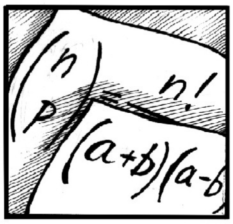

Muirheadin epäyhtälö: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen
Matematik och statistik, Åbo Akademi

Artikkelissa *Muirheadin epäyhtälö* Solmun numerossa 3/2019 oli seitsemän ongelmaa lukijoiden iloksi. Tässä olisi ratkaisu jokaiselle niistä.

Ongelma 1. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettavan epäyhtälön vasen puoli auki se muuttuu muotoon

$$a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2 + 2abc \geqslant 8abc,$$

eli riittää todistaa, että

$$a^2 b + a^2 c + a b^2 + b^2 c + a c^2 + b c^2 \geqslant 6abc.$$

Todetaan tätä varten, että $\langle 2,1,0\rangle \succ \langle 1,1,1\rangle$. Onhan nimittäin

$$2 \geqslant 1 \geqslant 0, \qquad 1 \geqslant 1 \geqslant 1, \qquad 2+1+0 = 3 = 1+1+1,$$

sekä vielä

$$2 \geqslant 1 \qquad \text{ja} \qquad 2+1 = 3 \geqslant 2 = 1+1.$$

Siten Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b \geqslant \sum_{\text{sym}} abc,$$

mikä onkin juuri tarvittava epäyhtälö. □

Ongelma 2. *Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geqslant 3abc\,(a+b+c)\,.$$

Ratkaisu. Todetkaamme ensin, että

$$\langle 4,0,0\rangle \succ \langle 2,1,1\rangle \qquad \text{ja} \qquad \langle 2,2,0\rangle \succ \langle 2,1,1\rangle\,.$$

Onhan nimittäin

$$4 \geqslant 0 \geqslant 0, \quad 2 \geqslant 1 \geqslant 1, \quad 2 \geqslant 2 \geqslant 0, \quad \text{ja} \quad 2 \geqslant 1 \geqslant 1,$$

ja

$$4+0+0 = 4 = 2+1+1$$

ja

$$2+2+0 = 4 = 2+1+1,$$

sekä

$$4 \geqslant 2, \qquad 4+0 = 4 \geqslant 3 = 2+1, \qquad 2 \geqslant 2,$$

ja

$$2+2 = 4 \geqslant 3 = 2+1.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^4 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^2 bc, \qquad \text{ja} \qquad \sum_{\text{sym}} a^2 b^2 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^2 bc.$$

Edellinen epäyhtälö sanoo, että

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right) \geqslant 2\left(a^2 bc + a b^2 c + ab c^2\right),$$

tai sievemmin

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2 bc + a b^2 c + ab c^2,$$

ja jälkimmäinen sanoo, että

$$2\left(a^2 b^2+b^2 c^2+c^2 a^2\right) \geqslant 2\left(a^2 bc+a\, b^2 c+ab\, c^2\right).$$

Laskemalla nämä kaksi viimeistä epäyhtälöä yhteen saamme

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4+2\left(a^2 b^2+b^2 c^2+c^2 a^2\right)&\\ \geqslant 3\left(a^2 bc+a\, b^2 c+ab\, c^2\right)&,\end{aligned}$$

eli

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geqslant 3abc\,(a+b+c)\,,$$

kuten pitikin. □

Ongelma 3. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc=1$. Todista, että*

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

Ratkaisu. Riittää osoittaa, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3\\ &\quad\geqslant a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3}+a^{1/3} b^{7/3} c^{1/3}+a^{1/3} b^{1/3} c^{7/3}.\end{aligned}$$

Voimmekin helposti tarkistaa, että

$$\langle 3,0,0\rangle \succ \langle 7/3,1/3,1/3\rangle\,,$$

sillä onhan

$$3\geqslant 0\geqslant 0,\quad \frac{7}{3}\geqslant\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{3},\quad 3+0+0=3=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

sekä vielä

$$3=\frac{9}{3}\geqslant\frac{7}{3},\quad\text{ja}\quad 3+0=3=\frac{9}{3}\geqslant\frac{8}{3}=\frac{7}{3}+\frac{1}{3}.$$

Siispä Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3},$$

eli

$$\begin{aligned}&2\left(a^3+b^3+c^3\right)\\ &\geqslant 2\left(a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3}+a^{1/3} b^{7/3} c^{1/3}+a^{1/3} b^{1/3} c^{7/3}\right),\end{aligned}$$

mistä väite seuraakin suoraan jakamalla puolittain kahdella. □

Ongelma 4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolle $n\geqslant 2$, ja olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että*

$$\frac{2}{n\,(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{a_i\, a_j} \geqslant \sqrt[n]{a_1\, a_2\cdots a_n}.$$

Ratkaisu. Aloitetaan toteamalla, että n reaaliluvun jonoille $\langle 1/2,1/2,0,\ldots,0\rangle$ ja $\langle 1/n,1/n,\ldots,1/n\rangle$ pätee

$$\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\ldots,0\right\rangle \succcurlyeq \left\langle\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right\rangle.$$

Tämä seuraa havainnoista

$$\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}\geqslant 0\geqslant 0\geqslant\ldots\geqslant 0,\qquad \frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{n}\geqslant\ldots\geqslant\frac{1}{n},$$

ja

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+\ldots+0=1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n},$$

sekä

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\geqslant\frac{1}{n},\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1&\geqslant\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n},\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1&\geqslant\frac{3}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n},\\ &\vdots\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{0+0+\ldots+0}_{(n-2)\times 0}=1&\geqslant\frac{n}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n\times\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Nyt Muirheadin epäyhtälön nojalla pätee

$$\sum_{\text{sym}} a_1^{1/2}\, a_2^{1/2} \geqslant \sum_{\text{sym}} a_1^{1/n}\, a_2^{1/n}\cdots a_n^{1/n},$$

eli

$$2!\cdot(n-2)!\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{a_i\, a_j}\geqslant n!\,\sqrt[n]{a_1\, a_2\cdots a_n},$$

mistä väite heti seuraakin jakamalla puolittain kertomalla $n!$. □

Ongelma 5. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista Nesbittin epäyhtälö*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Kertomalla epäyhtälö puolittain nimittäjien tulolla $2\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$ se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned}2a\,(c+a)\,(a+b)+2b\,(b+c)\,(a+b)&\\ +2c\,(b+c)\,(c+a)&\\ \geqslant 3\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)&.\end{aligned}$$

Kertomalla kaikki tulot auki jäljelle jää

$$\begin{aligned}&2\left(a^3+b^3+c^3\right)+6abc\\ &\quad+2\left(a^2 b+a^2 c+a\, b^2+b^2 c+a\, c^2+b\, c^2\right)\\ &\geqslant 3\left(a^2 b+a^2 c+a\, b^2+b^2 c+a\, c^2+b\, c^2\right)+6abc,\end{aligned}$$

mikä sievenee muotoon

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant a^2\,b+a^2\,c+a\,b^2+b^2\,c+a\,c^2+b\,c^2.$$

Tämä onkin

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^2\,b,$$

mikä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain sattuu olemaan niin, että $\langle 3,0,0\rangle \succ \langle 2,1,0\rangle$. Mutta tämä pätee, koska on

$$3 \geqslant 0 \geqslant 0, \qquad 2 \geqslant 1 \geqslant 0, \qquad 3+0+0=3=2+1+0,$$

sekä vielä $3 \geqslant 2$ ja $3+0=3 \geqslant 3=2+1$. □

Ongelma 6. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ratkaisu. Kertomalla todistettava epäyhtälö puolittain tulolla $a^2\,b^2\,c^2$ se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\\ &\qquad \geqslant 2\,a^2\,b^2\,c^2+2\,a^{5/3}\,b^{5/3}\,c^{5/3}\,(a+b+c)\,,\end{aligned}$$

minkä, kertomalla kaiken auki ja supistamalla puolittain termit $2\,a^2\,b^2\,c^2$, voimme kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa

$$\sum_{\text{sym}} a^4\,b^2 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^{8/3}\,b^{5/3}\,c^{5/3}.$$

Tämä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 4,2,0\rangle \succ \langle 8/3,5/3,5/3\rangle$. Mutta näin on, sillä

$$4 \geqslant 2 \geqslant 0, \qquad \frac{8}{3} \geqslant \frac{5}{3} \geqslant \frac{5}{3},$$

ja

$$4+2+0=6=\frac{18}{3}=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3},$$

ja vielä

$$4=\frac{12}{3} \geqslant \frac{8}{3}, \quad \text{sekä} \quad 4+2=6=\frac{18}{3} \geqslant \frac{13}{3}=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}.$$

□

Ongelma 7. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain tulolla

$$abc\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right)$$

todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}&\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)abc\\ &\quad+\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right)abc\\ &\quad+\left(c^3+a^3+abc\right)\left(a^3+b^3+abc\right)abc\\ &\leqslant \left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right).\end{aligned}$$

Kertomalla rohkeasti kaiken auki ja ryhmittelemällä termejä sopivasti se muuttuu muotoon

$$\begin{aligned}&\left(a^6+b^6+c^6\right)abc+3\left(a^3\,b^3+b^3\,c^3+c^3\,a^3\right)abc\\ &\quad+4\left(a^3+b^3+c^3\right)a^2\,b^2\,c^2+3\,a^3\,b^3\,c^3\\ &\leqslant \left(a^6\,b^3+a^6\,c^3+a^3\,b^6+b^6\,c^3+a^3\,c^6+b^3\,c^6\right)\\ &\quad+2\,a^3\,b^3\,c^3+\left(a^6+b^6+c^6\right)abc\\ &\quad+3\left(a^3\,b^3+b^3\,c^3+c^3\,a^3\right)abc\\ &\quad+2\left(a^3+b^3+c^3\right)a^2\,b^2\,c^2+a^3\,b^3\,c^3,\end{aligned}$$

mikä sievenee välittömästi muotoon

$$\begin{aligned}&2\left(a^3+b^3+c^3\right)a^2\,b^2\,c^2\\ &\qquad\leqslant a^6\,b^3+a^6\,c^3+a^3\,b^6+b^6\,c^3+a^3\,c^6+b^3\,c^6,\end{aligned}$$

tai vielä yksinkertaisemmin muotoon

$$\sum_{\text{sym}} a^5\,b^2\,c^2 \leqslant \sum_{\text{sym}} a^6\,b^3.$$

Tämä puolestaan seuraa välittömästi Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain pätee $\langle 6,3,0\rangle \succ \langle 5,2,2\rangle$. Mutta tämä pätee, sillä on

$$6 \geqslant 3 \geqslant 0, \quad 5 \geqslant 2 \geqslant 2, \quad \text{ja} \quad 6+3+0=9=5+2+2,$$

sekä vielä

$$6 \geqslant 5, \qquad \text{ja} \qquad 6+3=9 \geqslant 7=5+2.$$

□

Lähteet

Ongelmat 1, 2 ja 4 ovat tehtävät 12.2(a), 12.3 ja 12.2(c) kirjassa [3]. Ongelmat 2 ja 5 ovat esimerkit 6.12 ja 6.13 teoksessa [1], ja ongelma 6 on saman teoksen tehtävä 6d.4. Lopuksi, ongelma 7 on harjoitustehtävä 12.9 kirjassa [2].

Viitteet

[1] Bradley, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.

[2] Cvetkovski, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.

[3] Steele, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America Problem Books Series, Cambridge University Press, 2004.