}}{y + z} + \frac{\frac{L}{x^2} - \frac{2}{y+z}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \\ &= \frac{\frac{L(y+z)-2yz}{y+z}}{y + z} + \frac{\frac{L(y+z)-2x^2}{x^2(y+z)}}{\frac{z+y}{yz}} \\ &= \frac{L(y+z)-2yz}{(y+z)^2} + \frac{(L(y+z)-2x^2)yz}{x^2(y+z)(z+y)} \\ &= \frac{(L(y+z)-2yz)x^2 + (L(y+z)-2x^2)yz}{x^2(y+z)^2}. \end{aligned}$$

Poimitaan erilleen L :n sisältävät termit (huom. L :n puolelta supistetaan $y + z$ ja toiselta puolelta x^2):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{L(y+z)x^2 - 2yzx^2 + L(y+z)yz - 2x^2yz}{x^2(y+z)^2} \\ &= \frac{Lx^2 + Lyz}{x^2(y+z)} + \frac{-2yz - 2yz}{(y+z)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{Lx^2 + Lyz}{x^2(y+z)} = \frac{4yz}{(y+z)^2}. \end{aligned}$$

Jaetaan L :n kerroin pois:

$$\begin{aligned} L &= \frac{4yz}{(y+z)^2} \cdot \frac{x^2 + yz}{x^2(y+z)} \\ &= \frac{(4yz)x^2(y+z)}{(y+z)^2(x^2 + yz)} \\ &= \frac{4yzx^2}{(y+z)(x^2 + yz)}. \end{aligned}$$

Siten $P - L$

$$\begin{aligned} &= \frac{yz(2x + y + z)}{2yz + x(y + z)} - \frac{4x^2yz}{(x^2 + yz)(y + z)} \\ &= \frac{yz(2x + y + z)}{2yz + xy + xz} - \frac{4x^2yz}{(x^2 + yz)(y + z)}. \end{aligned}$$

Yhdistetään jakolaskut, jolloin alakerraksi tulee

$$(y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)$$

ja yläkerraksi

$$yz \cdot \left((2x + y + z)(x^2 + yz)(y + z) - 4x^2(2yz + xy + xz) \right).$$

Sievennetään vielä yläkerran loppuosaa (se pl. yz) sellaiseen kertolaskumuotoon, että myöhemmin jakolaskua tehtäessä olisi mahdollista supistaa osa siitä pois. Seuraavissa välivaiheissa tullaan käyttämään hahmottamista mahdollisesti helpottavia, matemaattisesti merkityksettömiä, sulkuja.

$$\begin{aligned} &(2x + y + z)(x^2 + yz)(y + z) - 4x^2(2yz + xy + xz) \\ &= (2x + y + z)(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y) \\ &\quad - 8x^2yz - 4x^3y - 4x^3z \\ &= 2x^3y + 2x^3z + 2y^2xz + 2z^2xy + x^2y^2 \\ &\quad + x^2yz + y^3z + y^2z^2 + x^2yz + x^2z^2 \\ &\quad + y^2z^2 + z^3y - 8x^2yz - 4x^3y - 4x^3z \\ &= - (2x^3y + 2x^3z + 6x^2yz - 2y^2xz - 2z^2xy \\ &\quad - x^2y^2 - x^2z^2 - 2y^2z^2 - y^3z - z^3y) \\ &= - ((2x^3y - x^2y^2 - x^2yz) + (2x^3z - x^2yz - x^2z^2) \\ &\quad + 2x^2yz + 6x^2yz - 2y^2xz - 2z^2xy - 2z^2xy \\ &\quad - y^2z^2 - y^3z + (2z^2xy - y^2z^2 - z^3y)) \\ &= - ((2x^3y - x^2y^2 - x^2yz) + (2x^3z - x^2yz - x^2z^2) \\ &\quad + (8x^2yz - 4y^2xz - 4z^2xy) + (2y^2xz - y^3z - y^2z^2) \\ &\quad + (2z^2xy - y^2z^2 - z^3y)) \\ &= - ((2x - y - z)(x^2y + x^2z + 4xyz + y^2z + z^2y)). \end{aligned}$$

Kun tämä yhdistetään alakertaan, saadaan $P - L =$

$$-yz \cdot \frac{(2x - y - z)(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)}{(y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)}.$$

Tiedetään, että kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiinsa vasten, jos ja vain jos niiden erotuksien jakolasku antaa reaalisen tuloksen eli

$$\frac{O_B - O_C}{P - L} + \overline{\left(\frac{O_B - O_C}{P - L}\right)} = 0. \quad (3)$$

(Ks. esimerkiksi Evan Chenin kirja *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, lemma 6.5, s. 100.)

Lasketaan ensiksi vasemmanpuoleinen jakolasku; sijoitetaan erotusten paikalle niille lasketut arvot, jolloin ylhäälle tulee $O_B - O_C =$

$$\frac{yz(2x + y + z)(2x - y - z)}{(x + y)(x + z)(y - z)}$$

ja alhaalle jää $P - L =$

$$-yz \cdot \frac{(2x - y - z)(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)}{(y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)}.$$

Sievennetään yz ja $2x - y - z$ sekä merkataan osat jakolaskuun (huom! pilkottu kahteen osaan, jotta mahtuisi palstalle):

$$\frac{O_B - O_C}{P - L} = -\frac{(2x + y + z)}{(x + y)(x + z)(y - z)} \cdot \frac{(y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)}{(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)}.$$

Lasketaan edellisen liittoluku muistaen, että x , y ja z ovat yksikköympyrällä, jolloin niiden liittoluvut ovat samat kuin niiden käänteisluvut:

$$\overline{\left(\frac{O_B - O_C}{P - L}\right)} = \frac{\overline{O_B - O_C}}{\overline{P - L}},$$

joten voidaan laskea aluksi ylä- ja sitten alakerran liittoluku. Yläkerraksi tulee

$$\begin{aligned} & \overline{-(2x + y + z)(y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)} \\ &= -\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ & \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{yz}\right)\left(\frac{2}{yz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz}\right) \\ &= -\left(\frac{2yz + xz + xy}{xyz}\right)\left(\frac{z + y}{yz}\right) \\ & \quad \left(\frac{yz + x^2}{x^2yz}\right)\left(\frac{2x^2yz + z^2xy + y^2xz}{x^2y^2z^2}\right) \\ &= -\left((2yz + xz + xy)(z + y)(yz + x^2)\right. \\ & \quad \left.(2x^2yz + z^2xy + y^2xz)\right)/(x^5y^5z^5) \\ &= -\left((2yz + xz + xy)(z + y)(yz + x^2)\right. \\ & \quad \left.(2x + z + y)\right)/(x^4y^4z^4) \end{aligned}$$

ja alakerraksi

$$\begin{aligned} & \frac{(x + y)(x + z)(y - z)}{(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)} \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \\ & \quad \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^2z} + \frac{1}{y^2z} + \frac{1}{z^2y} + \frac{4}{xyz}\right) \\ &= \left(\frac{y + x}{xy}\right)\left(\frac{z + x}{xz}\right)\left(\frac{z - y}{yz}\right) \\ & \quad \left(\frac{x^2z + x^2y}{x^4yz} + \frac{z^2y + y^2z}{y^3z^3} + \frac{4}{xyz}\right) \\ &= \frac{(y + x)(z + x)(z - y)}{x^2y^2z^2} \left(\frac{(x^2z + x^2y)(y^3z^3)xyz}{x^5y^5z^5} + \right. \\ & \quad \left. \frac{(x^4yz)(z^2y + y^2z)xyz}{x^5y^5z^5} + \frac{4(x^4yz)(y^3z^3)}{x^5y^5z^5}\right) \\ &= \frac{(y + x)(z + x)(z - y)}{x^2y^2z^2} \left(\frac{(z + y)(yz)}{x^2y^2z^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{(x^2)(z + y)}{x^2y^2z^2} + \frac{4xyz}{x^2y^2z^2}\right). \end{aligned}$$

Sievennetään sekä ylä- että alakerrasta $x^4y^4z^4$, jolloin ylös jää

$$-(2yz + xz + xy)(z + y)(yz + x^2)(2x + z + y)$$

ja alas

$$(y + x)(z + x)(z - y) \left((z + y)yz + x^2(z + y) + 4xyz \right).$$

Nyt suoritetaan yhteenlasku. Oletetaan, että suorat ovat kohtisuorasti toisiaan vasten, jolloin pitäisi lauseen 3 mukaan olla

$$\frac{O_B - O_C}{P - L} + \overline{\left(\frac{O_B - O_C}{P - L}\right)} = 0$$

eli

$$\begin{aligned} & -\frac{(2x + y + z)(y + z)(x^2 + yz)}{(x + y)(x + z)(y - z)} \\ & \quad \cdot \frac{(2yz + xy + xz)}{(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)} \\ &= -\left(-\frac{(2yz + xz + xy)}{(y + x)(z + x)(z - y)}\right. \\ & \quad \cdot \left.\frac{(z + y)(yz + x^2)(2x + z + y)}{((z + y)yz + x^2(z + y) + 4xyz)}\right). \end{aligned}$$

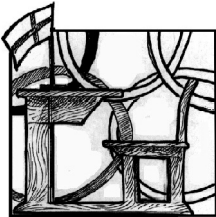
Kerrotaan $-(y + x)(z + x)$:llä ja jaetaan $(z + y)$:llä:

$$\begin{aligned} & \frac{(2x + y + z)(x^2 + yz)(2yz + xy + xz)}{(y - z)(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)} \\ &= -\frac{(2yz + xz + xy)(yz + x^2)(2x + z + y)}{-(y - z)((z + y)yz + x^2(z + y) + 4xyz)}. \end{aligned}$$

Jaetaan vielä $(2yz + xz + xy)(yz + x^2)(2x + z + y)$:llä ja kerrotaan $(y - z)$:lla:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz)} \\ &= \frac{1}{(z + y)yz + x^2(z + y) + 4xyz} \\ & \quad \frac{1}{x^2y + x^2z + y^2z + z^2y + 4xyz} \\ &= \frac{1}{z^2y + y^2z + x^2z + x^2y + 4xyz}. \end{aligned}$$

Koska tämä pitää paikkansa, suora PL on kohtisuorassa suoraa O_BO_C vasten, kuten haluttiin. Siispä PL on yhdensuuntainen PQ :n kanssa, mistä seuraa, että P , Q ja L ovat samalla suoralla, mikä todistaa tehtävänannossa esitetyn väitteen oikeaksi.



Kynä ja paperia, kirja, kartta vai nuotit?

Akseli Jussinmäki

Opiskelija, Helsingin yliopisto

Aloitin harjoittelemaan koodausta vuoden 2018 joulukuussa. Toukokuussa 2019 olin edustamassa Suomea Virossa Baltic Olympiad in Informatics –kilpailussa. Moni henkilö ihmetteli, miten pystyin oppimaan niin nopeasti. Vastasin aina, että se johtui kilpailumatematiikkataustastani.

Edellä mainittujen lisäksi harrastan ainakin lukemista, suunnistusta ja laulamista. Monen asian harrastamisessa on ainakin se hyvä puoli, että harrastukset tukevat toisiaan. Matematiikan osaamisesta on koodauksen lisäksi hyötyä etenkin luonnontieteissä. Yhden pallopelin taitaja on usein hyvä kaikissa muissakin pallopeleissä (en tosin itse ole erityisen hyvä missään pallopelissä, vaikka harrastinkin pesäpalloa kahdeksan vuotta), ja äidinkielen osaamisesta on hyötyä kaikkeen ilmaisuun, jopa matematiikan kirjoittamiseen.

Hyötysuhteen ei tarvitse myöskään olla selvä toisen asian puolella hankittujen tietojen ja taitojen soveltaminen toiseen alaan, vaan se voi olla myös epäsuorempi. On tunnettua, että esimerkiksi viulunsoitto vahvistaa aivokurkiaisien läpi kulkevia aivopuoliskojen välisiä yhteyksiä. Tämän yhteyden vahvuus taas korreloi älykkyyden kanssa: esimerkiksi Einsteinillahan oli erittäin vahvasti yhteenliittyneet aivopuoliskot.

Monen asian harrastamisen huono puoli on se, että tällöin tuskin tulee aivan huipuksi missään asiassa. Paul Graham, joka on muun muassa menestynyt ohjelmoija ja liikemies, toteaaakin eräässä erinomaisessa esseessään suunnilleen näin: [1] ”Monilla alojensa huipuilla on vain

vähän itsekuria. He tarvitsevat sitä sen verran, että saavat aloitettua työnteon, mutta tämän jälkeen kiinnostus ottaa vallan, eikä itsekuria enää tarvita.” Näin he ovat siis käyttäneet hyvin suuren määrän tunteja pitämänsä asian tekemiseen. Tämä korostaa sitä, että tulakseen huipuksi tietystä asiasta täytyisi käyttää suuri osa käytettävissä olevasta ajasta tämän asian harjoitteluun.

Onneksi kaikkien ei tarvitse olla yhden asian mestareita, vaan usein tarvitaan useamman eri taidon hallintaa. Sitä paitsi jos tietyn alan huipuksi tuleville riittää, että tekee vain sitä, mistä pitää, niin kai muillakin on oikeus tehdä aina sitä, mikä mukavimmalta tuntuu. Tämä toki sillä varauksella, että tämä asia on itsessään hyödyllinen (jos haluaa kehittyä). Grahamin kommentistahan voi vetää myös sen johtopäätöksen, että kenestäkään ei tule pakottamalla (eli ilman aitoa kiinnostusta) alansa huippua. Jos siis käytän 50 tuntia ennemmin kirjan *GULAG – Vankileirien saaristo* lukemiseen kuin matematiikan harjoitteluun, on se ihan ok. Ei se ainaakaan kuulosta sen hullummalta kuin käyttää 50 tuntia yhden ainoan matematiikkavalmennustehtävän tekemiseen, kuten eräs valmennettava taannoin teki.

Usean harrastuksen mukana tulee paljon erilaisia kaivereita, mikä auttaa maailmankuvan luomisessakin. Matematiikka- ja koodausleireillä puheenaiheet ovat melko samanlaisia, vaikka näilläkin on eronsa: Koodausleirillä opin termin ”normoutuminen”, joka tarkoittaa suunnilleen sitä, että antaa periksi tavallisen elämän houkutuksille ja vähentää kisakoodausta. Ma-

tematiikkapuolella en ole tätä sanaa kuullut, joten ilmeisesti matematiikan harrastajilla ei ole enää pelkoa muuttua tavalliseksi. (Täytyy myöntää, että kyllä jotkut matematiikankin harrastajat osaavat ”lifettää”.) Suunnistus- ja poikakuororeissuilla jutut ovatkin sitten jo varsin erilaisia. Lisäksi maailmakuvaa muovaa etenkin hyvien kirjojen lukeminen. Lukemalla erilaisen taitavien kirjailijoiden kirjoja voi tutustua uusiin kulttuureihin ja erilaisiin ihmisiin, ja samalla voi oppia tuntemaan itsensäkin paremmin.

Kotikuntani on Keski-Pohjanmaalla sijaitseva Halsua, josta on 80 kilometriä lähimpään kaupunkiin, millä on luonnollisesti ollut vaikutusta harrastusmahdollisuuksiin. Toisaalta harrastuksia saattaa kertyä useampia, kun harrastaminen ei välttämättä ole yhtä kallista kuin kaupungissa, eivätkä (urheilu)harrastukset ole niin vakavia, että täytyisi keskittyä jo nuoresta vain yhteen. Kun mahdollisuuksia ei ole paljoa, on myös helppoa osallistua kaikkeen mahdolliseen. Ei tarvitse ajatella, että miksi valitsisin juuri tuon lajin, jos muuta vastavaa ei ole tarjolla.

Vanhin harrastukseni on suunnistus, jonka aloitin noin kuusivuotiaana (taisin kyllä osata kertotaulun jo tuolloin) isäni jalanjäljissä. Suunnistus on ehkä parhaiten fyysisiä ja älyllisiä vaatimuksia yhdistävä urheilulaji. Itse asiassa suunnistajat ovat keskimäärin niin hyvin koulutettuja, että jotkut korostavat nimenomaan sitä, että suunnistus kuitenkin sopii kaikille, [2] mikä tietysti pitääkin paikkansa. Päätä tulee jatkuvasti käyttää eteen tulevien ongelmatilanteiden ratkaisemiseksi: Kierrätkö polkua vai menenkö suoraan? Mitä minun pitäisi nähdä seuraavaksi? Onko tuo kivi kartalla, ja jos on, niin mikä niistä se on? Samalla saa juosta vaihtelevassa ja monipuolisessa maastossa, jossa pääsee samalla näkemään paljon kauniita maisemia.

Poikakuoroon liityin 10-vuotiaana. Yksi Suomen noin kymmenestä poikakuorosta sattuu löytymään naapurikunnasta Vetelistä, ja kun läpäisin koululla pidetyn koelaulun ja vanhemmat suosittelivat, niin päätin mennä mukaan. Nykyään laulan miesäänissä.

Vaikka oma sävelkorvani ei olekaan kummoinen, sujuu yhdessä laulaminen paremmin ja monet kappaleet kuulostavat oikeasti hyviltä. Toki ansionsa tässä on myös huippukappaleilla, joiden tunteminen lisää yleissivistystäkin. On oikeastaan melko mukavaa huomata, että olen ollut esittämässä Mozartin *Lacrymosaa* laulaen sopraanossa.

Mukavaa poikakuorossa on myös se, että konserttimatkoilla on päässyt näkemään maailmaa. Esimerkiksi vuonna 2015 ehdimme 11 päivän bussimatkalla nähdä (ainakin vilaukselta) Dresdenin, Prahan, Wienin, Budapestin ja Berliinin.

Hyvistä puolista huolimatta poikakuoro on itseni kehittämisen kannalta varmaankin vähiten hyödyllinen harrastukseni. Toisaalta poikakuoro ei vie paljoa aikaa, ja

ehkä laulaminen sitten vahvistaa sitä aivokurkiaista tai jotain muuta aivojen osaa, kun ainakin minun täytyy keskittyä täysin laulaakseni oikein. Ja voihan toki harrastaa vaikka rentoutumisen takia. Ei kaikesta tekemisestä tarvitse olla erityistä hyötyä. Olisi varmasti melko raskastakin, jos tavoitteena olisi, että kaikki oma toiminta palvelisi jotakin suurta päämäärää.

Lukeminen on tietysti ollut jollain lailla mukana siitä asti, kun noin 6-vuotiaana opin lukemaan. Nykyisen kaltaisen klassikkopainotteiseksi se kuitenkin muuttui kahdeksannella luokalla, kun halusin panostaa äidinkielen genre-esitelmään lukemalla genre klassikkoja. Suosikkeihini kuuluvat ainakin massiiviset *Karamazovin veljekset* ja *Vankileirien saaristo*, joka mainittiin aiemminkin, mutta myös esimerkiksi *Pikku Prinssi* ja *Alkemisti* ovat mielestäni erittäin hyviä.

Olen lukenut klassikkoja, koska olen ajatellut, että se on yleissivistävää ja että klassikot ovat hyviä. Nykyään haluan painottaa luettavan kirjan valinnassa enemmän sitä, että sen lukemisesta on minulle hyötyä. Haluan löytää kirjasta uusia ja mielenkiintoisia ajatuksia. Jotkin klassikot eivät tätä kriteeriä täytä, koska ne ovat klassikoita siksi, että ne sisältävät jotakin, joka on aikoinaan ollut uutta, mutta on nykylukijalle arkipäivää. Mielestäni tällainen kirja on esimerkiksi *Rouva Bovary*, joka lukeutuu ensimmäisiin realistisiin kirjoihin ja josta en juurikaan pitänyt. Koska lukeminen vie paljon aikaa, kannattaisikin tällaisia ”epähyödyllisiä” kirjoja välttää, vaikka luen toki välillä esimerkiksi fantasiaa ihan vain huvia vuoksi.

Kilpailumatematiikan aloitin lukion ykkösen puolivälissä, kun sain tietää siitä saamalla kutsun valmennukseen MAOLin alkukilpailun jälkeen. Ennen ensimmäistä valmennuskertaa sain tehtyä 1,5 tehtävää 20 kirjevalmennustehtävästä, ja ensimmäisessä valmennusviikonlopussa tuli lähes lannistavan paljon uutta asiaa.

Alku on kuitenkin aina hankalin, ja seuraavia valmennustehtäviä sainkin jo tehtyä muistaakseni yli puolet. Valmennusviikonloputkin muuttuivat mukavammiksi sitä mukaa, kun aloin ymmärtämään paremmin opetusta ja tutustumaan muihin valmennettaviin.

Vuoden sisällä valmennukseen mukaan tulemisesta pääsin myös ensimmäiselle kisareissulleni, ja siellähän vasta mukavaa olikin: ilmainen matka hyvässä seurassa! Satun myös pitämään kilpailemisesta, joten se ei aiheuttanut liikaa stressiä.

Nyt yliopiston aloitettuani olen huomannut, että kilpailumatematiikan harrastamisesta on todella paljon hyötyä yliopistomatematiikkaan. Tämä ei ole itsestäänselvyys, sillä näiden sisällöt poikkeavat melko paljon toisistaan. Mutta kilpailumatematiikassa oppii maattista ajattelua, joka onkin oikeastaan kaikkein tärkein asia matematiikassa. Kun on nähnyt paljon erilaisia todistuksia ja ”kikka kakkosia”, on paljon helpompi

ymmärtää ja omaksua uusia todistuksia ja uutta teoriaa.

Matematiikka on varmaankin se asia, jossa minulla oli(/on) parhaat edellytykset tulla huipuksi. Koin lukioaikana lähes jatkuvasti pienoisia omantunnontuksia sen takia, että minusta tuntui, että harjoittelin liian vähän kilpailumatematiikkaa. Olin lukion loppupuolella Suomen kilpailumatematiikan harrastajista suunnilleen jossain sijalla 2–4, mutta en missään vaiheessa pystynyt kunnolla haastamaan ykköstä, Olli Järviniemeä.

Syy Ollin paremmuuteen on selvä: hän harjoitteli enemmän. Olli teki enimmäkseen matematiikkaa, kun minä käytin paljon enemmän aikaa lukemiseen ja siihen, että saisin hyvät arvosanat kaikista lukiokursseista. Hyvät arvosanat sainkin: lukion päättötodistuksessani vain englannista on yhdeksikkö, muista lukuaineista on kympit. Nämä arvosanat saattoivat kuitenkin maksaa olympiamitalin. [3]

Mitalin menetys vähän kismittää, mutta muuten olen melko tyytyväinen lukioajan ajankäyttöni. Suuri osa opetetuista asioista kiinnosti minua, samoin ne klassikkokirjat, joita luin. Näistä tiedoista ja taidoista voi sitä paitsi olla hyötyäkin tulevaisuudessa, ainakin se vähän niin kuin on lukion pointti. On myös hyvä muistaa, että matematiikka ei tainnut kiinnostaa minua silloin niin paljon kuin se kiinnostaa nyt. Osaan oikeastaan vasta nyt kunnolla kilpailumatematiikan perusteet. Kiinnostushan usein kasvaa sitä mukaa kun oppii lisää. Tilanne olisi voinut olla toinen, jos olisin kuullut kilpailumatematiikasta aiemmin, mutta sitä nyt ei ainakaan kannata murehtia.

Kilpailukoodauksen aloitin siis vuoden 2018 joulupäivänä. Olin kyllä jo melko pitkään ajatellut, että se olisi hyvä aloittaa: se tukisi matematiikkaa ja olisi eduksi työmarkkinoilla. Epäroin kuitenkin aloittamista, koska harrastuksia tuntui olevan jo riittävästi ja koodaus veisi aikaa etenkin matematiikalta. Luulin myös, et-

tä kynnys koodauksen opettelemiseen olisi korkeampi. Suhteellisen suuren osan perusasioista ehti kuitenkin oppia muutamassa viikossa, ja huhtikuun alussa pidetyn valmennusleirin kohdalla olin jo Suomen kuuden parhaan lukioikäisen kisakoodarin joukossa.

Toki käytinkin sen harjoitteluun melko suuren osan vapaa-ajastani, vaikka esimerkiksi ylioppilaskirjoitukset vähän häiritsivät. Lisäksi kilpailumatematiikan osaamisesta oli tietysti kriittinen hyöty: ilman sitä koodauksessa vastaavalle tasolle pääseminen olisi vienyt minulta varmasti ainakin kaksinkertaisen ajan ja todennäköisesti paljon pidempäänkin. Niin, ja harjoitustehtävien ratkominen oli (ja on edelleen!) minusta hauskaa, joten harjoittelumotivaatiota riitti senkin puolesta.

Koodauksen vastaisku seurasi pian: Kesän 2019 Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Roope Salmi voitti minut suureksi osaksi sen takia, että Roope osasi (omaani huimasti paremman) kisakoodaustaustansa vuoksi ratkaista tehtävän, jota minä en osannut. Roope sai pronssia, minä en.

Viitteet

[1] ”What You’ll Wish You’d Known” (tammikuu 2005, <http://www.paulgraham.com/hs.html>, viitattu 2.1.2020).

[2] ”Suunnistajat ovat usein pomoja ja korkeakoulu-tettuja – Minna Kauppi toivoo, ettei lajia leimattaisi elitistiseksi” (Yle 15.6.2018, <https://yle.fi/uutiset/3-10251663>, viitattu 2.1.2020).

[3] Sain viime Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa 15 pistettä, kun pronssiin vaadittiin 17. Niissä hän (kuten muissakin vastaavissa tiedeolympialaisissa) noin puolet kaikista osallistujista saa mitalin.

Solmu 1/2020

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, apulaisprofessori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Olli Järvinen, opiskelija, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Silta, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, Yhteiskuntatieteiden keskus, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtinen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenranta teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

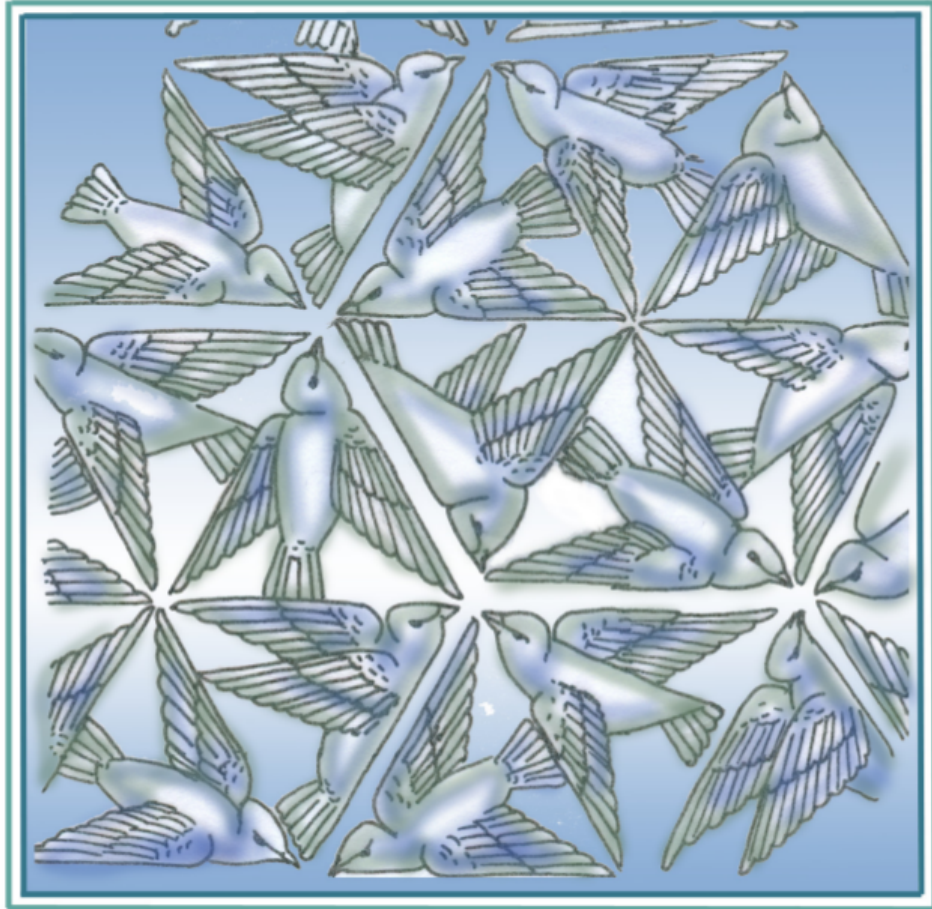
Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Numeroon 2/2020 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.7.2020 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 **SOLMU**
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi